仮想ボラティリティデータを用いた原資産の実分布推定精度検証

朝賀, 弓就 / ASAGA, Yuzuki

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学研究科編
(巻 / Volume)
65
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
8
(発行年 / Year)
2024-03-24
(URL)
https://doi.org/10.15002/00030782

仮想ボラティリティデータを用いた原資産の実分布推定精度検証

Estimation accuracy of real distribution for underlying asset using hypothetical volatility data

朝賀弓就
Yuzuki ASAGA
指導教員　安田和弘

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

Estimating the distribution of financial assets plays an important role in financial practice. Jensen et al. [6] derived the generalized recovery theorm, which estimates the real distribution of the underlying asset from option price information. This theorem recovers the real distribution of the underlying asset and investors' risk preferences using the implied distribution of the underlying asset that can be calculated from the market option prices. However, in order to use this theorem for the Japanese market, it is difficult to calculate the implied distribution due to the problems of missing prices and mispricing caused by low liquidity. Therefore, in this study, we conduct an experiment by creating hypothetical data assuming these problems, and consider how to approach the problem in the Japanese options market.

Key Words : *Generalized recovery theorem, Implied distribution, Real distribution, Option market.*

1. はじめに

オプション市場におけるオプション価格は市場参加者が想定する原資産価格の将来の分布を反映して決定されるため, 原資産の価格変動に対する市場参加者の予想が内包されている. 市場が完備であるという仮定の下では, オプション価格式を行使価格で二階偏微分することで原資産の分布であるインプライド分布を復元することができる [4]. インプライド分布は投資家の将来見通しが反映され, 推定時点の情報で見通しがアップデートされるリアルタイム性をもつといった特徴をもち, 市場分析, 資産運用, リスクマネジメントといった様々な金融実務への応用に適している. ただし, インプライド分布はリスク中立分布であり実際の原資産の分布である実分布とは異なる. Ross (2015) [7] はリスク中立分布から実分布を推定する定理として Recovery Theorem を導いた. さらに, Recovery Theorem は Jensen et al. (2019) [6] によって複数満期の分布の復元が可能である Generalized Recovery Theorem に一般化された. この定理によってその時点のオプション価格情報から算出される状態価格行列を用いて実分布を推定することができる. ここで状態価格は無リスク金利で割り引いたリスク中立分布である. Generalized Recovery Theorem の利用で必要なデータは状態価格行列のみであるが, 実際に日本のオプション市場のデータから算出を試みると 1 を超えた値や負の値など適切でない値が算出されてしまう. この要因としては日本のオプション取引の流動性や行使価格間隔が広いことなどによる価格の欠損やミスプライスが考えられる. 先行研究においても, 海外の市場を対象とした分析は存在するが, 日本のオプション市場を対象とした研究は見つけることができなかった. そこで本研究では日本のオプション市場における実分布の推定で問題となる状態価格行列算出の手法とオプション市場の価格に誤差がある状態での実分布の推定における精度について検証を行う. 具体的には, オプション市場の状況を考慮した仮想データを作成し, データの欠損やミスプライスのある状況での状態価格行列の算出方法を議論する. また, 仮想データに誤差を付け, Generalized Recovery Theorem で実分布を算出し正解の分布と比較することで様々な誤差に対する実分布推定の精度や特徴について観察し, 考察する.

2. オプション市場

オプションとは, 満期時点で特定の原資産に基づくペイオフを現時点で定めた価格で取引する権利であり, 日本では大阪証券取引所で主に取引されている. オプションの銘柄は, ”プット・コール”, ”限月”, ”権利行使価格”の三つの要素で構成されている. 日経 225 オプションでは, ”8 年先までの 6 月と 12 月の直近 16 限月”, ”1 年 6 か月先までの 3 月と 9 月の直近 3 限月”, ”3 月, 6 月, 9 月, 12 月以外の直近 8 限月”の合計 27 の限月取引が並行して行われている. また, 権利行使価格は日経平均株価に一番近い権利行使価格を中心に 16 種類ずつ合計 33 種類が設定され, 残存期間が 3 か月となった限月は日経平均株価に一番近い権利行使価格を中心に 125 円刻みで上下 16 種類ずつとなるように追加設定が行われる. 実際の市場では, 近い限月の銘柄の取引は行われているが, 限月が遠い銘柄になるほど取引量は低下し, 価格がつかない銘柄も多く存在する. また, 取引量の少なさの影響で明らかに適正でない価格の銘柄も散見される. 表 1 は実際のオプション市場のオプション価格である. アット・ザ・マネー (ATM)

表 1: 2016 年 6 月の日経 225 コールオプション価格 ([8] より作成.)

行使価格 \ 満期	1 か月	2 か月	3 か月
15000	1130	1320	1445
15125	1030	1310	-
15250	930	1145	-
15375	840	1060	-
15500	760	965	-
15675	680	-	-
15750	600	-	-
15875	520	820	-
16000	465	680	800
16125	400	610	-
16250	340	565	-
16375	295	500	-
16500	250	425	550
16625	215	400	-
16750	180	360	-
16875	150	260	-
17000	125	275	365

は 16000 円である. イン・ザ・マネー (ITM) の部分の価格は流動性が下がるため, プットオプションの価格をコールオプション価格に計算して記載している (小数点以下は四捨五入). 従来, オプション価格は行使価格が大きくなるごとに行使価格の変化量に対する変化量は小さくなるが, 2 か月満期のオプション価格を見ると, 価格にずれがあることが見て取れる. また, 3 か月満期になるとオプション価格に欠損が目立つ.

