磁界・非対称ハーフブリッジコンバータの強連成有限要素解析と数理計画法の併用によるSRM鉄芯構造のトポロジー最適化に関する研究

小倉, 類 / OGURA, Rui

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学研究科編
(巻 / Volume)
65
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
8
(発行年 / Year)
2024-03-24
(URL)
https://doi.org/10.15002/00030692

磁界・非対称ハーフブリッジコンバータの強連成有限要素解析と数理計画法の併用によるSRM 鉄芯構造のトポロジー最適化に関する研究

Topology Optimization of SRM Structure Based on Hybridization of Strongly Coupled Analysis of Magnetic Field and Asymmetric Half-bridge Converter Circuit and Mathematical Programming

小倉類
Rui OGURA
指導教員　岡本吉史

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻博士前期課程

To promote decarbonization, the demand for motors is increasing currently. The switched reluctance motors (SRMs) have attracted attention recently because SRMs are simple components and low-cost which do not require the permanent magnet. However, it is well known that the torque characteristic of SRMs is poor. Therefore, in this paper, the torque characteristic of SRM is improved using the topology optimization to reduce the large torque ripple using the design sensitivity. The analysis procedure based on the time domain adjoint variable method in the finite element magnetic field analysis strongly coupled with an asymmetric half-bridge converter for SRMs is proposed. As a result, the effective rotor structure is obtained.
***Key Words** : Coupled analysis of magnetic field and asymmetric half-bridge converter circuit, time domain adjoint variable method, and topology optimization.*

１．はじめに

世界的な潮流として，二酸化炭素排出量抑制のために機器の電動化が促進され，電動機の需要は増加している[1]. そのため，高効率な電動機の設計が求められており，動作特性や損失の正確な評価を測る手段として，出力特性を高精度に評価することが重要である．

近年，永久磁石の地政学リスク向上の可能性から，簡易な構造で安価な Switched Reluctance Motor（SRM）の研究が行われている[2] [3]．SRM の問題としてトルク脈動や騒音が挙げられ，様々な効率改善案が検討されているが，抜本的な解決には至っていない．

効率改善の手法としてトポロジー最適化（TO）[4]があり，SRM の構造最適化が報告されているが[5] [6]，電流源入力を想定した場合が主立っており，駆動回路である非対称ハーフブリッジコンバータ回路の厳密な動作特性は考慮されていない．磁界解析とコンバータ回路の電気回路方程式を連成することで，動作特性を正確に考慮でき，構造最適化に加えてコンバータ回路のスイッチング素子の動作が高効率化に寄与する可能性を探ることができる．

そこで本論文では，有限要素法を用いた磁界解析と三相非対称ハーフブリッジコンバータ回路の強連成解析に基づく時間領域随伴変数法（TDAVM）[7]を SRM の構造最適化に適用し，スイッチング素子の制御を変化させて特性の比較を行った結果，平均トルクの上昇およびトルク脈動の減少が確認され，提案手法の有効性が示された．

２．提案手法

（１）二次元場における電磁界有限要素解析

a）三相非対称ハーフブリッジコンバータにおける回路方程式との強連成解析

本論文では三相非対称ハーフブリッジコンバータにより駆動する SRM を解析対象とするため，図 1 に，三相非対称ハーフブリッジコンバータ回路を示す．ここで，e_0 は直流電圧源，R_{total} および R は抵抗値，i_{u1}，i_{u2}，i_{u3}，i_{v1}，i_{v2}，i_{v3}，i_{w1}，i_{w2}，i_{w3} は各相の電流，$d\Phi_u / dt$，$d\Phi_v / dt$，$d\Phi_w / dt$ は有限要素法の各コイル領域における鎖交磁束数の時間微分項である．$R_{SWu1}(\theta)$，$R_{SWu2}(\theta)$，$R_{SWv1}(\theta)$，$R_{SWv2}(\theta)$，$R_{SWw1}(\theta)$，$R_{SWw2}(\theta)$ はロータの機械角 θ に応じて動作するスイッチング素子であり，短絡状態（0 Ω）と開放状態（1.0 ×10^8 Ω）を切り替えることで動作を模擬している．l_1, l_2, l_3 は U 相におけるキルヒホッフの電圧則から得られる電気回路方程式のループであり，V 相，W 相も同様に 3 本のループを持つため，回路全体で計 9 本の電気回路方程式が定義される．

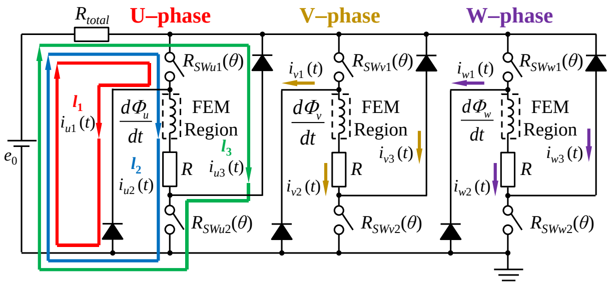


図 1　三相非対称ハーフブリッジコンバータ

図 2 に，コンバータ回路で用いているダイオードの非線形電圧電流特性を示す．ここで，V はダイオードに印加される電圧，I はダイオードに流れる電流を示す．順方向特性を底が自然対数の指数関数，逆方向特性を一次関数と近似して，（1）式の通りに 0 V の点で 2 つの関数を接続した．

$$I = \begin{cases} i_{leak}\left[\exp\left(\dfrac{qV}{nk_B a_{bs}}\right) - 1\right] & (V > 0) \\ \alpha V + \beta & (V \le 0) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，n は放出係数，k_B はボルツマン定数，a_{bs} は絶対温度，q は電荷素量，i_{leak} は逆方向漏れ電流を示す．α および β は，0 V における指数関数の傾きおよび切片であり，（2）式から導出される．表 1 に，図 2 の特性を表すために用いた諸元を示す．

