

三次元構造最適化手法を活用した新しい力学 構造導出に関する研究

MOCHIZUKI, Kosuke / 望月, 幸祐

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学研究科編

(巻 / Volume)

64

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

5

(発行年 / Year)

2023-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00026327>

三次元構造最適化手法を活用した 新しい力学構造導出に関する研究

RESEARCH ON NEW MECHANICAL STRUCTURES
USING 3D STRUCTURAL OPTIMIZATION METHODS

望月 幸祐

Kosuke MOCHIZUKI

指導教員 岡本 吉史

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

In topology optimization based on structural mechanics, the SIMP method is often used to define the material density, and optimization is performed to maximize stiffness by imposing area and other constraints. 3D structural optimization methods may be used to derive structures with even greater degrees of freedom. In this paper, we first verify the accuracy of the finite element method and the validity of the sensitivity analysis using the associated variable method, using a cantilevered beam model. Topology optimization by mean compliance minimization is performed on the chair model to maximize the stiffness. The SIMP method is used as the characteristic function, the steepest descent method is used as the optimization method, and the outer point penalty function method is applied to account for area constraints.

Key Words : three dimensional, topology optimization, structural analysis

1. はじめに

昨今、地球規模でのカーボンニュートラルの促進に伴い、様々な輸送機械の電動化が積極的に行われている。その際、駆動部分であるモータの小型化・高出力化の要請が高まっている。小型化に伴い、モータの体格が小さくなる傾向にあり、必然的に、出力トルクが小さくなる。したがって、高出力化のために、モータの回転数を高回転化する必要性がある。しかしながら、高回転化により、モータ各部に作用する応力が増加傾向にあるため、応力耐性に富む力学構造を設計することが重要である。

力学構造の設計手法の1つとして、構造最適化がある。構造最適化の種類として、寸法最適化、形状最適化、トポロジー最適化がある。中でも、トポロジー最適化は設計領域内の要素あるいは節点に配置される材料密度を設計変数として、構造をモデリングするため、設計の自由度が高く、新規性の高い形状を発見できる可能性を秘めている。実際にトポロジー最適化は、構造力学の分野では、航空機や、自動車のフレームの設計に使用されている。また、電磁気学の分野では、モータや誘導加熱装置の内部構造の設計に用いられる。

構造力学に基づくトポロジー最適化では、材料密度の定

義に SIMP 法 (solid isotropic microstructure with penalization of intermediate density) を使用し、面積などの制約を課して、剛性最大化を目的とした最適化を行う事例が多い。二次元構造最適化では平面的な構造の変更のみとなり、高さ方向に関する構造変更が不可能である。そこで、高さ方向に対してもトポロジー変化を可能とする3次元構造最適化手法を活用することで、さらに自由度の高い構造を導出できる可能性がある。さらに、金属3Dプリンターなどを援用することで、三次元構造の具現化が可能となる。

本論文では、三次元力学構造最適化を行うための基礎検討を中心として、最適化手法における種々の特質を把握し、三次元トポロジー最適化手法の開発を行った。まず、有限要素法の計算精度と随伴変数法を用いた感度解析の妥当性を、片持ち梁モデルを用いて検証した。また、椅子モデルに対し、剛性最大化を目的とした平均コンプライアンス最小化によるトポロジー最適化を実施した。特性関数には SIMP 法を、最適化手法として最急降下法を用い、面積制約を考慮する手法として、外点ペナルティ関数法を適用する。その結果、トラス構造を含む特異な構造が導出された。