3. 分析手法

(1) Volatility Surface

本研究では, 仮想オプションデータの作成に SABR モデル [5] に対する Volatility Surface を用いる. SABR モデルとは, 行使価格に対するボラティリティスマイルを再現する原資産価格モデルである. SABR モデルでは基礎となる資産が以下の確率微分方程式に従うと仮定する.

$$dS(t) = \sigma(t)S(t)^{\beta}dW(t), \quad S(0) = S_0,$$
$$\frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)} = \nu dW'(t), \quad \sigma(0) = \alpha.$$

ここで, W, W' は相関 ρ $(-1 \le \rho \le 1)$ をもつブラウン運動, α (> 0) はボラティリティの初期値, β $(0 \le \beta \le 1)$ はボラティリティスマイルの傾きを制御するパラメータ, ν (> 0) はボラティリティの変化率である. このモデルで生成される SABR インプライドボラティリティを BS モデルのボラティリティに近似させる式が以下のように [5] の"Appendix B"で与えられている. S を原資産価格, σ をボラティリティとすると,

$$\Sigma(S,K,T) = I_0(1 + I_1 T),$$

$$I_0 \triangleq \frac{\alpha}{(SK)^{\frac{1-\beta}{2}}\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\ln^2\left(\frac{S}{K}\right)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\ln^4(\frac{S}{K})\}}\frac{z}{x(z)},$$
$$I_1 \triangleq \frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(SK)^{(1-\beta)}} + \frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(SK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2,$$
$$z \triangleq \frac{\nu}{\alpha}(SK)^{\frac{1-\beta}{2}}\ln\left(\frac{S}{K}\right),$$
$$x(z) \triangleq \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho}{1-\rho}\right).$$

ここで, K は行使価格, T は満期である. ボラティリティスマイルのレベルを制御する α, 傾きを制御する β, ρ, 凸性を制御する ν の 4 つのパラメータを適切に調整することで, 後の数値実験では市場に適合するボラティリティスマイルを再現する.

(2) Generalized Recovery Theorem

Generalized Recovery Theorem [6], 及び [1] により, 状態価格行列から実分布と投資家のリスク選好を推定する. その手順は次の通りである.

$$\begin{bmatrix} \bar{\pi}_{1,1} & \cdots & \bar{\pi}_{1,S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\pi}_{T,1} & \cdots & \bar{\pi}_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{-1} \\ \vdots \\ \bar{h}_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}^{\tau_1} \\ \vdots \\ \bar{\delta}^{\tau_T} \end{bmatrix}$$

が成り立つ. ここで, $\bar{\pi}$ はリスク中立価格から計算した状態価格, $\bar{h}_s^{-1}$ は限界効用の逆数, $\bar{\delta}^{\tau_t}$ は主観的割引係数である. また, $s(= 1, 2, \cdots, S)$ は原資産価格に対応する状態, $\tau_i (i = 1, 2, \cdots, T)$ は満期である. 原資産価格の状態は時刻 0 の状態から前後に広がる. よって $\bar{h}$ は $\bar{h}_1^{-1}, \cdots, \bar{h}_{s_0-1}^{-1}, \bar{h}_{s_0}^{-1}, \bar{h}_{s_0+1}^{-1}, \cdots, \bar{h}_S^{-1}$ となり, $\bar{h}_{s_0} = 1$ である. また, $\bar{\delta}^{\tau_t}$ は割引率なので, 短期間では 1 に近いと仮定するのが妥当である. そこで 1 に近い $\bar{\delta}_0$ の周りでのテイラー展開を用いて線形近似を行う. 定数 a_τ, b_τ に対して,

$$\bar{\delta}^{\tau} \approx a_\tau + b_\tau \bar{\delta} \tag{1}$$

と書く. $\bar{\delta}_0$ 周りでのテイラー展開は

$$\bar{\delta}^{\tau} \approx \bar{\delta}_0^{\tau} + \tau\bar{\delta}_0^{\tau-1}(\bar{\delta} - \bar{\delta}_0)$$

となり, 定数 a_τ, b_τ は

$$a_\tau = -(\tau - 1)\bar{\delta}_0^{\tau},$$
$$b_\tau = \tau\bar{\delta}_0^{\tau-1}$$

で与えられる. 式 (1) と $\bar{h}_{s_0}^{-1} = 1$ を代入して整理すると,

$$\begin{bmatrix} -b_1 & \bar{\pi}_{11} & \cdots & \bar{\pi}_{1s_{0-1}} & \bar{\pi}_{1s_{0+1}} & \cdots & \bar{\pi}_{1S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_T & \bar{\pi}_{T1} & \cdots & \bar{\pi}_{Ts_{0-1}} & \bar{\pi}_{Ts_{0+1}} & \cdots & \bar{\pi}_{TS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{h}_1^{-1} \\ \vdots \\ \bar{h}_{s_{0-1}}^{-1} \\ \bar{h}_{s_{0+1}}^{-1} \\ \vdots \\ \bar{h}_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - \bar{\pi}_{1s_0} \\ \vdots \\ a_T - \bar{\pi}_{Ts_0} \end{bmatrix}.$$

さらに, この式を行列 $\mathbf{B}$ とベクトル $\mathbf{h}_\delta, \mathbf{a}_\pi$ として書き直すと,

$$\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta = \mathbf{a}_\pi$$

となる. この式に主観的割引係数と限界効用に対する制約を与え, 両辺の差を小さくするように以下の最適化問題を解く.

$$\begin{aligned} &\min \quad \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 \\ &\text{subject to} \quad 0 \le \delta \le 1, \\ &\qquad \bar{h}_s^{-1} > 0 \ (s = 1, \cdots, s_0 - 1, s_0 + 1, \cdots, S). \end{aligned} \tag{2}$$