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{q i_{leak}}{nk_B a_{bs}} \exp\left(\dfrac{qV}{nk_B a_{bs}}\right) \\ \beta = -\dfrac{q i_{leak} V}{nk_B a_{bs}} \exp\left(\dfrac{qV}{nk_B a_{bs}}\right) + i_{leak}\left[\exp\left(\dfrac{qV}{nk_B a_{bs}}\right) - 1\right] \end{cases} \quad (V = 0) \tag{2}$$

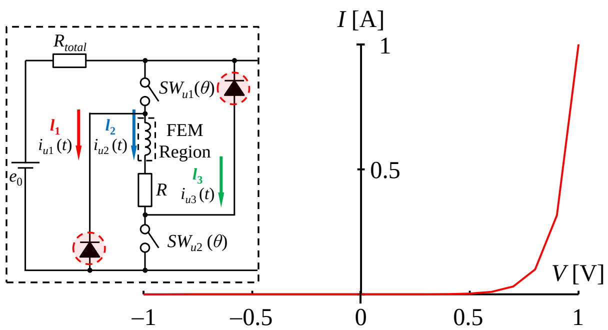


図 2　ダイオードの非線形電圧電流特性

表 1　ダイオードの非線形電圧電流特性

q [C]	n	k_B [J/K]	a_{bs} [K]	i_{leak} [A]	α	β
1.60×10^{-19}	3.38	1.38×10^{-23}	298.15	1.0×10^{-5}	1.15×10^{-4}	0

（3）式に，三相非対称ハーフブリッジコンバータ回路における U，V，W 相の電流を磁気ソースとする有限要素法弱形式[8]を示す．

$$\begin{aligned} G_i = &\iint_{\Omega_{all}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \right\} dS \\ &- l_z \frac{w i_{u2}(t)}{S_u} \iint_{\Omega_u} N_i \tau_{zu} dS - l_z \frac{w i_{v2}(t)}{S_v} \iint_{\Omega_v} N_i \tau_{zv} dS \\ &- l_z \frac{w i_{w2}(t)}{S_w} \iint_{\Omega_w} N_i \tau_{zw} dS = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，Ω_{all} は解析領域全域，Ω_u，Ω_v，Ω_w は U，V，W 相巻線領域，τ_{zu}，τ_{zv}，τ_{zw} は U，V，W 相巻線に流れる電流の方向ベクトルの z 方向成分，S_u，S_v，S_w は U，V，W 相巻線領域面積を示す．（3）式より，A_z，i_{u2}，i_{v2}，i_{w2}，を未知変数とした方程式を得られる．次に，図 1 の 3 本のループで定義された U 相の電気回路方程式を（4）式から（6）式に示す．

$$\begin{aligned} F_{u1} = &e_0 - R_{total}(i_{u1}(t) + \cdots + i_{w3}(t)) \\ &- R_{SW_{u1}}(\theta)(i_{u1}(t) + i_{u2}(t)) + \frac{nk_B K}{q} \ln\left| 1 - \frac{i_{u1}(t)}{i_{leak}} \right| = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F_{u2} = &e_0 - R_{total}(i_{u1}(t) + \cdots + i_{w3}(t)) - R i_{u2}(t) \\ &- R_{SW_{u1}}(\theta)(i_{u1}(t) + i_{u2}(t)) - R_{SW_{u2}}(\theta)(i_{u2}(t) + i_{u3}(t)) \\ &- \frac{d\Phi_u}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F_{u3} = &e_0 - R_{total}(i_{u1}(t) + \cdots + i_{w3}(t)) \\ &+ \frac{nk_B a_{bs}}{q} \ln\left| 1 - \frac{i_{u3}(t)}{i_{leak}} \right| - R_{SW_{u2}}(\theta)(i_{u2}(t) + i_{u3}(t)) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

（4）式はループ l_1，（5）式はループ l_2，（6）式はループ l_3 の回路方程式を表す．V，W 相も同様の電気回路方程式を 3 式ずつ定義する．

ここで，磁気エネルギーから得られる磁束と磁気ベクトルポテンシャルの関係式を（7）式に示す．

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\Phi i(t) = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega_C} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J}_0 dV \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega_C} \boldsymbol{A} \cdot \frac{w}{S_c} i(t) \boldsymbol{\tau} dV \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{w}{S_c} i(t) \iiint_{\Omega_C} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dV \right) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{\tau}$ は電流の方向ベクトル，Φ は鎖交磁束数，Ω_C はコイル領域である．（7）式により，鎖交磁束数 Φ は（8）式の通りに表すことができる．

$$\Phi = \frac{w}{S_c} \iiint_{\Omega_C} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dV \tag{8}$$

本論文では二次元解析を行うため，ベクトルポテンシャルおよび電流は z 方向にのみ値を有する．このことより，（8）式は（9）式に変形できる．また，（8）式の時間微分を取ると（10）式が導かれる．

$$\Phi = \frac{l_z w \tau_z}{S_c} \iint_{\Omega_C} A_z \, dS \tag{9}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{l\, w \tau_z}{S_c} \frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_C} A_z \, dS \right) = \frac{l\, w \tau_z}{S_c} \int_{\Omega_C} \frac{\partial A_z}{\partial t} dS \tag{10}$$

（10）式を適用すると，（5）式は（11）式の通りになる．

$$\begin{aligned} F_{u2} &= e_0 - R_{total}(i_{u1}(t) + \cdots + i_{w3}(t)) - R i_{u2}(t) \\ &\quad - R_{SW_{u1}}(\theta)(i_{u1}(t) + i_{u2}(t)) - R_{SW_{u2}}(\theta)(i_{u2}(t) + i_{u3}(t)) \\ &\quad - \frac{l\, w \tau_z}{S_u} \int_{\Omega_u} \frac{\partial A_z}{\partial t} dS = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

