

Mean-Field Gameを用いた最適執行戦略における期待効用と資産価値の評価

NAKAMURA, Shunsuke / 中村, 俊介

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学研究科編

(巻 / Volume)

64

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2023-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00026443>

Mean-Field Game を用いた最適執行戦略における 期待効用と資産価値の評価

EVALUATION OF EXPECTED UTILITY AND ASSET VALUE WITH RESPECT TO OPTIMAL
EXECUTION STRATEGY USING MEAN-FIELD GAME

中村 俊介

Shunsuke NAKAMURA

指導教員 安田 和弘

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

We consider optimal strategies to maximize expected profits for traders. In our market, we assume 3 types of traders: the first one is a major trader whose purpose is liquidation of shares, the second one is minor traders whose purpose is only acquisition of profits, and the last one is noise traders who have no purpose. In derivation of optimal strategies of the major trader and minor traders, we use a mean-field game framework in order to grasp overall volumes of orders from minor traders based on [3]. In our numerical experiments, we implement each strategies using parameter values estimated from Japanese stock market data, and evaluate their expected utilities and the asset value at the maturity.

Key Words : Mean-field game, Optimal execution, Algorithm trading, High-frequency trading.

1. はじめに

近年、金融業界は計算、通信の技術発達に伴い、著しい発展を遂げてきた。元来、証券会社に電話で注文をいれていたところから、現在はインターネットを通じてボタン1つで注文完了である。証券業界全体を見渡しても、大手企業の顔ぶれこそ変わっていないが、新興のネット証券がすさまじい勢いで追撃中である。預かり資産についてはまだまだ差があるものの、新規口座開設数などのネット証券に追い抜かれている指標も出てきている。

この時代の波は個人の投資家だけに留まらず、機関投資家やファンドなど法人側にも押し寄せている。特にアルゴリズム取引の出現は業界に大きな影響を与えたと言っていいだろう。アルゴリズム取引とは、事前に構築したアルゴリズムにパラメータを入力し、あとは市場のデータを与えるだけで注文や注文取消などを自動的に計算機にさせる取引手法である。特に「高頻度取引」と呼ばれる超高速取引と相性がよく、既に人間が対応できるスピードをはるかに越えている。この高頻度取引を行う業者の増加は、フラッシュクラッシュ等の懸念材料がある一方で、流動性の増加やスプレッドの縮小などの効用が生まれたと述べている論文もある。

また、アルゴリズム取引が有用な他の例として、最適執行が挙げられる。この最適執行については、大量発注を行う機関投資家が主な使用者である。1度の発注では市場が吸収しきれない、または株価を大きく変動させる量の注文に対して、損失を最小限に抑えるために用いられる手法である。具体的には、市場の状況を見極めたうえで注文を小出しに行い、複数回に分けて執行を行う。本稿では [3] を参考に最適執行戦略の導出を行い、戦略の検証や他の戦略との比較、最後には

日本株市場を想定しての数値実験を行う。

2. 最適執行問題

本節では、[3] を参考に mean-field game フレームワーク (MFG) を用いた最適執行戦略の導出を行う。戦略の導出にあたり、3種類の市場参加者がいると仮定する。1種類目は「メジャートレーダー」である。機関投資家を想定し、保有株売却を目指すトレーダーである。2種類目は「マイナートレーダー」である。高頻度取引業者を想定し、利益獲得のみを目的として保有する。3種類目は「ノイズトレーダー」である。一般の個人投資家及び、投機筋を想定する。特に取引目的は保有していない。

彼ら3種類のトレーダーの関係性は次の図の通りである。

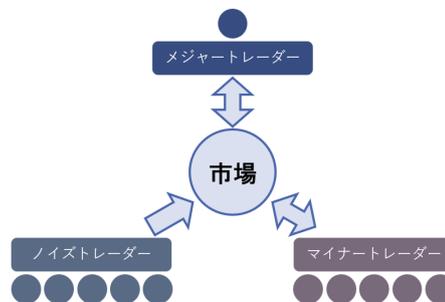


図1 トレーダー関係図 ([3] を参考に著者作製)

まずメジャートレーダーだが、市場には1人しかいないと仮定する。市場に注文などを行って働きかけられると同時に、市場から情報を手に入れることも可能である。この入手

可能な情報には、ノイズトレーダーやマイナートレーダーの動きが含まれている。次にマイナーレーダーについてだが、マイナートレーダー自身は市場に N 人いると想定する。メジャートレーダーと同様に市場とは双方向にやりとりが可能である。最後にノイズトレーダーについてであるが、ノイズトレーダー自身も市場には複数いると仮定する。市場に対しては注文等の一方的な働きかけしかできず、市場から情報を受け取って活用することはない。

ここからは、戦略導出に向けて各トレーダーの動きを定式化するにあたり、取引環境の構築を行う。満期の表記について $T \in (0, \infty)$ とし、取引時間は $\mathfrak{T} := [0, T]$ とする。各トレーダー個人の表記については文字 i を使用する。ただし、個々の識別が必要なのはメジャートレーダーとマイナートレーダーであり、メジャートレーダーについては 1 人なので $i = 0$ 、マイナートレーダーについては $i \in \mathfrak{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ とする。今後問題の定式化にあたって、1 次元ブラウン運動については表記を $B = (B_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ 、ノイズトレーダーの注文過程については表記を $\mu = (\mu_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ とし、完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \in \mathfrak{T}}, \mathbb{P})$ 上で定義されるものとする。メジャートレーダーの在庫については q 、マイナートレーダー i の在庫については q_i 、マイナートレーダー群の平均在庫については y 、ノイズトレーダーの注文量については u と表記する。また、全トレーダーの使用できる注文手法は成行注文のみである。

(1) メジャートレーダーのダイナミクス

本節ではメジャートレーダーのダイナミクスについて定式化を行う。まずは流動化過程と在庫過程について以下のように定式化する。

$$dQ_{0,t}^{v_0} = v_{0,t} dt, \quad Q_{0,0}^{v_0} = Q_{0,0}, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで、 v_0 はメジャートレーダーの戦略、 $Q_{0,t}^{v_0}$ は在庫過程、 $v_{0,t}$ は流動化過程である。流動化過程 $v_{0,t}$ について、値が正の数であれば買い注文、負の数であれば売り注文となる。

次に、約定価格について考える。メジャートレーダーとマイナートレーダー全員の戦略を $v := \{v_0, (v_i)_{i \in \mathfrak{N}}\}$ と表記することにし、株価の表記を F_t^v とすると、メジャートレーダーの約定価格 $S_{0,t}^v$ は次の式で表される。

$$S_{0,t}^v = F_t^v + a_0 v_{0,t}, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで a_0 については一時的市場インパクトを表し、 $a_0 \geq 0$ であるとする。従って売り注文の場合は約定価格は株価よりも下がり、買い注文の場合は約定価格より上がることになる。