そして, 最適化で求めた $\mathbf{h}_\delta$ の値を用いて, 実確率 $\bar{p}_{\tau s}$ を,

$$\bar{p}_{\tau s} = \frac{1}{\delta^\tau} \bar{h}_s^{-1} \bar{\pi}_{\tau s} \tag{3}$$

として求めることができる. まずパラメトリックな仮定の下で最適化問題を解き, 次にパラメトリックな推定結果を先験情報として利用し, ノンパラメトリックに最適化問題を解く. この二段階の推定方法を用いることで, 解を安定化させる. 一段階目のパラメトリックな推定では投資家の効用関数に相対的リスク回避度 γ の CRRA 型効用を仮定する. このとき, 限界効用の逆数は $\bar{h}_s^{-1} = (1 + r_s)^\gamma$ となる. r_s は状態 s の時の資産価格のリターンである. この式を (2) の最適化問題の $\mathbf{h}_\delta$ に代入し, 最適化問題を解く. このときの最適化パラメータは δ と γ の二つである. この最適化で得られた相対的リスク回避度の γ を $\hat{\gamma}$ とする.

次に, 一段階目の推定で得られた推定値を先験情報として与えて再度推定を行う. 具体的には以下の最適化問題を解くことで推定する.

$$\begin{aligned} &\min \ (1-\zeta)\|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 + \zeta \sum_{s-1, s \ne s_0}^{s_{max}} (\bar{h}_s^{-1} - \hat{h}_s^{-1})^2 \\ &\text{subject to} \ 0 \le \delta \le 1, \\ &\qquad \bar{h}_s^{-1} > 0 \ (s = 1, \cdots, s_0 - 1, s_0 + 1, \cdots, S), \\ &\qquad \hat{h}_s^{-1} = (1 + r_s)^{\hat{\gamma}} \ (s = 1, \cdots, s_0 - 1, s_0 + 1, \cdots, S). \end{aligned} \tag{4}$$

最適化問題 (4) の目的関数の第一項目はフィッティング項と呼ばれ, 第二項目が限界効用と推定値のずれを表現する項で正則化項と呼ばれる. $\zeta (0 \le \zeta \le 1)$ はフィッティング項と正則化項の関係をコントロールするパラメータで, 正則化パラメータと呼ばれる. ζ の値の決定には [1] 同様, 選択基準関数 $g(\zeta)$ を用いる. $g(\zeta)$ は正則化パラメータを ζ に設定した時のフィッティング項の値を $y_{fit}(\zeta)$, 正則化項の値を $y_{reg}(\zeta)$ として以下のように与えられる.

$$g(\zeta) = \frac{y_{fit}(\zeta) - y_{fit}(0)}{y_{fit}(1) - y_{fit}(0)} + \frac{y_{reg}(\zeta) - y_{reg}(1)}{y_{reg}(0) - y_{reg}(1)}.$$

この関数はフィッティング項の値と正則化項の値の水準を揃えたうえで, 双方が小さくなるような ζ を選択することを目的としている. ここで, $\zeta = 1$ の時は $\bar{h}_s^{-1} = \hat{h}_s^{-1}$ とすれば目的関数は最小の 0 になるので $y_{reg}(1) = 0$ である. また $g(0) = g(1) = 1$ となる. ζ を変化させながら問題を解き, その結果から得られた $g(\zeta)$ が最小となる ζ の時の結果を分析に利用する.

4. 状態価格の推定

Generalized Recovery Theorem の利用にはオプション価格から状態価格を推定する必要があり, その方法について説明する.

オプション価格はリスク中立的な投資家の想定する原資産価格分布における満期日でのペイオフの期待値を無リスク金利で割り引いた値として表現できる. つまり, 行使価格 K のヨーロピアンコールオプションの価格 $C(K)$ はリスク中立分布の密度関数 $q(x)$, 無リスク金利 r, 満期までの期間 T を用いて以下のように記述できる.

$$C(T, K) = e^{-rT} \int_0^\infty \max(x - K, 0) q(x) dx.$$

この式を K について二階偏微分することによって満期 T と行使価格 K に関する状態価格関数 $\pi(T, K)$ はコールオプション価格関数 $C(T, K)$ を用いて以下のように表せる.

$$\pi(T, K) = \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}.$$

しかし, 市場で取引されているオプション価格は満期, 行使価格のそれぞれに関して離散的であるため, 何らかの方法で価格関数 $C(T, K)$ を補間する必要がある. 本研究では [1] を参考に, 満期 T の補間に RBF 補間, 行使価格 K の補間に自然三次スプライン補間を用いて状態価格を推定する.

(1) RBF 補間

RBF 補間とは, 放射基底関数 (Radial Basis Function, RBF) を用いて入力データ点間を補間する関数を近似する手法である. RBF は原点からの距離にのみ依存する関数であり, 以下は RBF の例である. $\epsilon > 0$ とする.

- 線形 RBF
$$\phi(x) = \|x\|.$$
- ガウシアン RBF
$$\phi(x) = \exp(-(\epsilon\|x\|)^2).$$
- 多重二乗 RBF
$$\phi(x) = \sqrt{1 + (\epsilon\|x\|)^2}.$$
- 逆二乗 RBF
$$\phi(x) = \frac{1}{1 + (\epsilon\|x\|)^2}.$$
- 薄板スプライン RBF
$$\phi(x) = \|x\|^2 \log(\|x\|).$$

ϵ によって, 表現する関数形をどれだけ滑らかにするかを調整することができる. また, $\|x\|$ はユークリッド距離とする. 原点からの距離は center と呼ばれる制御点からの距離を指し, 複数ある center での RBF を重みづけして線形結合することで補間関数 $f(x)$ を生成する. center を入力データ点とすると補間関数は以下のように表せる.