次に，（3）式を後退オイラー法で離散化すると（12）式になる．

$$\begin{aligned} G_i^{(m+1)} &= \iint_{\Omega_{all}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right\} dS \\ &\quad - l_z \frac{w i_{u2}{}^{(m+1)}}{S_u} \iint_{\Omega_u} N_i \tau_{zu} dS \\ &\quad - l_z \frac{w i_{v2}{}^{(m+1)}}{S_v} \iint_{\Omega_v} N_i \tau_{zv} dS \\ &\quad - l_z \frac{w i_{w2}{}^{(m+1)}}{S_w} \iint_{\Omega_w} N_i \tau_{zw} dS = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

ここで，m は離散時間ステップ番号である．同様に（4）式から（6）式を離散化し，時間刻み幅 Δt を両辺に掛け合わせると，（13）式から（15）式の通りとなる．

$$\begin{aligned} F'_{u1}{}^{(m+1)} &= \Delta t e_0 - \Delta t R_{total}(i_{u1}{}^{(m+1)} + \cdots + i_{w3}{}^{(m+1)}) \\ &\quad - \Delta t R_{SW_{u1}}(\theta)(i_{u1}{}^{(m+1)} + i_{u2}{}^{(m+1)}) \\ &\quad + \Delta t \frac{n k_B K}{q} \ln\left| 1 - \frac{i_{u1}{}^{(m+1)}}{i_{leak}} \right| = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} F'_{u2}{}^{(m+1)} &= \Delta t e_0 - \Delta t R_{total}(i_{u1}{}^{(m+1)} + \cdots + i_{w3}{}^{(m+1)}) \\ &\quad - \Delta t R i_{u2}{}^{(m+1)} - \Delta t R_{SW_{u1}}(\theta)(i_{u1}{}^{(m+1)} + i_{u2}{}^{(m+1)}) \\ &\quad - \Delta t R_{SW_{u2}}(\theta)(i_{u2}{}^{(m+1)} + i_{u3}{}^{(m+1)}) \\ &\quad - \frac{l\, w \tau_z}{S_u} \int_{\Omega_u} (A_z{}^{(m+1)} - A_z{}^{(m)}) dS = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} F'_{u3}{}^{(m+1)} &= \Delta t e_0 - \Delta t R_{total}(i_{u1}{}^{(m+1)} + \cdots + i_{w3}{}^{(m+1)}) \\ &\quad + \Delta t \frac{n k_B a_{bs}}{q} \ln\left| 1 - \frac{i_{u3}{}^{(m+1)}}{i_{leak}} \right| \\ &\quad - \Delta t R_{SW_{u2}}(\theta)(i_{u2}{}^{(m+1)} + i_{u3}{}^{(m+1)}) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

V 相，W 相においても（13）式から（15）式と同様の電気回路方程式が成り立つ．（12）式から（15）式を連立し，A，i_{u1}，i_{u2}，i_{u3}，i_{v1}，i_{v2}，i_{v3}，i_{w1}，i_{w2}，i_{w3} を状態変数とした m 時間ステップにおける Newton-Raphson 法から得られる線形化方程式は，図 3 のようになる．行方向および列方向に，有限要素法弱形式，U 相，V 相，W 相の回路方程式を配置した．

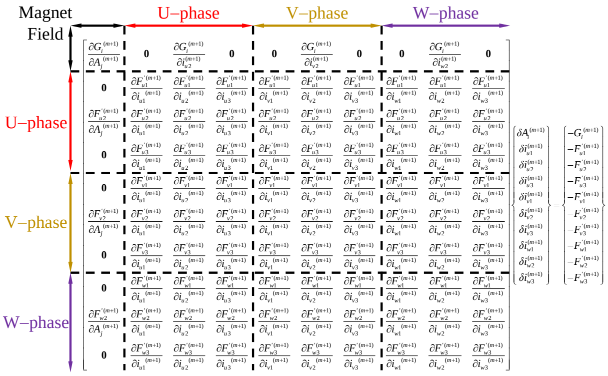


図 3　磁界・コンバータ回路の強連成方程式

（２）時間領域随伴変数法

本論文では，設計感度の解析手法として，大規模な変数に対する設計感度の高速計算が可能な TDAVM を用いる．初めに，$\boldsymbol{X} = \{A,\ i_{u1},\ i_{u2},\ i_{u3},\ i_{v1},\ i_{v2},\ i_{v3},\ i_{w1},\ i_{w2},\ i_{w3}\}^T$ を状態変数とした，図 3 より得られる有限要素法の解くべき状態方程式として（13）式を定義する．

$$\boldsymbol{HX} + \boldsymbol{G\dot{X}} = \boldsymbol{F} \tag{13}$$

ここで，H，G は係数行列，$\dot{\boldsymbol{X}}$ は $\boldsymbol{X}$ の時間部分 $\partial \boldsymbol{X} / \partial t$，$\boldsymbol{F}$ は電圧源および電流ソースに基づく右辺ベクトルである．初期値問題として（13）式を解くことで，$\boldsymbol{X}$，$\dot{\boldsymbol{X}}$ を得ることができる．また，目的関数 W を，状態変数 $\boldsymbol{X}$，設計変数 p の関数 w を時間積分した関数として（14）式の通りに定義する．

$$W = \int_0^{t_{end}} w(\boldsymbol{X}, p)\, dt \tag{14}$$

ここで，t_{end} は解析時刻の終端時間を示す．次に，随伴変数 $\boldsymbol{\lambda}$ を導入して，拡張目的関数を（15）式の通りに定義する．

$$\overline{W} = \int_0^{t_{end}} \left\{ w(\boldsymbol{X}, p) + \boldsymbol{\lambda}(t)^T (\boldsymbol{HX} + \boldsymbol{G\dot{X}} - \boldsymbol{F}) \right\} dt \tag{15}$$