最後に、現金過程 $X_{0,t}^{v_0}$ について以下の式で定式化する。

$$X_{0,t}^{v_0} = x_0 - \int_0^t S_{0,s}^v v_{0,s} ds, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで、 x_0 は時刻 0 でメジャートレーダーが保有する現金である。ただし、今後の議論に特段影響を与えるものではないので、今後の議論では基本的に $x_0 = 0$ として扱っていく。

(2) マイナートレーダーのダイナミクス

本節ではマイナートレーダー i のダイナミクスについて定式化を行う。まずは流動化過程と在庫過程について以下のように定式化する。

$$dQ_{i,t}^{v_i} = v_{i,t} dt, \quad Q_{i,0}^{v_i} = Q_{i,0}, \quad i \in \mathfrak{N}, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで、 v_i はマイナートレーダー i の戦略、 $Q_{i,t}^{v_i}$ は在庫過程、 $v_{i,t}$ は流動化過程である。

次に、約定価格について考える。マイナートレーダー i の約定価格 $S_{i,t}^v$ は次の式で表される。

$$S_{i,t}^v = F_t^v + a v_{i,t}, \quad i \in \mathfrak{N}, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで a については一時的市場インパクトを表し、 $a \geq 0$ であるとする。マイナートレーダーについては全員同じ一時的市場インパクトを保有するものとし、メジャートレーダーの一時的市場インパクトとの関係性については $a \leq a_0$ という関係を持つものとする。これは、マイナートレーダーは高頻度取引を行うトレーダーを想定していることから、板情報等のメジャートレーダーよりも詳細な情報を活用して注文を行っているという仮定からくるものである。

最後に、現金過程 $X_{i,t}^{v_i}$ について以下の式で定式化する。

$$X_{i,t}^{v_i} = x_i - \int_0^t S_{i,s}^v v_{i,s} ds, \quad i \in \mathfrak{N}, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで、 x_i は時刻 0 でマイナートレーダー i が保有する現金である。ただし、マイナートレーダーもメジャートレーダーと同様に基本的には $x_i = 0$ として扱っていく。

(3) ノイズトレーダーのダイナミクス

本節ではノイズトレーダーのダイナミクスについて定式化を行う。ノイズトレーダーの注文過程は以下の確率微分方程式 (SDE) で表されるとする。

$$d\mu_t = -\kappa \mu_t dt + \eta^+ dJ_t^+ - \eta^- dJ_t^-$$

ここで、 κ は平均回帰率、 η^\pm はジャンプサイズ、 J^\pm は強度 λ^\pm に従うポアソン過程とする。

[3] では拡張は容易としながらも $\eta^+ = \eta^-$ 、 $\lambda^+ = \lambda^-$ と仮定して戦略の導出を行っているが、本稿ではその仮定を取り払い戦略の導出を行う。そのための道具として補正ポアソン過程 \hat{N}_t を次のように定義する。

$$\hat{N}_t = N_t - \lambda t.$$

この \hat{N}_t はジャンプ項を含んだマルチンゲール過程である。

(4) 株価過程

本節では株価過程について定式化を行う。株価過程については以下の SDE で表されるとする。

$$dF_t^v = \left(\lambda_0 v_{0,t} + \lambda v_t^{(N)} + \lambda_\mu \mu_t \right) dt + \sigma dB_t, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

ここで、株価の初期値 F_0^v については F_0 で与えられ、 λ_0 、 λ 、 λ_μ についてはそれぞれのトレーダーが持つ恒久的市場インパクトであり、 $\lambda_0, \lambda, \lambda_\mu \geq 0$ とする。また、 $v^{(N)}$ については全てのマイナートレーダーの平均取引量を示す。

(5) 評価関数

本節では評価関数についてメジャートレーダーとマイナートレーダーのそれぞれで定式化を行う。メジャートレーダーの評価関数は以下の式で表されるとする。

$$J_0(v_0; v_{-0}) := \mathbb{E} \left[X_{0,T}^{v_0} + Q_{0,T}^{v_0} (F_T^v - \alpha Q_{0,T}^{v_0}) - \phi \int_0^T (Q_{0,s}^{v_0})^2 ds \right].$$

ここで、 v_{-0} はメジャートレーダー以外の全てのトレーダーの執行戦略を指す。また、 α と ϕ については正の定数である。

右辺の各項については、第1項は満期で保有する現金、第2項は満期で保有する在庫の評価額、第3項は取引過程におけるペナルティを指す。

次に、マイナートレーダーの評価関数は以下の式で表されるとする。

$$J_i(v_i; v_{-i}) := \mathbb{E} [X_{i,T}^{v_i} + Q_{i,T}^{v_i} (F_T^v - \psi Q_{i,T}^{v_i})], \quad i \in \mathcal{N}.$$

ここで、 v_{-i} はマイナートレーダー*i*以外の全てのトレーダーの執行戦略を指す。また、 ψ については正の定数である。右辺の各項の説明については、メジャートレーダーの評価関数の第1項、第2項と同様なのでここでは割愛する。

(6) Mean-Field Game フレームワーク

ここまで各トレーダーのダイナミクスを定式化してきたが、これらを現実にも照らし合わせた時、全ての要素を確率制御情報として入手し、入力するのは極めて困難である。特にマイナートレーダーについては*N*人存在し、これら全員の情報となると膨大な情報量になる。そこでMFGを使用し、マイナートレーダーを個別の動きで捉えるのではなく全体の平均取引量を捉えてここまで定式化したダイナミクスに組み込んでいく。

まずは最初の段階として、マイナートレーダー全体の取引量と在庫量の平均を次のように表す。

$$\bar{v}_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{i,t},$$

$$\bar{Q}_t^{\bar{v}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_{i,t}^{v_i}.$$

さらに平均取引量 \bar{v}_t については次の式で近似できるものとする。

$$\bar{v}_t = g_0(t) + g_1(t)Q_{0,t}^{v_0} + g_2(t)\bar{Q}_t^{\bar{v}} + g_3(t)\mu_t \quad (1)$$