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i \phi(\|x - x_i\|).$$

ここで, ω_i は各入力データ点での重みである. 重みは補間関数 $f(x)$ が各 center を通ることを条件として決定す

る. j 番目の center x_j から見たとき, どの center においても RBF が y_j を通るように重みを決定する. 数式としては以下のようになる.

$$y_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \phi(\|x_j - x_i\|).$$

これを N 点の center に適用すると $N\times N$ の行列として以下のようにまとめることができる.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1,x_1) & \phi(x_1,x_2) & \cdots & \phi(x_1,x_N) \\ \phi(x_2,x_1) & \phi(x_2,x_2) & \cdots & \phi(x_2,x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_N,x_1) & \phi(x_N,x_2) & \cdots & \phi(x_N,x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix}.$$

この連立方程式を解くことで重み ω_i を求めることができる. なお, 後の実験では [オプションのデルタ, 満期, ボラティリティ] の組を補間する. x を [オプションのデルタ, 満期] とし, y をボラティリティとして補間を行う.

(2) 自然三次スプライン補間

スプライン補間は入力データ点を滑らかな曲線で結ぶ補間方法である. 特に, 自然三次スプライン補間は二つの点を三次多項式の曲線で結ぶものである. その多項式は以下の通りである.

$$f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3.$$

ここで, $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$ の 4 つの係数を区間ごとに推定し, 区間ごとに異なる曲線で補間を行う. 係数は以下の 4 つの条件によって推定する.

1. 各データ点での前後二つの関数の関数の値は同一であり, y と一致する.

$$f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (i = 1, ..., N-2).$$

2. 各データ点での前後二つの関数の一階微分の値は一致する.

$$f'_i(x_{i+1}) = f'_{i+1}(x_{i+1}) \quad (i = 1, ..., N-2).$$

3. 各データ点での前後二つの関数の二階微分の値は一致する.

$$f''_i(x_{i+1}) = f''_{i+1}(x_{i+1}) \quad (i = 1, ..., N-2).$$

4. 両端のデータ点での二階微分の値は 0 である.

$$f''_1(x_1) = 0,$$
$$f''_{N-1}(x_N) = 0.$$

これらの条件を制約式として区間ごとに係数を求める.

[1] を参考に, RBF 補間を満期の補間, 自然スプライン補間を価格の補間に用いる. まず, 満期の補間を RBF 補間で行い, 算出された行使価格とオプション価格の組を用いて自然スプライン補間によって価格の補間を行う. 以上の方法で補間したオプション価格を数値微分することで状態価格を算出する.

a) パラメトリックな補間

次にパラメトリックな補間として DLN 補間を [2] (霧生, 枇々木 (2014)) を参考に説明する. 実際のオプション市場で入手できるオプション価格データは流動性が低くノイズが含まれていることが考えられる. このとき, ノンパラメトリックな補間方法ではノイズの影響で計算される状態価格が歪んでしまう. そこで, パラメトリックな方法をとることでこの歪みを回避することを考える. 二成分混合対数正規分布 (Double Log Normal, DLN) を仮定する方法はインプライドリスク中立分布の推定やリスク調整の容易さから先行研究でも多く用いられている.

現在の原資産の価格を S_0 としたときの時刻 t における株価を μ を確率変数として

$$S_t = S_0 e^{\mu t}$$

とする. このとき, 原資産の分布を考えることは, $e^{\mu t}$ の分布を考えることと同義である. $e^{\mu t}$ は DLN 分布に従うと仮定すると,

$$q_{DLN}(x) = \omega q_{LN}(x|S_1, s_1) + (1-\omega) q_{LN}(x|S_2, s_2) \tag{5}$$

となる. ここで, ω $(0 \le \omega \le 1)$ は分布の重みを表すパラメータ, S_i $(i = 1, 2)$ は各対数正規分布のロケーションを表すパラメータ, s_i $(i = 1, 2)$ は各対数正規分布のスケールを表すパラメータである. 現状では, 単一満期における原資産分布しか推定することができないが, [3] (A. Alentorn and S. Markose, (2006)) では分布のパラメータに対して期間構造を仮定することで満期への依存性を解消している. パラメータ S_i, s_i $(i = 1, 2)$ を満期 τ に依存するように $S_i = e^{\mu_i \tau}, s_i = \sigma_i \sqrt{\tau}$ $(i = 1, 2)$ と置き換える. よって式 (5) は以下のようになる.

$$q_{DLN}(x) = \omega q_{LN}(x|e^{\mu_1 t}, \sigma_1\sqrt{\tau}) + (1-\omega) q_{LN}(x|e^{\mu_2 t}, \sigma_2\sqrt{\tau}). \tag{6}$$

任意の満期 $T = \tau$ における無裁定条件より, リスク中立測度下での期待収益率と無リスク金利の収益率は一致する. このことから, r を無リスク金利として,

$$\omega e^{\mu_1 \tau + \frac{(\sigma_1\sqrt{\tau})^2}{2}} + (1-\omega) e^{\mu_2 \tau + \frac{(\sigma_2\sqrt{\tau})^2}{2}} = e^{r\tau}$$

が成り立つ. この式を μ_2 に対して解くと,

$$\mu_2 = \frac{1}{\tau} \left\{ \log\left(\frac{e^{r\tau} - \omega e^{\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\tau}}{1-\omega} \right) - \frac{\sigma_2^2}{2}\tau \right\}$$