次に，p による一階偏微分を適用して（16）式となる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{W}}{\partial p} &= \int_0^{t_{end}} \left[\frac{\partial w(\boldsymbol{X}, p)}{\partial p} \right. \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X}, p)}{\partial \boldsymbol{X}} \right)^T + \boldsymbol{\lambda}(t)^T \left(H + \frac{\partial H}{\partial p} \right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial p} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X}, p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \right)^T + \boldsymbol{\lambda}(t)^T G \right\} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{X}}}{\partial p} \\ &\quad \left. + \boldsymbol{\lambda}(t)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p} \boldsymbol{X} + \frac{\partial G}{\partial p} \dot{\boldsymbol{X}} - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial p} \right) \right] dt \end{aligned} \tag{16}$$

（17）式の部分積分を（16）式の第三項に適用させる．

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_{end}} \left\{ \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \right)^T + \boldsymbol{\lambda}(t)^T G \right\} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial p} \right) dt \\
&= \left[\left\{ \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \right)^T + \boldsymbol{\lambda}(t)^T G \right\} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial p} \right]_{t=0}^{t=t_{max}} \\
&\quad - \int_0^{t_{max}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \right)^T + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)^T G \right\} \right] \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial p} dt
\end{aligned} \tag{17}
$$

よって，（16）式を（18）式のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{W}}{\partial p} &= \int_0^{t_{end}} \frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial p} dt \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \boldsymbol{X}} \right)^T + \boldsymbol{\lambda}(t)^T \right\} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial p} \bigg|^{t=t_{end}} \\
&\quad + \int_0^{t_{end}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}(t)^T \left(H + \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) G + \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \boldsymbol{X}} \right)^T \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \right)^T \right\}^T \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial p} dt \\
&\quad + \int_0^{t_{end}} \boldsymbol{\lambda}(t)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p} \boldsymbol{X} + \frac{\partial G}{\partial p} \dot{\boldsymbol{X}} - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial p} \right) dt
\end{aligned} \tag{18}
$$

（18）式において，状態変数 $\boldsymbol{X}$ の初期値は $\boldsymbol{0}$ であるため，解くべき随伴方程式は（19）式と（20）式のようになる．

$$
G^T \boldsymbol{\lambda}(t_{end}) = -\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \tag{19}
$$

$$
H^T \boldsymbol{\lambda} - G^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \boldsymbol{X}} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w(\boldsymbol{X},p)}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}} \right) \tag{20}
$$

（19）式より終端時間における $\boldsymbol{\lambda}(t_{end})$が求まる．このとき，$\boldsymbol{\lambda}(t_{end})$は零ベクトルであり，（21）式の前進オイラー法により終端値問題を解く．

$$
\left(H + \frac{1}{\Delta t} G \right) \boldsymbol{\lambda}^{(m-1)} = \frac{1}{\Delta t} H^T \boldsymbol{\lambda}^{(m)} - \frac{\partial w(\boldsymbol{A},p)^{(m-1)}}{\partial \boldsymbol{A}} \tag{21}
$$

（21）式を解き，各離散時間の λ を（22）式に代入して感度を導出する．

$$
\frac{\partial \overline{W}}{\partial p} = \int_0^{t_{end}} \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial H}{\partial p} \boldsymbol{X} + \frac{\partial G}{\partial p} \dot{\boldsymbol{X}} - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial p} \right) dt \tag{22}
$$

また，TDAVM の計算精度検証を目的として，（23）式の前進差分法（FDM）[9]と感度を比較する．

$$
\frac{\partial W}{\partial p} = \frac{W(p+\Delta p) - W(p)}{\Delta p} \tag{23}
$$

Δp は設計変数の変動量を示す．

順解析におけるロータの回転方向を図 4 に示す．順解析では，最終時刻ステップ t_{end} まで図 3 の方程式を解き，状態変数 $\boldsymbol{X}$ について求める．この時，ロータの回転は反時計回りとなる．

次に，随伴解析におけるロータの回転方向を，図 5 に示す．随伴解析では，（19）式を解くことで得られた $\boldsymbol{\lambda}(t_{end})$ を終端値として（21）式を解く．この時，ロータの回転は順解析時と逆回転であり，時計回りとなる．

本論文では，定常状態の設計感度を使用するため，図 6 において緑色の順解析の最終時刻ステップまでの設計感度を算出する．次に，赤色の過渡状態の最終時刻ステップまでの設計感度を同様に算出し，順解析の最終時刻ステップまでの設計感度から，過渡状態の最終ステップまでの設計感度を差し引くことにより，青色の定常状態における設計感度を導出する．以上より，定常状態における，1 つの物理量の感度解析に必要な計算コストは，順解析の最終時刻ステップまでの感度解析と，過渡状態の時刻ステップまでの感度解析を行うため，2 倍となる．

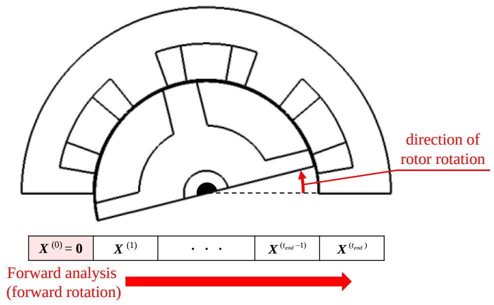


図 4　順解析におけるロータの回転方向

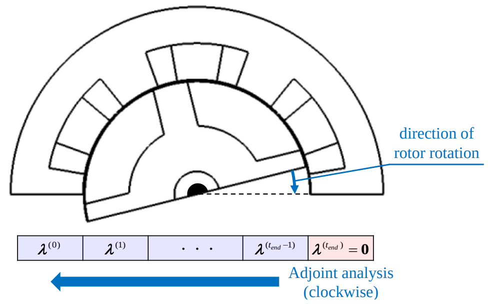


図 5　随伴解析におけるロータの回転方向

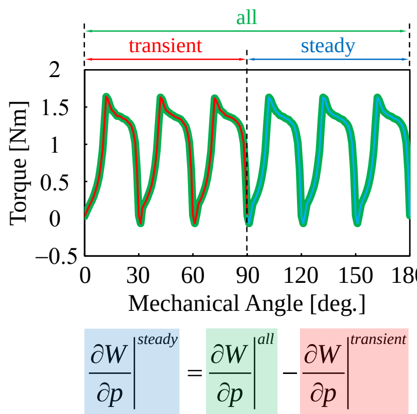


図 6　定常状態における設計感度の導出

（３）材料密度の定義

本論文では，設計変数 p を用いて材料密度を決定し，設計領域内の磁気抵抗率 ν を連続化ヘビサイド関数[10] $H(p)$ により，（24）式に従って更新する．