ここで、関数 $g_0(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ は連続で確定的な関数である。これらを用いた上で各トレーダーのダイナミクスを再構築する。まず、メジャートレーダーのダイナミクスを再構築すると次のようになる。

$$\begin{aligned} dQ_{0,t}^{v_0} &= v_{0,t}dt, & Q_{0,0}^{v_0} &= Q_{0,0}, \\ dQ_{0,t}^{\bar{v}} &= d\bar{v}_t dt, & Q_{0,0}^{\bar{v}} &= Q_0, \\ d\bar{F}_t^{v_0, \bar{v}} &= (\lambda_0 v_{0,t} + \lambda \bar{v}_t + \lambda \mu_t)dt + \sigma dB_t, & \bar{F}_0^{v_0, \bar{v}} &= F_0, \\ d\bar{X}_{0,t}^{v_0} &= -(\bar{F}_t^{v_0, \bar{v}} + a_0 v_{0,t})v_{0,t}dt, & \bar{X}_{0,0}^{v_0} &= x_0, \\ \bar{J}_0(v_0, \bar{v}) & \\ &:= \mathbb{E} \left[\bar{X}_{0,T}^{v_0} + Q_{0,T}^{v_0} (\bar{F}_T^{v_0, \bar{v}} - \alpha Q_{0,T}^{v_0}) - \phi \int_0^T (Q_{0,s}^{v_0})^2 ds \right]. \end{aligned}$$

次にマイナートレーダーについてだが、メジャートレーダーが既に最適執行戦略 v_0^* を導出しており、マイナートレーダーはそれを把握しているものとしてダイナミクスの再構築を行う。

$$\begin{aligned} dQ_{i,t}^{v_i} &= v_{i,t}dt, & Q_{i,0}^{v_i} &= Q_{i,0}, \\ d\bar{F}_t^{v_i^*, \bar{v}} &= (\lambda_0 v_{i,t} + \lambda \bar{v}_t + \lambda \mu_t)dt + \sigma dB_t, & \bar{F}_0^{v_i^*, \bar{v}} &= F_0, \\ d\bar{X}_{i,t}^{v_i} &= -(\bar{F}_t^{v_i^*, \bar{v}} + a v_{i,t})v_{i,t}dt, & \bar{X}_{i,0}^{v_i} &= x_i, \\ \bar{J}_i(v_i, \bar{v}) &:= \mathbb{E} \left[\bar{X}_{i,T}^{v_i} + Q_{i,T}^{v_i} (\bar{F}_T^{v_i^*, \bar{v}} - \psi Q_{i,T}^{v_i}) \right]. \end{aligned}$$

3. 最適執行戦略の導出

本節では前節で定式化した両トレーダーのダイナミクスを用いて最適執行戦略の導出を行っていく。

(1) Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

戦略の導出にあたり Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (HJB 方程式) が必要だが、その導出の詳細については本論文で述べるとして、この紀要ではその結果のみ示すことにする。導出は [2] を参考にしている。

ここからは時間ドメインについては常に $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ であるとし、脱出時刻 $T > 0$ を固定する。まずは、以下のような一般的な値関数を仮定する。

$$H(x) = \sup_{v \in \mathcal{A}_{0,T}} \mathbb{E} \left[G(X_T^v) + \int_0^T F(s, X_s^v, v_s) ds \right]. \quad (2)$$

ここで関数について、 $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathcal{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ である。また、 v を \mathbb{F} -可予測で非負有界な確率過程であるとし、戦略と呼ぶ。時間について $t \in [0, T]$ の時、 $\mathcal{A}_{t,T}$ を $[t, T]$ 上で定義された全ての戦略の集合とする。戦略 $v = \{v_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ に対して1次元拡散過程 $\{X_t^v\}_{t \in \mathcal{T}}$ を以下のSDEの解と定義する。

$$\begin{aligned} dX_t^v &= \mu(t, X_t^v, v_t)dt + \sigma(t, X_t^v, v_t)dB_t + \gamma(t, X_t^v, v_t)dN_t, \\ X_0^v &= x. \end{aligned}$$

ここで B_t はブラウン運動、 N_t は強度 λ のポアソン過程であり、 $\mu, \sigma, \gamma: \mathcal{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ である。また、時刻 t でのジャンプについて

$$\Delta H(t, x) = H(t, x + \gamma(t, x, v)) - H(t, x)$$

と表記することにする。

この時、式 (2) を満たす戦略 v を得るための HJB 方程式は、次の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t, X_t^v) + \sup_{v \in \mathcal{A}} \{ \mathcal{L}_t^v H(t, X_t^v) + F(t, X_t^v, v_t) \} = 0, \quad (3)$$

$$H(T, x) = G(x).$$

ただし、

$$\mathcal{L}_t^v = \mu(t, X_{t-}^v, v_t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} (\sigma(t, X_{t-}^v, v_t))^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \Delta.$$

(2) メジャートレーダーの最適執行戦略

本節ではメジャートレーダーの最適執行戦略の導出を行う。まずは評価関数について条件付き期待値を用いて次のように再定義する。

$$\begin{aligned} H_0(t, x, f, q, y, u) & \\ &= \sup_{v_0 \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E}_{t,x,f,q,y,u} \left[\bar{X}_{0,T}^{v_0} + Q_{0,T}^{v_0} (\bar{F}_T^{v_0, \bar{v}} - \alpha Q_{0,T}^{v_0}) \right. \\ &\quad \left. - \phi \int_0^T (Q_{0,s}^{v_0})^2 ds \right]. \end{aligned}$$

この時、この問題に対する HJB 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_0(t, \mathbf{X}_t^{v_0}) + \sup_{v_0 \in \mathcal{A}_0} \mathcal{L}_t^{v_0} H_0(t, \mathbf{X}_t^{v_0}) - \phi q^2 &= 0, \\ H_0(T, \mathbf{x}) &= x + fq - \alpha q^2. \end{aligned}$$

ここで、 \mathcal{A}_0 はメジャートレーダーが取り得る全ての戦略の集合である。

ここからは HJB 方程式を解いていく。まずは sup を満たす v_0^* を見つけるために、 $\mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0$ について計算する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0 = & v_{0,t} \frac{\partial H_0}{\partial q} + \bar{v}_t \frac{\partial H_0}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial H_0}{\partial u} + \mathcal{L}^\mu H_0 \\ & - (f + a_0 v_{0,t}) v_{0,t} \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ & + (\lambda_0 v_{0,t} + \lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) \frac{\partial H_0}{\partial f} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial f^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 \mathcal{L}^μ については次の通りである。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\mu H_0 = & \lambda^+ (H(t, X_{t-}^{v_0^*} + \eta^+) - H(t, X_{t-}^{v_0^*})) \\ & + \lambda^- (H(t, X_{t-}^{v_0^*} - \eta^-) - H(t, X_{t-}^{v_0^*})). \end{aligned}$$