となり, パラメータは 4 つとなる. 市場で取引されているオプション価格を $V_{market}(K)$ とし, DLN 分布のパラメータから計算したオプションのモデル価格 $V_{model}(K, \mu_1, \sigma_1 \sigma_2, \omega)$ との誤差二乗和を最小にする最適化問題を解き, パラメー

タを推定する. 最適化問題の定式化は以下の通り.

$$\min \sum_{i=1}^{N} (V_{model}(K_i, \mu_1, \sigma_1, \sigma_2, \omega) - V_{market}(K_i))^2$$

$$\text{subject to} \tag{7}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\tau}\left\{ \log\left(\frac{e^{r\tau} - \omega e^{\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\tau}}{1-\omega} \right) - \frac{\sigma_2^2}{2}\tau \right\},$$

$$0 \le \omega \le 1,$$

$$\sigma_j > 0 \; (j = 1, 2).$$

パラメータ μ_j $(j = 1, 2)$ は指数部分にあたるので制約はない. ただし, 解釈としては μ_j $(j = 1, 2)$ 原資産の成長率にあたるため 0 付近から大きく外れた値になることは非現実的である. σ_j $(j = 1, 2)$ も同様に原資産のボラティリティにあたるためあまりに大きな値になることは好ましくない. しかし, 式 (7) のまま最適化を行ったところそのような値が最適解として算出される結果になることがしばしばあった. このため最適化の実装時はパラメータの値に最大値を 1 までとする制約を設定した. また, 式 (7) の目的関数の値は行使価格が低くオプション価格が高くなるところの誤差の影響を強く受ける. 反対に行使価格が高くオプション価格が低くなるところでは目的関数に与える誤差の影響は小さくなる. そのため, 行使価格が低いオプションの誤差を小さくし, 行使価格が高いオプションの誤差を無視するような分布が最適解になるという結果も多くみられた. そこで, 行使価格ごとの影響の差をなくすために目的関数を

$$\sum_{i=1}^{N} \{(V_{model}(K_i, \mu_1, \sigma_1, \sigma_2, \omega) - V_{market}(K_i))/V_{market}(K_i)\}^2$$

とした. 誤差を市場価格で割ることで誤差を割合で評価できるようになっている.

5. 数値実験

状態価格行列を推定するための補間方法に関する実験と価格に誤差がある場合の実分布の復元に関する実験を行う.

(1) 状態価格推定に関する実験

オプション価格の欠損や価格の歪みが補間に対してどのように影響するのかを検証する実験を行った. 日本のオプション市場におけるオプション価格は行使価格や満期に対して欠損がある. そこで, SABR モデルによって作成したボラティリティサーフェスから計算された分布を正確なリスク中立分布としたとき, 同一のボラティリティサーフェスによって計算されたオプション価格を欠損させ, 欠損部を補間することで推定されたインプライドリスク中立分布とリスク中立分布の差を分析する.

a) 行使価格に対する欠損

行使価格に対するオプション価格を欠損させる. 行使価格を ATM から 125 円刻み, 前後 40 個で算出した分布を正確なリスク中立分布とし, 行使価格を ATM から 250 円刻みで前後 20 個, 500 円刻みで前後 10 個のデータを補間することで行使価格の欠損に対する影響を調べる. 図 1, 2 は欠損させた価格を補間して計算したインプライド分布と仮想分布を比較した図である. 概ね分布を再現できているが分布の裾部分で少し歪みが見え, 欠損がより多い価格間隔 500 の方の分布の方が大きく歪んでいる.

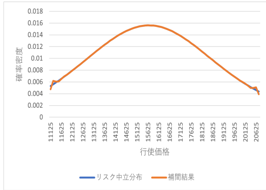


図 1: インプライドリスク中立分布の比較(価格間隔 250, 満期 0.5)

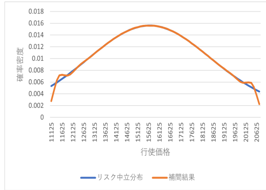


図 2: インプライドリスク中立分布の比較(価格間隔 500, 満期 0.5)

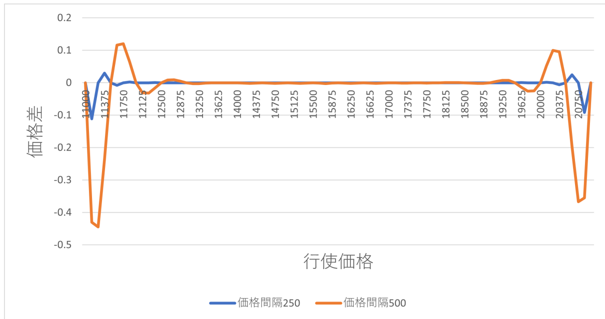
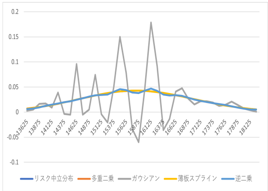


図 3: 仮想データの価格と補間した価格の差 (満期 0.5)

図 3 は実分布としている仮想データの価格と補間を行った価格との差を示している. 差は端の方で大きくなり, 中心に向けて振動しながら減少している. スプライン補間の端点の条件の影響で端点付近では差が大きくなり, その差を修正するために振動していると考えられる. また, 欠損の間隔が大きい場合は補間する範囲も大きくなるため価格間隔が大きい方が大きな差が生じていると考えられる.