$$\nu = (1 - H(p))\nu_0 + H(p)\nu(|\boldsymbol{B}|) \qquad (24)$$

ここで，$\nu(|\boldsymbol{B}|)$は鉄芯の非線形磁気抵抗率を示す．ヘビサイド関数の定義を（25）式に示す．

$$H(p) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{p}{h}\right)^5 - \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{p}{h}\right)^3 + \dfrac{15}{16}\left(\dfrac{p}{h}\right) + \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \qquad (25)$$

ここで，h は設計領域内の最小遷移幅を示す．設計変数 p は$-h$ から h の値を取り，$-h$ では空気領域，h では鉄芯領域となる．図 7 にヘビサイド関数の遷移を示す．

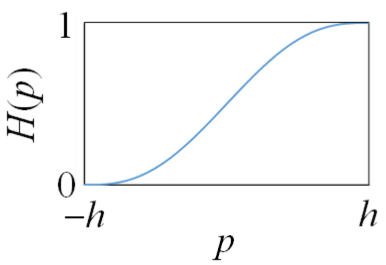
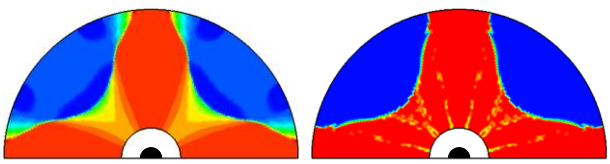


図 7　ヘビサイド関数

（４）密度法・レベルセット法連携手法

DM[11]による TO は LSM[12], [13]による TO と比較して自由度が高い設計が可能であるが，グレースケールを許容する形状に収束する．対して，LSM による TO ではグレースケールが材料界面のみとなるが，トポロジー変化が形状変化主体となり，比較的自由度が低い最適化となる．DM-LSM[14]はこれらの特性を生かす手法である．図 8 に DM の収束構造から LSM の初期構造への変換例，図 9 に DM-LSM による TO のフローチャートを示す．ここで，k_{DM} は DM の指定反復回数，k_{LSM} は LSM の指定反復回数を示す．また，LSM ではグレースケールを削減するために，遷移幅 h を決まった反復回数で減少させる．本論文では，h を表 2 に従って変化させる．ここで，w_e は設計領域における最小要素幅である．



（a）DM 収束構造　　（b）LSM 初期構造

図 8　LSM 初期形状への変換例

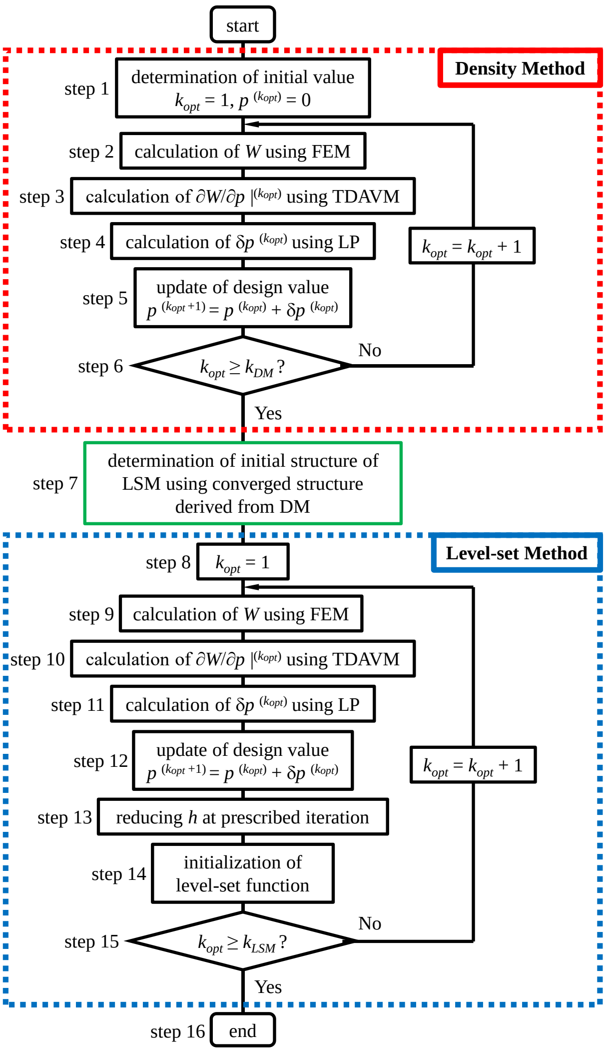


図 9　DM-LSM による TO のフローチャート

表 2　LSM における遷移幅 h の変化

h		
$1 \leq k_{opt} \leq 100$	$101 \leq k_{opt} \leq 200$	$201 \leq k_{opt} \leq 250$
$6w_e$	$3w_e$	w_e

３．解析モデルおよび最適化条件

図 10 に SRM の解析モデル, 図 11 に TDAVM の計算精度検証モデル, 図 12 に最適化モデルを示す. 節点数 20,377, 要素数 39,960 を有し, エアギャップを 1 mm に設定した. コア材料として 30JNE250 を適用し, シャフトの比透磁率を 1000 とした．図 10 ではロータ 4 極，ステータ 6 極を有す. 図 11 では節点 α, β は FDM と比較する節点を示す. 図 12 では鏡面境界条件を適用するため，斜線の領域を実際の設計領域とする．目的関数を定常状態の平均トルク最大化とし，トルク脈動の抑制を目的としてトルク最大値の制約条件を考慮した最適化問題を（26）式に示す．