2. トポロジー最適化手法

(1) SIMP 法による材料定数及び設計変数の定義法

構造最適化において、材料定数となるヤング率 E は、設計変数 ρ の関数として定義される。関数の定義は様々考えられるが、本論文では SIMP 法^[1]で表した (1) 式を採用する。

$$E(\rho) = E\rho^\beta \quad (1)$$

$E(\rho)$ は材料の充填率を表す特性関数で、 β はペナルティパラメータである。(1) 式を用いると、 $0 \leq \rho \leq 1$ の領域において $\beta \geq 2$ の場合に勾配の値に差が生じるため、物体に穴を設けることができる。2次元場において β の取りうる値は Hashin-Shtrikman の境界条件^[2]より (2) 式が導かれている。

$$\beta \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\} \quad (2)$$

ここで、 ν はポアソン比を表す。 $\nu=1/3$ を (2.2) 式に代入すると $\beta \geq 3$ となり、この条件式が良いとされている。

本論文ではチェッカーフラッグを回避するために、節点に設計変数を設定し最適化を行い、数値計算を行う際、(3) 式に基づいて、要素の設計変数 ρ_{el} として節点の設計変数の和を平均した値を使用する。

$$\rho_{el} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_8}{8} \quad (3)$$

ここで、 $\rho_1 \sim \rho_8$ は各要素を構成する節点の設計変数を表す。

(2) 有限要素法による構造解析

本論文では、線形構造解析によって、三次元場の変位を算定し、目的関数を評価する。有限要素法は、数理モデルの微分方程式を直接解かず、ある特定の手法によりモデルを積分方程式に置き換えてからその解を求めるものである。弾性問題の強度・応力解析では仮想仕事の原理を利用して微分方程式を積分方程式に置き換える。

三次元弾性問題において仮想仕事の原理より (4) 式の積分方程式が求められる。

$$\begin{aligned} & \int_S (u^* T_x + v^* T_y + w^* T_z) dS \\ & + \iiint (u^* F_x + v^* F_y + w^* F_z) dx dy dz \\ & - \iiint \left(\begin{aligned} & \varepsilon_x^* \sigma_x + \varepsilon_y^* \sigma_y + \varepsilon_z^* \sigma_z \\ & + \gamma_{xy}^* \tau_{xy} + \gamma_{yz}^* \tau_{yz} + \gamma_{zx}^* \tau_{zx} \end{aligned} \right) dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで t は厚さ、 Γ は物体表面、 T_x, T_y は物体表面上の分布荷重の x, y 方向の成分、 u^*, v^* は x, y 方向の仮想変位である。また、 F_x, F_y は体積力の x, y 方向の成分、 $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*$ と γ_{xy}^* は仮想変位がもたらす x 方向、 y 方向の仮想垂直ひずみと仮想せん断ひずみである。応力-ひずみ関係式を用いて、節点の 1 つ 1 つについてつり合い方程式をたてると、これらの式は節点変位に関する連立一次方程式となる。得られる線型方程式を (5) 式に示す。

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{K} は構造全体の剛性マトリックス、 \mathbf{P} は節点に働く外力、 \mathbf{d} は節点の変位を表す。 \mathbf{P} は荷重条件として与えられ、(5) 式を \mathbf{d} について解くことで構造内の全ての節点

変位が決定される。

(3) 随伴変数法による感度解析

感度解析手法には、差分法や随伴変数法^[3]などがある。本論文では、評価領域の節点または要素数に相当する大規模な変数に対する設計感度の高速計算が可能な随伴変数法を用いる。随伴変数法の手順として、まず有限要素法で得られた目的関数 f を (6) 式の形に変換する。

$$\bar{f} = f(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{P}) \quad (6)$$

ここで、 $\boldsymbol{\lambda}$ は随伴変数とする。(6) 式を i 番目の設計変数 ρ_i で偏微分し、平均コンプライアンス $\mathbf{P}^T \mathbf{d}$ を代入すると、(7) 式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \rho_i} = \left(\mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \rho_i} \right) - \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{d} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \rho_i} \right) \quad \left(\because \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_i} = 0 \right) \quad (7)$$

ここで、(7) 式は (8) 式のようにになる。

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \rho_i} = \left(\mathbf{P}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \rho_i} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{d} \quad (8)$$