b) 満期に対する欠損

満期に対するオプション価格を欠損させる. 満期を 0.01 から 1 まで 0.01 刻み, 100 個で算出した分布を実分布とし, 満期の刻み幅を 0.04 刻みで 25 個, $\frac{1}{12}$ 刻みで 12 個, 0.25 刻みで 4 個のデータを補間することで満期の欠損に対する影響を調べる. また, 異なる RBF を用いて実験を行い, 補間の精度を比較する. この実験は ATM 前後 10 個, もしくは前後 20 個の行使価格に絞って行った. これは, RBF 補間の入力データが詰まりすぎることによる過学習を防ぐためである. さらに, 補間の際の入力データ点の中で最も短い満期よりも短い満期は補外となってしまい精度が著しく低下するため, 結果からは除外している. 図 4, 5, 6 は入力データ点の数が異なる補間結果を示している. 満期は最小の入力データ点と次の入力データ点の中間の満期を選択している. 結果を比較すると, 入力データ数 25,



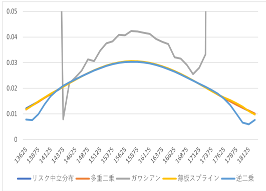


図 4: RBF ごとの補間結果 (データ点 25, 行使価格前後 20, 満期 0.06)

図 5: RBF ごとの補間結果 (データ点 12, 行使価格前後 20, 満期 0.12)

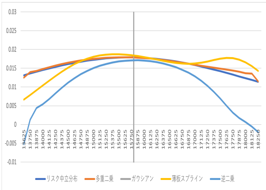


図 6: RBF ごとの補間結果 (データ点 4, 行使価格前後 20, 満期 0.37)

12 の結果はどちらもガウシアンを RBF とした補間以外は分布を再現できているといえる. 入力データ数 4 の結果も RBF によって差はあるが, 多重二乗を RBF とした補間は分布の再現ができているといえる.

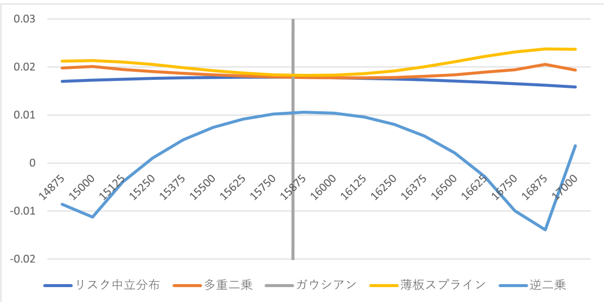


図 7: RBF ごとの補間結果 (データ点 4, 行使価格前後 10, 満期 0.37)

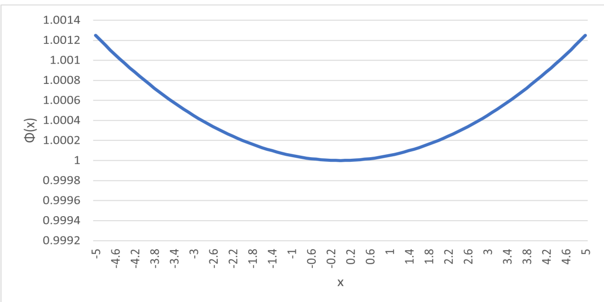


図 8: 多重二乗 RBF

図 7 は図 6 から行使価格を減らした結果である. 大きく再現したい分布から外れており, 分布を再現出来ていない. この結果から, 満期間隔が空いている場合は, 多くの行使価格で価格を入手できればある程度補間は可能だと考えられる.

表 2: リスク中立分布と補間した分布の L^1 誤差和 (T は入力データ数, K は行使価格 ATM 前後 10 と 20 どちらで補間を行ったかを示している. *は値が行の中で最小のもの.)

状況 \RBF	gauss	multi	inverse	thin plate
T4,K10	$1.59E+01$	$*7.86E-04$	$9.89E-03$	$2.07E-03$
T4,K20	$1.75E+02$	$*2.51E-04$	$3.98E-03$	$1.79E-03$
T12,K10	$1.79E-02$	$*5.26E-05$	$2.06E-03$	$5.62E-04$
T12,K20	$3.39E-01$	$*2.39E-05$	$1.11E-03$	$1.02E-04$
T25,K10	$2.39E-03$	$*1.22E-05$	$5.34E-04$	$1.35E-04$
T25,K20	$1.66E-03$	$*7.26E-06$	$3.95E-04$	$2.37E-05$

表 2 は L^1 誤差を用いて RBF ごとの誤差を示している. 全ての補間結果で RBF に多重二乗を用いたものが L^1 誤差が小さい. このことから今回の補間では RBF は多重二乗が適していると考えられる.

図 8 は, 多重二乗 RBF を $\epsilon = 0.01$ で図示したものである. 下に凸の形状であり, ボラティリティスマイルの形状に似ていることから, ボラティリティの補間に適していることがわかる.

(2) 実分布推定に関する実験

次に Generalized Recovery Theorem を用いた実分布復元において, オプション価格に誤差がある場合に復元された分布にどのような影響が出るのかを検証する実験を行う. オプション価格に付けた誤差は以下の 5 種類である.

1. 仮想オプション価格に対して (仮想オプション価格)×(何パーセント) を加算する誤差.
2. 仮想オプション価格に対して一定の価格を加算する誤差.
3. 仮想オプション価格に対して ATM から離れるほど大きくなる誤差.
4. 仮想オプション価格に対して満期が長くなるほど大きくなる誤差.
5. 仮想オプション価格データに対して飛び飛びになるような誤差.

それぞれの誤差に対して誤差の大きさを変化させて実験を行い, 誤差ごとの特徴についても考察する. また, 1 から 4 の誤差は状態価格を計算する際に 1 を超える値や負の値にはならなかったため, そのまま実分布の推定を行うが, 5 の誤差を付けた場合は状態価格に異常な値が算出されてしまう. そのため, DLN 法を用いて状態価格を算出する.