式 (4) は $v_{0,t}$ に関して 2 次の係数が負の 2 次関数であることから、 $v_{0,t}$ で微分を行い、イコール 0 となる点を求めれば $\mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0$ を最大化させる $v_{0,t}^*$ の値を求めることが出来る。従って $v_{0,t}^*$ は次のようになる。

$$v_{0,t}^* = \frac{\frac{\partial H_0}{\partial q} + \lambda_0 \frac{\partial H_0}{\partial f} - f \frac{\partial H_0}{\partial x}}{2a_0 \frac{\partial H_0}{\partial x}}.$$

これにて値関数の微分を用いての最適流動化速度を求めることができた。ここからは微分の解消を目指して計算を続ける。まずは $\mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0$ に $v_{0,t}^*$ を代入した $\mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0 = & \bar{v}_t \frac{\partial H_0}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial H_0}{\partial u} + \mathcal{L}^\mu H_0 \\ & + (\lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) \frac{\partial H_0}{\partial f} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial f^2} \\ & + \frac{1}{4a_0 \frac{\partial H_0}{\partial x}} \left(\lambda_0 \frac{\partial H_0}{\partial f} + \frac{\partial H_0}{\partial q} - f \frac{\partial H_0}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

さらに先ほど求めた $\mathcal{L}_t^{v_0^*} H_0$ を用いて HJB 方程式を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial t} + \bar{v}_t \frac{\partial H_0}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial H_0}{\partial u} + \mathcal{L}^\mu H_0 \\ + (\lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) \frac{\partial H_0}{\partial f} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial f^2} \\ + \frac{\left(\lambda_0 \frac{\partial H_0}{\partial f} + \frac{\partial H_0}{\partial q} - f \frac{\partial H_0}{\partial x} \right)^2}{4a_0 \frac{\partial H_0}{\partial x}} - \phi q^2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$H_0(T, \mathbf{x}) = x + fq - \alpha q^2. \quad (6)$$

これにて HJB 方程式を sup のない形で表すことができた。

ここからは関数 H_0 の形状に仮定を置きながら微分の解消を目指して計算を行っていく。HJB 方程式の終端条件である式 (6) を見ると、第 1 項は手持ちの現金、第 2 項は在庫の市場価値、第 3 項は流動化の戦略によって決まる補正金額からなっていることが分かる。そこで、 $t \in \mathfrak{T}$ に対して $H_0(t, \mathbf{x})$ が以下のような形をしていると仮定する。

$$H_0(T, x, f, q, y, u) = x + fq + h(t, q, y, u).$$

ただし、 $h(t, q, y, u)$ の t に関する終端条件は次の通りである。

$$h(T, q, y, u) = -\alpha q^2. \quad (7)$$

さらに、式 (7) より、関数 $h(t, q, y, u)$ は少なくとも q について 2 次関数であることが分かる。従って q については次のように関数の形を仮定できる。

$$h(t, q, y, u) = h_0(t, y, u) + h_1(t, y, u)q + h_2(t)q^2.$$

ここまで置いた仮定を用いて式 (5) の微分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (h_0 + qh_1 + q^2 h_2) + \bar{v}_t \frac{\partial}{\partial y} (h_0 + qh_1) \\ & - \kappa \mu_t \frac{\partial}{\partial u} (h_0 + qh_1) + \mathcal{L}^\mu H_0 \\ & + (\lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) q + \frac{\{(\lambda_0 + 2h_2)q + h_1\}^2}{4a_0} - \phi q^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、ここで $\mathcal{L}^\mu H_0$ は次の形となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\mu H_0 = & \lambda^+ (h_0(t, y, u + \eta^+) + h_1(t, y, u + \eta^+)q) \\ & + \lambda^- (h_0(t, y, u - \eta^-) + h_1(t, y, u - \eta^-)q) \\ & - (\lambda^+ + \lambda^-) (h_0(t, y, u) + h_1(t, y, u)q) \end{aligned}$$

また、最適流動化速度 $v_{0,t}^*$ についても次のように求められる。

$$v_{0,t}^* = \frac{h_1(t, y, u) + (\lambda_0 + 2h_2(t))q}{2a_0}. \quad (9)$$

式 (9) より、 $v_{0,t}^*$ を求めるには $h_1(t, y, u)$ と $h_2(t)$ を求める必要がある。そこで、 \bar{v} について式 (1) を用いて展開したうえで、式 (8) から q に関する偏微分方程式 (PDE) を求めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (g_0(t) + g_2(t)y + g_3(t)u) \frac{\partial}{\partial y} - \kappa u \frac{\partial}{\partial u} \right\} h_0 \\ & + \frac{1}{4a_0} (h_1)^2 + \lambda^+ h_0(t, y, u + \eta^+) \\ & + \lambda^- h_0(t, y, u - \eta^-) - (\lambda^+ + \lambda^-) h_0(t, y, u) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (g_0(t) + g_2(t)y + g_3(t)u) \frac{\partial}{\partial y} - \kappa u \frac{\partial}{\partial u} \right\} h_1 \\ & + g_1(t) \frac{\partial}{\partial y} h_0 + \lambda (g_0(t) + g_2(t)y + g_3(t)u) + \lambda_\mu u \\ & + \frac{(\lambda_0 + 2h_2)h_1}{2a_0} + \lambda^+ h_1(t, y, u + \eta^+) \\ & + \lambda^- h_1(t, y, u - \eta^-) - (\lambda^+ + \lambda^-) h_1(t, y, u) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 + g_1(t) \frac{\partial}{\partial y} h_1 + \lambda g_1(t) + \frac{(\lambda_0 + 2h_2)^2}{4a_0} - \phi = 0.$$

ただし、終端条件について $h_0(T, y, u) = h_1(T, y, u) = 0$, $h_2(T) = -\alpha$ である。

さらに、関数 $h_0(t, y, u)$, $h_1(t, y, u)$ について以下のような仮定を置く。

$$\begin{aligned} h_0(t, y, u) = & h_0^0(t) + h_0^{1,y}(t)y + h_0^{2,y}(t)y^2 \\ & + h_0^{1,u}(t)u + h_0^{2,u}(t)u^2 + h_0^{y,u}(t)yu, \\ h_1(t, y, u) = & h_1^0(t) + h_1^y(t)y + h_1^u(t)u. \end{aligned}$$