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & W(p, \boldsymbol{X}) = t_a^{steady}(p, \boldsymbol{X}) \\ \text{s.t.} \quad & g_0 = t_{max}{}^2 - T_{max}{}^2 \leq 0 \end{aligned} \qquad (26)$$

ここで，$t_a^{steady}(p, X)$ は定常状態における平均トルク，t_{max}

はトルク最大値，T_{max} はトルク最大値の指定値である．表 3，表 4 に最適化の条件を示す．表 3 の N はモータの回転数を示す．表 4 は，スイッチング素子が短絡状態となるロータの機械角を示しており，case a では Ref.と同じ動作，case b 以降は Ref.から–1°から–5°まで制御を変化させ，最適化の比較を行う．図 13 は，Ref.においてスイッチング素子を切り替えるロータとステータの位置関係を示しており，ロータのポールとステータのティースの中心線が一致する機械角である． 本論文では，ロータが反時計方向に回転するため，case b 以降は中心線が一致する機械角まで回転せずにスイッチング素子が切り替わる動作になる．

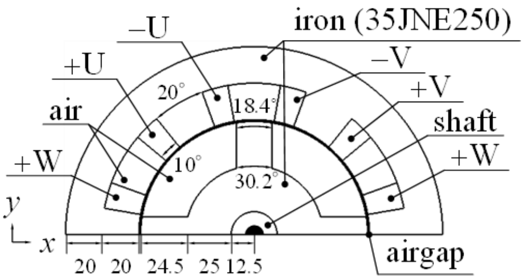


図 10　解析基準モデル

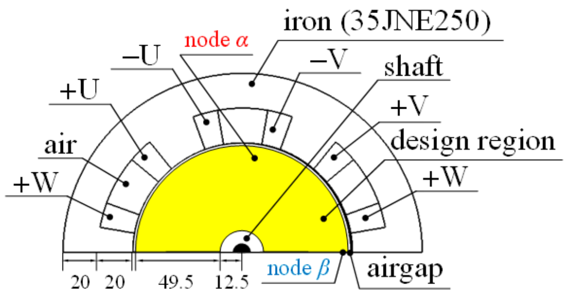


図 11　感度解析モデル

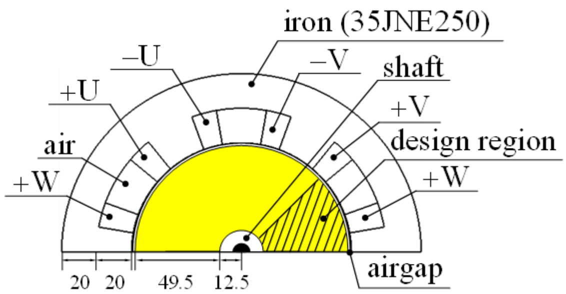


図 12　最適化モデル

表 3　最適化条件

l_z [mm]	w [turn]	e_0 [V]	R [Ω]	R_{total} [mΩ]	N [rpm]	k_{DM}	k_{LSM}	T_{max} [Nm]
60	50	150	10	1	1500	50	250	1.6

4． 最適化結果

図 14 に TDAVM と FDM による感度解析の比較を示す．TDAVM と FDM の結果を比較すると，最小相対誤差率が（a）では 3.71×10^{-3} %，（b）では 6.06×10^{-1} % となり，

表 4　最適化条件

case	Angle for U–phase [deg.]		Angle for V–phase [deg.]		Angle for W–phase [deg.]	
	$SW_{u1}(\theta)$	$SW_{u2}(\theta)$	$SW_{v1}(\theta)$	$SW_{v2}(\theta)$	$SW_{w1}(\theta)$	$SW_{w2}(\theta)$
Ref.	$0\le\theta<30$ $90\le\theta<120$		$30\le\theta<60$ $120\le\theta<150$		$60\le\theta<90$ $150\le\theta<180$	
a	$0\le\theta<30$ $90\le\theta<120$		$30\le\theta<60$ $120\le\theta<150$		$60\le\theta<90$ $150\le\theta<180$	
b	$0\le\theta<29$ $89\le\theta<119$ $179\le\theta<209$		$29\le\theta<59$ $119\le\theta<149$		$59\le\theta<89$ $149\le\theta<179$	
c	$0\le\theta<28$ $88\le\theta<118$ $178\le\theta<208$		$28\le\theta<58$ $118\le\theta<148$		$58\le\theta<88$ $148\le\theta<178$	
d	$0\le\theta<27$ $87\le\theta<117$ $177\le\theta<207$		$27\le\theta<57$ $117\le\theta<147$		$57\le\theta<87$ $147\le\theta<177$	
e	$0\le\theta<26$ $86\le\theta<116$ $176\le\theta<206$		$26\le\theta<56$ $116\le\theta<146$		$56\le\theta<86$ $146\le\theta<176$	
f	$0\le\theta<25$ $85\le\theta<115$ $175\le\theta<205$		$25\le\theta<55$ $115\le\theta<145$		$55\le\theta<85$ $145\le\theta<175$	