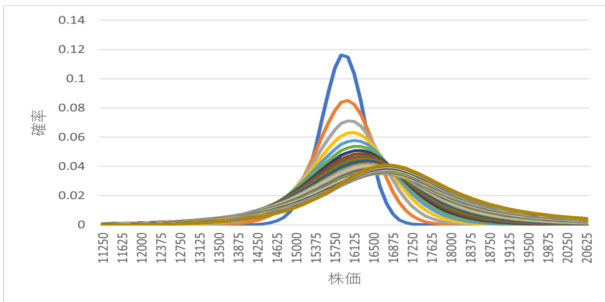


図 9: GRT によって復元された分布 (誤差なし)

図 9 はオプション価格に誤差を付けずに復元した分布を示している. 各線がそれぞれ異なる満期の分布を示しており, 青い線が満期 0.01 の分布, オレンジの線が満期 0.02 の分布, $\cdots$, 黄土色の線が満期 1 の分布である. この分布を正解の実分布とし, 誤差を付けて復元した分布と比較を行う.

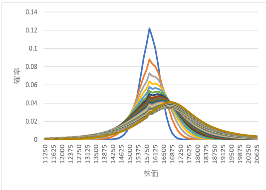


図 10: GRT で復元した実分布 (誤差 1, 5%)

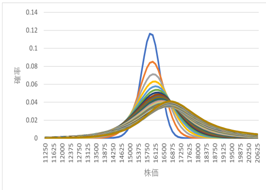


図 11: GRT で復元した実分布 (誤差 2, +5)

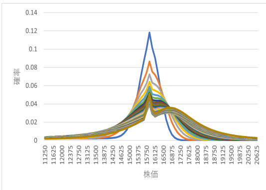


図 12: GRT で復元した実分布 (誤差 3, 5%)

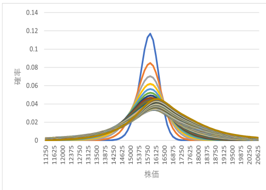


図 13: GRT で復元した実分布 (誤差 4, 50%)

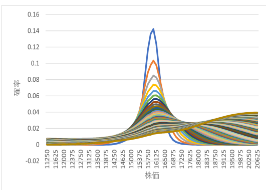


図 14: GRT で復元した実分布 (誤差 5, 5%)

図 10, 11, 12, 13, 14 はそれぞれの誤差を付けて復元した実分布を示している. ここで 3, 4, 5 の誤差の付け方について補足する. 3 の誤差は $\frac{|\text{行使価格}-\text{現在の原資産価格}|}{|ATM\text{ から最も遠い行使価格}-\text{現在の原資産価格}|}\times$ ○ (%) となるように誤差をつけている. このように誤差をつけることで ATM から離れるごとに誤差が大きくなるようになっている. 4 の誤差は ○% $\times$ 満期 となるように誤差を付けている. 図 13 の場合は満期 0.01 では 50% $\times$ 0.01, 満期 0.02 では 50% $\times$ 0.02 の誤差, $\cdots$, 満期 1 では 50% $\times$ 1 の誤差となるように誤差を付けている. 5 の誤差は 1 の誤差を行使価格を一つ飛ばして付けている. 結果を見ると 1, 3 の誤差を付けて復元した分布は ATM での歪みが目立つ. 2, 4 の誤差を付けて復元した分布は正解の分布との目立った変化は視覚的には見られなかった. 5 の誤差を付けて復元した分布は ATM より大きな価格側の裾が厚くなっていることが見て取れる.

a) 正解の実分布との誤差

次に分布のどの部分が正解の実分布との誤差が大きいのかを調べるためにその差を観察する.

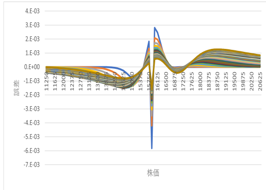


図 15: 正解の実分布と復元した分布の誤差 (誤差 1, 5%)

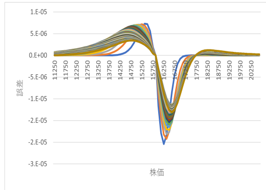


図 16: 正解の実分布と復元した分布の誤差 (誤差 2, +5)

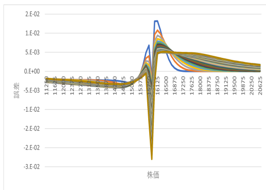


図 17: 正解の実分布と復元した分布の誤差 (誤差 3, 5%)

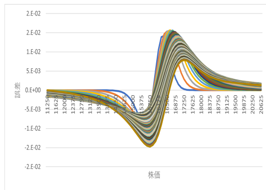


図 18: 正解の実分布と復元した分布の誤差 (誤差 4, 50%)

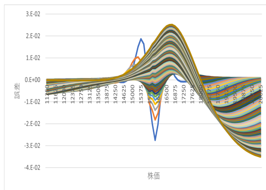


図 19: 正解の実分布と復元した分布の誤差 (誤差 5, 5%)

図 15, 16, 17, 18, 19 は誤差を付けて復元した分布と正解の実分布の差を示している. (正解の実分布)-(誤差を付けて復元した分布) として計算しているので, 値が正の場合はその価格における誤差がついた分布が正解の実分布よりも小さいことを示し, 値が負の場合はその価格における誤差がついた分布が正解の実分布よりも大きいことを示す. 結果を見ると, 1, 3 の誤差の結果は形状が似ており ATM での誤差が大きくなっている. スケールは 3 の誤差の方が大きくより誤差がつきやすいことが分かる. 2 の誤差の結果はスケールが小さな誤差がみられた. 計算過程で状態価格に差は生じないため, これは計算機の丸め誤差の影響と考えられる. 4 の誤差の結果は ATM 付近で大きな誤差がついていることが分かる. また, 各線に注目すると満期が長くなるにつれて誤差の広がりを持つようになり, 誤差の正負の境界も大きい価格に移動していることが分かる. 5 の誤差の結果は長い満期になるほど大きい価格に対して大きな誤差がついている.