この時、各関数について時刻 t に関する常微分方程式 (ODE) を導くことができる。はじめに、式 (10) から導かれる ODE

は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} h_0^0 + g_0 h_0^{1,y} + \frac{1}{4a_0} (h_1^0)^2 + \eta_1 h_0^{1,u} + \eta_2 h_0^{2,u} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_0^{1,y} + 2g_0 h_0^{2,y} + g_2 h_0^{1,y} + \frac{1}{2a_0} h_1^0 h_1^y + \eta_1 h_0^{y,u} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_0^{2,y} + 2g_2 h_0^{2,y} + \frac{1}{4a_0} (h_1^y)^2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_0^{1,u} + g_0 h_0^{y,u} + g_3 h_0^{1,y} - \kappa h_0^{1,u} + \frac{1}{2a_0} h_1^0 h_1^u + 2\eta_1 h_0^{2,u} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_0^{2,u} + g_3 h_0^{y,u} - 2\kappa h_0^{2,u} + \frac{1}{4a_0} (h_1^u)^2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_0^{y,u} + g_2 h_0^{y,u} + 2g_3 h_0^{2,y} - \kappa h_0^{y,u} + \frac{1}{2a_0} h_1^y h_1^u &= 0.\end{aligned}$$

ただし、いずれの関数も終端条件は 0 である。また、 η_1 と η_2 については次の通りである。

$$\eta_1 = \lambda^+ \eta^+ - \lambda^- \eta^-, \quad \eta_2 = \lambda^+ (\eta^+)^2 + \lambda^- (\eta^-)^2.$$

式 (11) から導かれる ODE は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} h_1^0 + g_0 (h_1^y + \lambda) + \eta h_1^u + g_1 h_0^{1,y} + \frac{\lambda_0 + 2h_2}{2a_0} h_1^0 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_1^y + g_2 (h_1^y + \lambda) + 2g_1 h_0^{2,y} + \frac{\lambda_0 + 2h_2}{2a_0} h_1^y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_1^u + g_3 (h_1^y + \lambda) - \kappa h_1^u + g_1 h_0^{y,u} + \lambda_\mu + \frac{\lambda_0 + 2h_2}{2a_0} h_1^u &= 0.\end{aligned}$$

ただし、いずれの関数も終端条件は 0 である。

以上より、これらの ODE を解くことでメジャートレーダーの最適執行戦略を求めることができる。

(3) マイナートレーダーの最適執行戦略

本節ではマイナートレーダーの最適執行戦略の導出を行う。前述してあるが、既にメジャートレーダーの最適執行戦略は求められており、それをマイナートレーダーは把握している前提で、戦略を導出していく。まずは評価関数について条件付き期待値を用いて次のように再定義する。

$$\begin{aligned}H_i(t, x, f, q, q_i, y, u) \\ = \sup_{v_i \in \mathcal{A}_i} \mathbb{E}_{t,x,f,q,q_i,y,u} \left[\bar{X}_{i,T}^{v_i} + Q_{i,T}^{v_i} \left(\bar{F}_T^{v_i^0, \bar{v}} - \psi Q_{i,T}^{v_i} \right) \right].\end{aligned}$$

この時の HJB 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} H_i(t, \mathbf{X}_t^{v_i}) + \sup_{v_i \in \mathcal{A}_i} \mathcal{L}_i^{v_i} H_i(t, \mathbf{X}_t^{v_i}) &= 0, \\ H_i(T, \mathbf{x}) &= x + f q_i - \psi q_i^2.\end{aligned}$$

ここで、 \mathcal{A}_i はマイナートレーダー i が取り得る全ての戦略の集合である。

ここからは HJB 方程式を解いていく。まずは sup を満たす v_i^* を見つけるために、 $\mathcal{L}_i^{v_i} H_i$ について計算する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i^{v_i} H_i = v_{0,t}^* \frac{\partial H_i}{\partial q} + v_{i,t} \frac{\partial H_i}{\partial q_i} + \bar{v}_t \frac{\partial H_i}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial H_i}{\partial u} \\ + \mathcal{L}^\mu H_i - (f + a v_{i,t}) v_{i,t} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ + (\lambda_0 v_{0,t} + \lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) \frac{\partial H_i}{\partial f} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial f^2}.\end{aligned}\quad (12)$$

式 (12) は v_i に関して 2 次の係数が負の 2 次関数であることから、 v_i で微分を行い、イコール 0 となる点を求めれば

$\mathcal{L}_i^{v_i} H_i$ を最大化させる v_i^* の値を求めることができる。従って v_i^* は次のようになる。

$$v_{i,t}^* = \frac{\frac{\partial H_i}{\partial q_i} - f \frac{\partial H_i}{\partial x}}{2a \frac{\partial H_i}{\partial x}}.$$

これにて値関数の微分を用いて最適流動化速度を求めることができた。ここからは微分の解消を目指して計算を続ける。まずは $\mathcal{L}_i^{v_i^*} H_i$ に v_i^* を代入した $\mathcal{L}_i^{v_i^*}$ を求める。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i^{v_i^*} H_i = v_{0,t}^* \frac{\partial H_i}{\partial q} + \bar{v}_t \frac{\partial H_i}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial H_i}{\partial u} + \mathcal{L}^\mu H_i \\ + (\lambda_0 v_{0,t} + \lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) \frac{\partial H_i}{\partial f} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial f^2} \\ + \frac{1}{4a \frac{\partial H_i}{\partial x}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial q_i} - f \frac{\partial H_i}{\partial x} \right)^2.\end{aligned}$$

さらに先ほど求めた $\mathcal{L}_i^{v_i^*}$ を用いて HJB 方程式を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial t} + v_{0,t}^* \frac{\partial H_i}{\partial q} + \bar{v}_t \frac{\partial H_i}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial H_i}{\partial u} + \mathcal{L}^\mu H_i \\ + (\lambda_0 v_{0,t}^* + \lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) \frac{\partial H_i}{\partial f} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial f^2} \\ + \frac{\left(\frac{\partial H_i}{\partial q_i} - f \frac{\partial H_i}{\partial x} \right)^2}{4a \frac{\partial H_i}{\partial x}} = 0,\end{aligned}\quad (13)$$

$$H_i(T, x, f, q, q_i, y, u) = x + f q_i - \psi q_i^2.\quad (14)$$

これにて HJB 方程式を sup が無い形で表すことができた。ここからは関数 H_i の形状に仮定を置きながら微分の解消を目指す。

HJB 方程式の終端条件である式 (14) を見ると、第 1 項は手持ちの現金、第 2 項は在庫の市場価値、第 3 項は流動化の戦略によって決まる補正金額からなっていることが分かる。そこで、 $t \in \mathcal{T}$ に対して $H_i(t, \mathbf{x})$ が以下のような形をしていると仮定する。

$$H_i(T, x, f, q, y, u) = x + f q + l(t, q, q_i, y, u).$$

ただし、 $l(t, q, q_i, y, u)$ の t に関する終端条件は次の通りである。

$$l(T, q, q_i, y, u) = -\psi q_i^2.\quad (15)$$

さらに、式 (15) より、関数 $l(t, q, q_i, y, u)$ は少なくとも q_i について 2 次関数であることが分かる。従って q_i については次のように関数の形を仮定することができる。

$$l(t, q, q_i, y, u) = l_0(t, q, y, u) + l_1(t, q, y, u) q_i + l_2(t) q_i^2.$$

ここまで書いた仮定を用いて式 (13) の微分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (l_0 + q_i l_1 + q_i^2 l_2) + v_{0,t}^* \frac{\partial}{\partial q} (l_0 + q_i l_1) \\ + \bar{v}_t \frac{\partial}{\partial y} (l_0 + q_i l_1) - \kappa \mu_t \frac{\partial}{\partial u} (l_0 + q_i l_1) \\ + (\lambda_0 v_{0,t}^* + \lambda \bar{v}_t + \lambda_\mu \mu_t) q_i + \frac{1}{4a} (l_1 + 2q_i l_2)^2 = 0.\end{aligned}\quad (16)$$