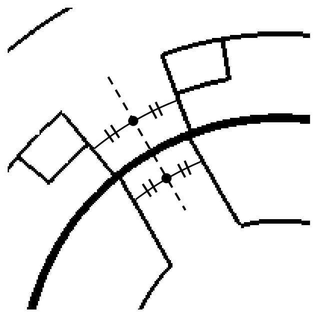


図 13　Ref.におけるスイッチング素子の切り替え

TDAVM の計算精度の妥当性を確認できた．

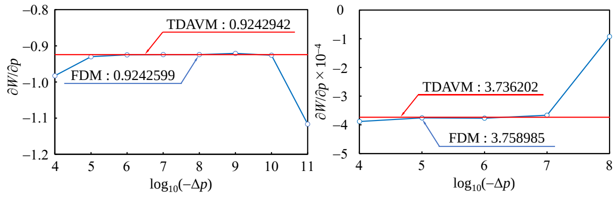
図 15 に最適化後の構造，図 16 に最適化後のトルク波形，表 5 に最適化後のトルク特性を示す．図 14 において，case a から case f にかけてロータのポールが太くなる構造となった．これは，スイッチング制御が前倒しになることで，リラクタンストルクが上昇することを抑制するためであると考えられる．図 16 では，case b 以降においてトルクの最小値が底上げされている．これは，前述の通り Ref.のスイッチング素子の切り替えは，ステータからロータにかけて通り抜ける磁束密度の磁路長が最短距離となる機械角であるため，リラクタンストルクが作用しなくなる．この切り替えの位置を前倒しことで，現在の相のトルクが残存している状態で，次の相からのリラクタンストルクが作用し，トルクを落とさずに運用できると考えられる．また，case c では，制約を超過してから空隙が導出された．図 17 に，定常状態のトルクが最大値となる機械角における Ref.と case c の磁束密度分布を示す．（a）および（b）は，W 相から U 相に切替わった状態であるが，（b）ではロータのポールが前述した理由で太いゆえに，U 相から W 相にかけて磁束密度が短絡するような分布となっている．この短絡によるリラクタンストルクは，Ref.のようにロータを直線的に貫くリラクタンストルクと比較して小さいことが予想される．そのため，空隙によりロータを直線的に貫かないようにすることで制約を満たそうとしたと考えられる．また，case d 以降では，

ロータのポールが十分太いために空隙を設けずに短絡が生じたと思われる．

表 5 よりトルク脈動は case c 以降，1.5 Nm を下回ることはなかった．また，スイッチング制御を–5° より変化させると制約を満たさなくなったため，–5° までの変化が効率改善における限界であると考えられる．

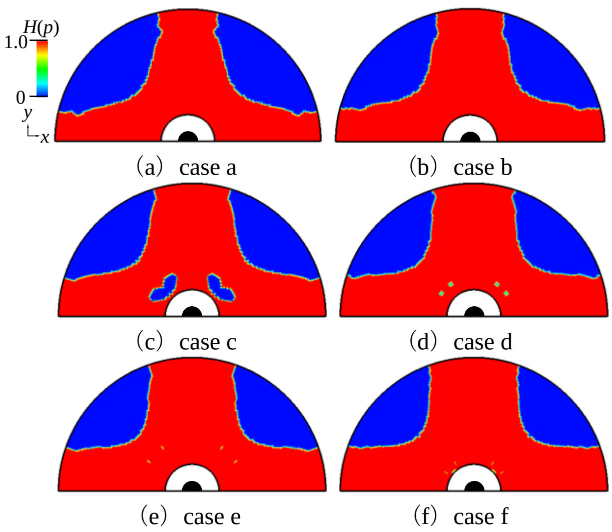
図 18 および表 6 に，結果を定量的に評価するため最適化後における平均トルクに対するトルク脈動の割合を示す．トルク脈動が減少し，平均トルクが上昇することでこの数値は減少するため，Ref.を下回るほど効率が良いことになる．図 18 および表 6 から，Ref.と case a が同様の値であるのに対し，case b 以降ではすべての結果が Ref.の効率を上回った．これは，上記で述べたトルクの極小値の上昇により，トルク脈動の抑制と平均トルクの上昇が引き起こされたためであると考えられる．

図 19 に，定常状態における U 相の巻線電流 i_{u2} を示す．すべての case において，Ref.の電流の大きさを大幅に下回り，電流波形が理想的な矩形波のように左右対称の傾向を示した．これは，図 20 に示すような最適化構造による磁束密度分布の違いによって引き起こされていると考えられる．図 20 は，スイッチング素子の切り替えから 10° 回転するごとに Ref.と case f の磁束密度分布を比較しており，（a），（c），（e）は Ref.の分布，（b），（d），（f）は case f の分布である．Ref.では，ロータのポールがステータのティースに接近するまで空気中に磁束密度が漏れるため，磁気抵抗の線形性が強く影響して誘導起電力が小さくなる．対して，最適化後ではロータのポールが太いため，前述したように異なる相で磁束密度の短絡が生じ，ステータからの磁束密度が鉄芯であるロータを常に経由することで磁気抵抗の非線形性が強くなり，誘導起電力が Ref.と比較して大きくなるため，Ref.の電流の大きさを下回ったと考えられる．これらの現象により，最適化構造では（b），（d），（f）のように磁束密度が一定量で推移し，左右対称の電流波形になったと推定される．



（a）node α　　（b）node β

図 14　TDAVM と FDM の感度比較

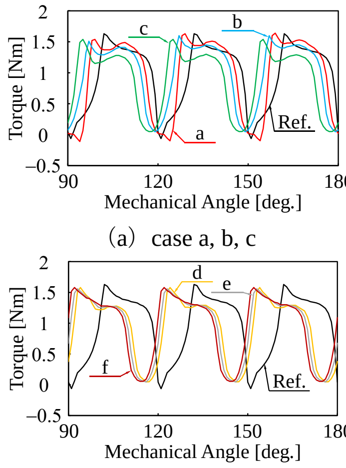


（a）case a　（b）case b

（c）case c　（d）case d

（e）case e　（f）case f

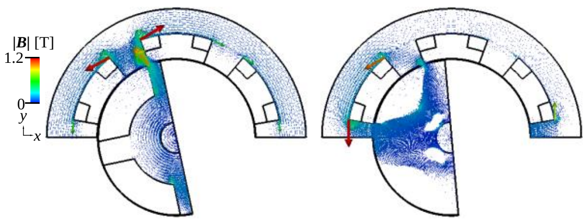
図 15　最適化構造



（a）case a, b, c

（b）case d, e, f

図 16　トルク波形



（a）Ref.　　（b）case c

図 17　磁束密度分布

表 5　トルク特性

case	Ref.	a	b	c	d	e	f
t_{ave} [Nm]	0.95	0.98	1.0	0.91	0.94	0.95	0.96
t_{rip} [Nm]	1.7	1.8	1.6	1.5	1.5	1.5	1.5