b) 正解の実分布との相対誤差

ATM 付近の確率と裾の確率では値の大きさが異なる. このため, 単純な誤差評価では元の確率が

大きい ATM 付近の誤差が目立つ結果になりやすい. そこで, 相対誤差による評価を行うことで元の確率の大きさに依存しない考察を行う. 図 20, ??, 22, 23, 24 はそれぞれの満期と状態に対して $\frac{(\text{正解の実分布の確率})-(\text{誤差をつけて復元した分布の確率})}{\text{正解の実分布の確率}}$ とした値を示している. これにより誤差の値の大きさではなく正解の実分布と誤差をつけて復元した分布のずれを相対的に評価することができる.

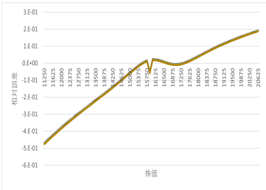


図 20: 正解の実分布と復元した分布の相対誤差 (誤差 1, 5%)

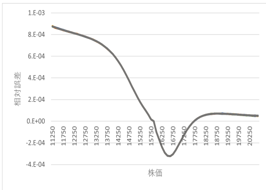


図 21: 正解の実分布と復元した分布の相対誤差 (誤差 2, +5)

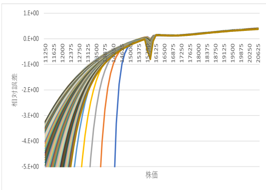


図 22: 正解の実分布と復元した分布の相対誤差 (誤差 3, 5%)

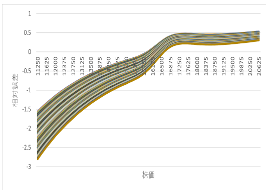


図 23: 正解の実分布と復元した分布の相対誤差 (誤差 4, 50%)

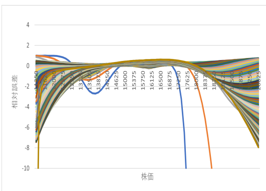


図 24: 正解の実分布と復元した分布の相対誤差 (誤差 5, 5%)

図 20, 21, 22, 23, 24 は誤差を付けて復元した分布と正解の実分布との相対誤差を示している. 相対誤差で見ると全体的に分布の裾の部分の誤差が大きく示されている. このことから, 確率の変化量自体は ATM 付近で大きくなりやすいが, 元の分布からの変化の割合では裾の部分で大きくなりやすいことが分かる. 特徴的な結果としては, 誤差 1, 2 の結果は線が重なっており, 満期の長さは影響しないことが分かる. また, 誤差 3 の結果は特に ATM より小さな価格の裾で値が非常に大きな負の値をとっており, 小さな価格で確率が大きく復元されてしまうことが分かる.

6. まとめと今後の課題

今回の結果から, 行使価格や満期に関して欠損がある場合でも, 正しい価格を得られたならば補間によって分布の再現がある程度可能なことが分かる. また, 現状の補間方法を用いる場合は自然三次スプライン補間は端点付近の結果に注意が必要であるといえる. データ数が十分にとれるのならば端点は補間後に除外するという方法も考えられるが日本のオプション市場を考慮した場合は端点に別の条件を与えることを検討する必要がある. RBF 補間については多重二乗 RBF が今回の補間には適していると考えられる. また, ミスプライスがある場合はパラメトリックな補間によって計算可能な値で補間が可能である.

誤差を付けたオプション価格に対する Generalize Recovery Theorem を用いた実分布の復元の結果からは, 誤差の付け方によって分布のずれが生じやすい箇所に違いがみられた. さらに, 相対誤差の結果からは変化の値自体は小さいが相対的な変化量でみると誤差が大きいところもみられた.

今後の課題としては二つのことがあげられる. 一つ目は市場の価格の誤差の要因を解析することである. オプション価格の決定には様々な要因が影響するため誤差があることは認識できても, その誤差がどのような特徴の誤差なのかを判別することが難しい. 誤差の特徴を識別することができれば今回の結果を利用することで推定精度の向上が期待できる. 二つ目は実際の市場を対象とした際の推定精度の検証方法である. 実際の市場では原資産の価格は一つであり分布として扱うことはできない. このため, 推定された実分布に対する評価が難しく, 今後のさらなる研究が必要である.

参考文献

[1] 伊藤, 霧生, 枇々木, Generalized Recovery Theorem を用いた forward looking な収益率分布の推定, ジャフィー・ジャーナル, 第 17 巻, 76-99, 2019.

[2] 霧生, 枇々木, 複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 57, 112-134, 2014.

[3] A. Alentorn, and S. Markose, Removing maturity effects of implied risk neutral densities and related statistics, *Economics Discussion Papers*, 609, 2006.

[4] D. Breeden, and R. Litzenberger, Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices, *Journal of Business*, 51, 621–651, 1978.

[5] P. S. Hagan, D, Kumar, S. Lesniewski, and D. E. Woodward, Managing Smile Risk, *Wilmott magazine*, 3, 84-108, 2002.

[6] C. S. Jensen, D. Lando, and L. H. Pedersen, Generalized Recovery, *Journal of Financial Economics*, 133(1), 154–174, 2019.

[7] S. Ross, The Recovery Theorem, *The Journal of Finance*, 70(2), 615-648, 2015.

[8] 日経 NEEDS Financail QUEST 2.0, `http://finquest.nikkeidb.or.jp/ver2/ip_hosei/`, (参照 2023 年 10 月 24 日).