ただし、ここで $\mathcal{L}^\mu H_i$ は次の形となる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\mu H_i = \lambda^+ (l_0(t, q, y, u + \eta^+) + l_1(t, q, y, u + \eta^+) q_i) \\ + \lambda^- (l_0(t, q, y, u - \eta^-) + l_1(t, q, y, u - \eta^-) q_i) \\ - (\lambda^+ + \lambda^-) (l_0(t, q, y, u) - l_1(t, q, y, u) q_i)\end{aligned}$$

また、最適流動化速度 $v_{i,t}^*$ は次のように求められる。

$$v_{i,t}^* = \frac{l_1 + 2l_2q_i}{2a}. \quad (17)$$

式 (17) より、 $v_{i,t}^*$ を求めるには $l_1(t, q, y, u)$ と $l_2(t)$ を求める必要がある。そこで、式 (16) から q_i に関する PDE を求めると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_{0,t}^* \frac{\partial}{\partial q} + \bar{v}_t \frac{\partial}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial}{\partial u} \right\} l_0 + \frac{(l_1)^2}{4a} \\ & + \lambda^+ l_0(t, q, y, u + \eta^+) + \lambda^- l_0(t, q, y, u - \eta^-) \\ & - (\lambda^+ + \lambda^-) l_0(t, q, y, u) = 0, \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_{0,t}^* \frac{\partial}{\partial q} + \bar{v}_t \frac{\partial}{\partial y} - \kappa \mu_t \frac{\partial}{\partial u} \right\} l_1 + \lambda_0 v_{0,t}^* + \lambda \bar{v}_t \\ & + \lambda_\mu \mu_t + \frac{l_1 l_2}{a} + \lambda^+ l_1(t, q, y, u + \eta^+) \\ & + \lambda^- l_1(t, q, y, u - \eta^-) - (\lambda^+ + \lambda^-) l_1(t, q, y, u) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} l_2 + \frac{(l_2)^2}{a} = 0. \quad (19)$$

ただし、終端条件は $l_0(T, q, y, u) = l_1(T, q, y, u) = 0$, $l_2(T) = -\psi$ である。

PDE の導出前に述べたが、 $v_{i,t}^*$ の導出に必要なのは $l_1(t, q, y, u)$ と $l_2(t)$ である。そこで、式 (18) と式 (19) を見ると $l_0(t, q, y, u)$ は現れない。従って $l_2(t)$ は既に ODE であることを踏まえると、 $l_1(t, q, y, u)$ についてのみ考えればよい。そこで $l_1(t, q, y, u)$ について次のような仮定を置く。

$$l_1(t, q, y, u) = l_1^0(t) + l_1^q(t)q + l_1^y(t)y + l_1^u(t)u. \quad (20)$$

また、 v_0^* については既に式 (9) で導出済みなのでそれを代入し、式 (20) の各関数の t について ODE を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} l_1^0 + \frac{h_1^0}{2a_0} (l_1^q + \lambda_0) + (l_1^y + \lambda) g_0 + \eta l_1^u + \frac{1}{a} l_1^0 l_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} l_1^q + \frac{(\lambda_0 + 2h_2)}{2a_0} (l_1^q + \lambda_0) + (l_1^y + \lambda) g_1 + \frac{1}{a} l_1^q l_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} l_1^y + \frac{h_1^y}{2a_0} (l_1^q + \lambda_0) + (l_1^y + \lambda) g_2 + \frac{1}{a} l_1^y l_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} l_1^u + \frac{h_1^u}{2a_0} (l_1^q + \lambda_0) - \kappa l_1^u + (l_1^y + \lambda) g_3 + \lambda_\mu + \frac{1}{a} l_1^u l_2 &= 0. \end{aligned}$$

ただし、いずれの関数も終端条件は 0 である。

以上より、これらの ODE を解くことでマイナートレーダーの最適執行戦略を求めることができる。

(4) MFG の一貫性について

本節では MFG に従うマイナートレーダーの一貫性について考える。特に先ほど求められた MFG フレームワーク下での最適執行戦略をメジャートレーダーと全てのマイナートレーダーが採用した際、結果的に全てのマイナートレーダーが平均的な取引速度を採用することになる。従って以下のことが言える。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathfrak{M}} v_{i,t}^* = \frac{1}{2a} \left(l_1^0 + l_1^q Q_{0,t}^{v_0^*} + l_1^y Q_t^{\bar{v}} + l_1^u \mu_t + 2l_2 Q_t^{\bar{v}} \right).$$

この時、式 (1) で近似していた \bar{v}_t の関数 g については次

のようになる。

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \frac{1}{2a} l_1^0(t), \\ g_1(t) &= \frac{1}{2a} l_1^q(t), \\ g_2(t) &= \frac{1}{2a} (l_1^y(t) + 2l_2(t)), \\ g_3(t) &= \frac{1}{2a} l_1^u(t). \end{aligned}$$

4. 数値実験

本節では前節で求めた最適執行問題の解に対して数値実験を行う。実験手法についてはモンテカルロ法を採用し、実験回数については 10^5 回行った。

(1) 各トレーダーの取引戦略

本節では、メジャートレーダーとマイナートレーダーの取引戦略について、仮のパラメータを設定して数値実験を行う。取引時間関連のパラメータについては $T = 1.0$ とし、取引時間については $t \in [0, T]$ となる。取引回数は $n = 200$ とする。他のパラメータについては以下のように値を設定する。

表 1 メジャートレーダーのパラメータ

初期在庫	恒久的 MI	一時的 MI
$Q_{0,0} = 1.0$	$\lambda_0 = 2.0 \times 10^{-5}$	$a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$
最終売却価格補正係数		ペナルティ
$\alpha = 10.0 \times 10^{-5}$		$\phi = 20.0 \times 10^{-5}$