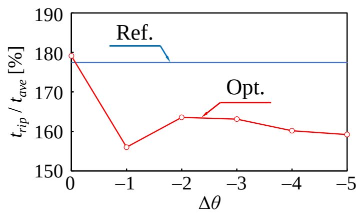
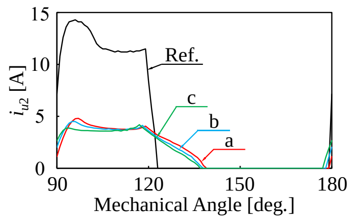


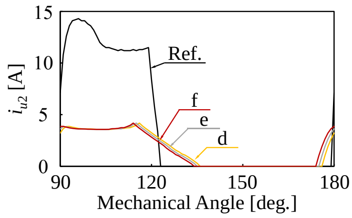
図 18　平均トルクに対するトルク脈動の割合

表 6　平均トルクに対するトルク脈動の割合

case	Ref.	a	b	c	d	e	f
t_{rip} / t_{ave} [%]	177	179	156	164	163	160	159

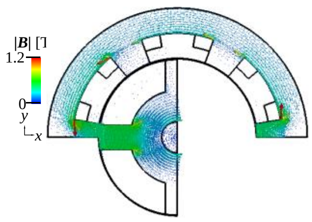


（a） case a, b, c

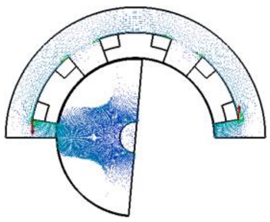


（b） case d, e, f

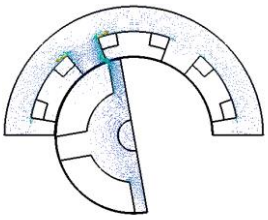
図 19　U 相巻線電流波形



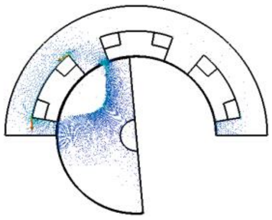
（a）　Ref., 90°



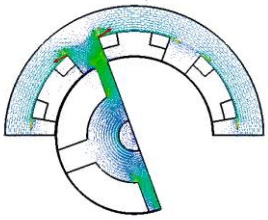
（b） case f, 85°



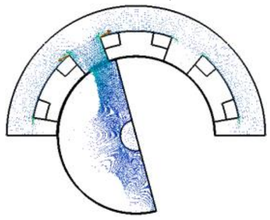
（c）　Ref., 100°



（d） case f, 105°



（e）　Ref., 110°



（f） case f, 115°

図 20　磁束密度分布

参考文献

1) IEA “World energy outlook 2016,” IEA (2016).

2) 的場太郎，寺山祐樹，星伸一：「ベクトル制御されたスイッチトリラクタンスモーターのトルクリプル抑制制御」，電気学会論文誌 D，Vol.141，No.8，pp.606-612 (2021).

3) 小嶋稜人，星伸一：「ベクトル制御されたスイッチトリラクタンスモータのラジアル力リプルも考慮したトルクリプル抑制制御」，電気学会研究会資料、MD-22-061/HCA-22-013 (2022).

4) M. P. Bendsøe, “Optimal shape design as a material distribution problem,” *Struct. Optim.*, vol. 1, pp. 193-202 (1989).

5) J. Lee, J. H. Seo and N. Kikuchi, “Topology optimization of switched reluctance motors for the desired torque profile,” *Struct. Optim.*, Vol. 42, pp. 783-796 (2010).

6) H. Zhang and S. Wang, “Topology Optimization of Rotor Pole in Switched Reluctance Motor for Minimum Torque Ripple,” *Electric Power Components and Systems*, Vol.45, No. 8, pp. 905-911 (2017).

7) I.-H. Park, I.-G. Kwak, H.-B. Lee, S.-Y. Hahn, and K.-S. Lee, “Design sensitivity analysis for transient eddy current problems using finite element discretization and adjoint variable method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 1242-1245 (1996).

8) 中田高義，高橋則雄：「電気工学の有限要素法」，森北出版（1986）

9) 浅野能成：「高効率モータ用磁性材料技術研究組合におけるモータ解析・設計の取り組み」，JSOL CORPORATION，JMAG Users Conference（2019）

10) Y. Yamashita and Y. Okamoto, “Design optimization of synchronous reluctance motor for reducing iron loss and improving torque characteristics using topology optimization based on the level-set method,” *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 56, No. 3, pp. 1-4 (2020).

11) J.–K. Byun, J. Lee, I.–H. Park, and H. Lee, “Inverse problem application of topology optimization method with mutual energy concept and design sensitivity,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1144-1147, Jul. (2000).

12) Y. Kim, J. Byun, and I. Park, “A Level Set Method for Shape Optimization of Electromagnetic Systems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1466-1469, Mar. (2009).

13) S. Yamasaki, S. Nishiwaki, T. Yamada, K. Izui, and M. Yoshimura, “A structural optimization method based on the level set method using a new geometry-based re-initialization scheme,” *Int. J. Number. Meth. Engng.*, vol. 83, pp. 1580-1624, Mar. (2010)

14) 山下祐輝，子田陸，片山一哉，岡本吉史：「密度法・レベルセット法の段階的使用による IPM モータのマルチマテリアル構造最適化」，電気学会論文誌 D 部門誌, vol. 141,　no. 9, pp. 729-737 (2021).