表 2 マイナートレーダーのパラメータ

初期在庫	恒久的 MI	一時的 MI
$Q_{i,0} = 0.0$	$\lambda = 2.0 \times 10^{-5}$	$a = 0.1 \times 10^{-5}$
最終売却価格補正係数		
$\psi = 10.0 \times 10^{-5}$		

表 3 ノイズトレーダーのパラメータ

恒久的 MI		平均回帰係数	
$\lambda_\mu = 2.0 \times 10^{-5}$		$\kappa = 100.0$	
ジャンプ幅		ポアソン過程の強度	
$\eta^+ = 0.2$	$\eta^- = 0.2$	$\lambda^+ = 0.5$	$\lambda^- = 0.5$

今回、戦略導出にあたり多数の ODE の計算が必要だが、その数値解法については 4 次のルンゲクッタの公式を用いた。

まずは、メジャートレーダーとマイナートレーダーの両者の取引戦略の概形について、図 2、図 3 で示す。

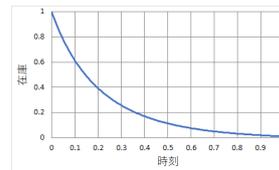


図 2 メジャートレーダーの在庫過程

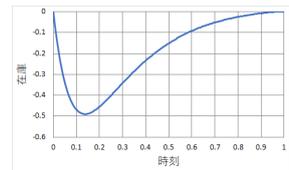


図 3 マイナートレーダーの在庫過程

図 2 より、メジャートレーダーは売却速度を鈍化させながらも継続的に在庫を売却していることが分かる。図 3 から、マイナートレーダーはまず空売りを行い、一定量到達したところで反転して買い戻しをしていることが分かる。

両者の戦略について考察すると、まずメジャートレーダーは在庫保有に対するペナルティがあることから早くに在庫を売却したいであろうことが伺える。一方でそれを把握しているマイナートレーダーは株価が下がりきる前に空売りをを行い、ある一定のところで買いに転ずることで空売りと買い戻しの差額で利益を生み出そうとしていることが予想できる。

(2) パラメータの変化に対するトレーダーの反応

ここからはパラメータに対する在庫過程の反応について数値実験を行う。

まずは一時的市場インパクトについて見ていく。単位については 10^{-5} であるが、グラフ(図4~14)の表記上は省略している。先にメジャートレーダーの一時的市場インパクト a_0 が与える影響について考える。この時のメジャートレーダーとマイナートレーダーの在庫過程は図4、図5の通りである。

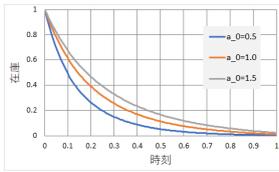


図4 a_0 別メジャートレーダーの在庫過程

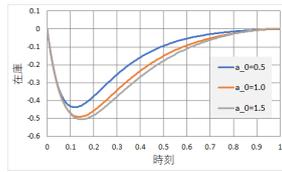


図5 a_0 別マイナートレーダーの在庫過程

図4より、 a_0 が小さいほどメジャートレーダーの在庫売却速度が早いことが分かる。また、図5より、マイナートレーダーは a_0 が大きいほど空売りの量が多く、買い戻しの速度も遅いことが分かる。これは、 a_0 がマイナートレーダーの戦略に直接影響を与えているというよりはメジャートレーダーの在庫売却速度に呼応していると考えの方が自然だろう。

次はマイナートレーダーの一時的市場インパクト a についてである。この時のメジャートレーダーの在庫過程は図6、図7の通りである。

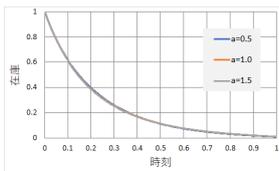


図6 a 別メジャートレーダーの在庫過程

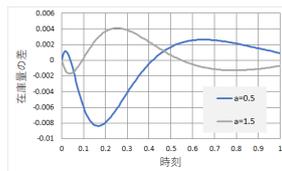


図7 $a = 0.1$ 時のメジャートレーダーの在庫量の差

図6は a 別のメジャートレーダーの在庫過程だが、この図からはわずかな違いしか見受けられない。そこで、 $a = 0.1$ を基準に $a = 0.05$ と $a = 0.15$ を差し引いたものが図7である。この図7から、マイナートレーダーの一時的市場インパクト a が大きいとメジャートレーダーの在庫売却速度は最初は早く、満期に近づくにつれて遅くなる一方で、 a が小さいと最初は遅く、満期に近づくにつれて早くなる。

次に、マイナートレーダーの在庫過程は図8の通りである。

この図8から、一時的市場インパクト a がマイナートレーダーの在庫過程に与える影響が大きいことが分かる。 a が大きいと全体的に取引量が減り、小さいと取引量が増えている。

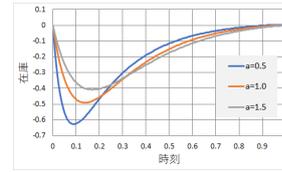


図8 a 別マイナートレーダーの在庫過程

ここからは恒久的市場インパクトについて見ていく。まずはメジャートレーダーの恒久的市場インパクト λ_0 が与える影響について考える。この時のメジャートレーダーの在庫過程は図9、図10の通りである。

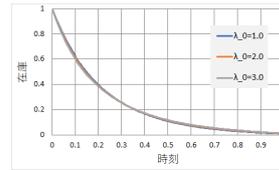


図9 λ_0 別メジャートレーダーの在庫過程

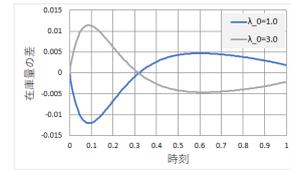


図10 $\lambda_0 = 2.0$ のメジャートレーダーの在庫量との差

図9はメジャートレーダーの在庫過程のグラフだが、その差が分かりにくいので $\lambda_0 = 2.0$ の在庫過程から $\lambda_0 = 1.0$ と $\lambda_0 = 3.0$ をそれぞれ差し引いた場合のグラフを図10にて示す。 $\lambda_0 = 3.0$ の場合、 $\lambda_0 = 2.0$ の場合と比べて初期の頃は売却速度を早めて在庫保有量を少なくしているが、ある程度のところからは満期にかけて売却速度を落としていることが分かる。一方で $\lambda_0 = 1.0$ の場合、 $\lambda_0 = 2.0$ の場合と比べて初期の頃は売却速度を落として在庫保有を許容し、満期に向けて売却速度を早めていることが分かる。

次に、図11でマイナートレーダーの在庫過程を示す。

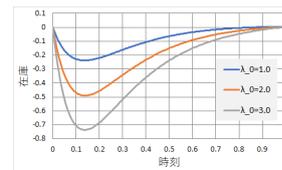


図11 λ_0 別マイナートレーダーの在庫過程

図11より、 λ_0 が小さいと空売りの量が減り、大きいと空売りの量が増えていることが分かる。

次に、マイナートレーダーの恒久的市場インパクト λ についてである。この λ を変化させた時のメジャートレーダーの在庫過程は図12、図13の通りである。

図12は λ 別のメジャートレーダーの在庫過程だが、これだけでは違いが見えにくいので $\lambda = 2.0$ から差をとったものが図13である。しかし、これだけではグラフの形状の説明を付けにくいので、先にマイナートレーダーの在庫過程について図14で提示する。

図14より、 λ が大きくなるにつれてマイナートレーダーの空売りの量が抑えられていることが分かる。

これを踏まえた上でメジャートレーダーの動きについて考えてみる。一度交差はしているが λ が大きい場合に売却速度

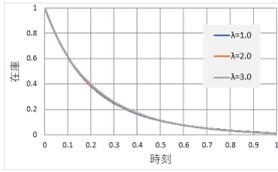


図 12 λ 別メジャートレーダーの在庫過程

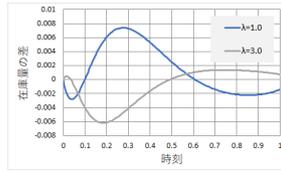


図 13 $\lambda = 0.1$ のメジャートレーダーの在庫量との差

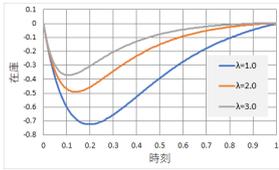


図 14 λ 別マイナートレーダーの在庫過程

が遅いことから、マイナートレーダーの空売り量が少ないから急いで在庫の売却を進めるのではなく、ゆっくりと売却していると考えられる。一方で λ が小さければマイナートレーダーが空売り量を増やしてくると予想されるので株価が下がりきる前にある程度売却を進めているのではないかと考えられる。

(3) 他の戦略との在庫過程の比較

本節では在庫過程に関して他の戦略との比較を行う。本稿でこれまで扱ってきた、メジャートレーダー、マイナートレーダー、ノイズトレーダーの存在を仮定して導出した戦略を「MFG」と記述することにする。

比較する戦略としては2つある。1つ目は [1] に掲載されている Order-Flow 戦略である。MFG とは異なり、メジャートレーダーとノイズトレーダーのみが市場に存在するとして戦略を導出している。この戦略については「OF」と記述することにし、戦略の導出経緯については本論文に掲載する。2つ目は [2] に掲載されている Optimal Execution 戦略である。こちらは市場に存在するトレーダーをメジャートレーダーのみと仮定し、戦略を導出している。この戦略については「OE」と記述することにし、その導出経緯については本論文に掲載する。また、マイナートレーダーについてはメジャートレーダーがマイナートレーダー、ノイズトレーダーの存在を認識して取引を行っている想定させ、戦略を導出させる。この場合の在庫過程は図 15、図 16 のようになる。

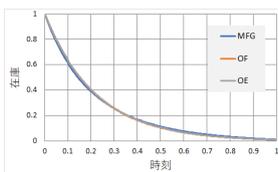


図 15 戦略別メジャートレーダーの在庫過程

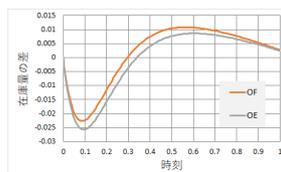


図 16 MFG のメジャートレーダーの在庫量との差

図 15 はそれぞれの戦略により導出されたメジャートレーダーの在庫過程、図 16 は MFG の在庫過程から OF と OE の在庫過程を引いたもののグラフである。この図 16 から、最初の段階では MFG が最速で在庫を売却しており、後半で

は OF の保有在庫量が最小になっていることが確認できる。

次に、図 17、図 18 でマイナートレーダーの在庫過程を示す。

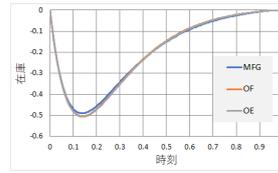


図 17 戦略別マイナートレーダーの在庫過程

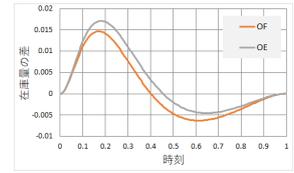


図 18 MFG のマイナートレーダーの在庫量との差

図 17 はマイナートレーダーの在庫過程、図 18 は MFG の在庫過程から OF と OE の在庫過程を引いたものである。OE が最も空売りの量が多く、在庫の買い戻しの速度については OF が最も速いことが図 18 から読み取れる。

次に、マイナートレーダーの戦略がメジャートレーダーの戦略にフィットしている場合を考える。MFG についてはこれまでと変わらないが、OF と OE についてはマイナートレーダーはメジャートレーダーの戦略を正しく認識しているものとし、表記についても「OF₂」「OE₂」として、図 19、図 20 でその違いを見ていく。

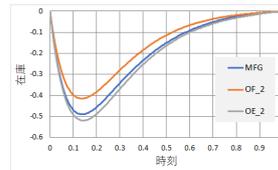


図 19 戦略別マイナートレーダーの在庫過程

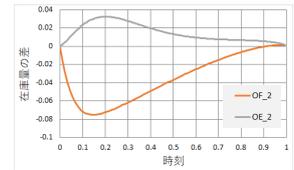


図 20 MFG のマイナートレーダーの在庫量との差

図 19 は異なる戦略下でのマイナートレーダーの在庫過程、図 20 は OF₂ と OE₂ の在庫過程を MFG の在庫過程から引いたもののグラフである。図 17 と図 19 を見比べると、図 19 の方がその差を目視しやすい。ただし、これはノイズトレーダーの動きによっても変わってくるものと思われる、その時々が発生した乱数によってもその差は変わるだろう。

本論文では、その他のパラメータでも比較実験を行っている。また、パラメータの値設定について、日本株の取引データから推定したものを用いての実験も行い、戦略の日本株に対する性能についても検証を行う。

参考文献

- 1) Cartea, Á., and Jaimungal, S.: *Incorporating order-flow into optimal execution*, Mathematics and Financial Economics, Vol.10, pp.339-364, 2016.
- 2) Cartea, Á., Jaimungal, S., and Penalva, J.: *Algorithmic and High Frequency Trading*, Cambridge University Press, 2015.
- 3) Huang, X., Jaimungal, S., and Nourian, M.: *Mean-Field Game Strategies for Optimal Execution*, Applied Mathematical Finance, Vol.26, No.2, pp.153-185, 2019.