ここで、 $\partial \mathbf{d} / \partial \rho_i$ は陽的に計算すると巨大な計算コストがかかるので、その係数を零ベクトルとすると (9) 式のようにになる。

$$\mathbf{P}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \quad (9)$$

(9) 式は随伴方程式と呼ばれる。随伴方程式を解くことによって随伴変数を求める。随伴変数を求めるために、(9) 式を (9) 式のように変形する。

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{P} = 0 \quad (10)$$

ここで (10) 式は (5) 式と等価である自己随伴の形となっていることがわかる。したがって随伴変数 $\boldsymbol{\lambda}$ は節点変位ベクトル \mathbf{d} と等価とみなすことができ、随伴方程式の計算が不要となる。求まった随伴変数 $\boldsymbol{\lambda}$ と (10) 式を (7) 式に代入すると、(11) 式が得られ、 ρ_i に関する感度を計算できる。

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \rho_i} = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{d} \quad (11)$$

剛性マトリックス \mathbf{K} の偏微分は (12) 式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} = t \int \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \rho_i} \mathbf{B} dx dy \quad (12)$$

(4) 外点ペナルティによる制約条件の考慮

トポロジー最適化問題に、材料の面積あるいは体積に関する制約条件を課すことを考える。本論文では、外点ペナルティ関数法 (exterior penalty function method)^[4]を採用する。外点ペナルティ関数を適用した拡張目的関数を (13) 式に示す。

$$C(\boldsymbol{\rho}, p) = f(\boldsymbol{\rho}) + p \sum_{i=1}^m \left\{ \max(0, G_i(\boldsymbol{\rho})) \right\}^\gamma \quad (13)$$

$f(\boldsymbol{\rho})$ は最小化関数、 $G_i(\boldsymbol{\rho})$ は不等式制約条件で、 p はペナルティ係数 (0 以上) である。 n は制約条件の個数を表す。 γ は 1 以上のパラメータである。(13) 式の無制約最適化問題を最小化しながら、(14) 式に従って $p \rightarrow \infty$ となるように

p を増加させる.

$$p^{(l+1)} = \kappa p^{(l)} \quad (14)$$

l はペナルティパラメータの更新回数で, κ は 1 以上のパラメータである.

外点ペナルティ関数法の手順を以下に示す.

- (1) 設計変数の初期値 ρ_0 , ペナルティパラメータ p_0 の初期値を定義する.
- (2) $l=0$ とおく.
- (3) 収束判定条件が満たされていれば, ρ_l を解とみなして計算を終了する.
そうでない場合は (4) へいく.
- (4) 外点ペナルティ関数 $C(\rho, p)$ を目的関数とする無制約最適化問題を解き解 ρ_{k+1} を求める.
- (5) $p_{l+1} = \kappa p_l$ ($\kappa > 1$) を計算する.
- (6) $l=l+1$ とおく. (3) へ戻る.
- (5) **最急降下法によるトポロジー最適化**

最適化手法には最急降下法 (steepest descent method) [4] を用いる. 最急降下法では, 随伴変数法から得られる感度を用いて設計変数を更新する.

最急降下法の手順を以下に示す.

- (1) 目的関数 f , 目的関数の勾配 ∇f , 設計変数の初期値 ρ_0 を定義する.
- (2) $k=0$ とおく.
- (3) 収束判定条件が満たされていれば, ρ_k を解とみなして計算を終了する.
そうでない場合 (4) へいく.
- (4) 最急降下方向を $\Delta \rho_k = -\nabla f$ として探索方向を求める.
- (5) (14) 式に示す修正係数 α_k を計算する.

$$\alpha_k = \frac{\Delta x_{\max}}{\max(\Delta \rho_k)} \quad (15)$$

ここで Δx_{\max} は設計領域の全有限要素における最長辺を示す.

- (6) $\rho_{k+1} = \rho_k + \alpha_k \Delta \rho_k$ を計算する.
- (7) $k=k+1$ とおき, (3) へ戻る.

図 1 に, 最急降下法と外点ペナルティ関数法を併用したトポロジー最適化のフローチャートを示す. まず, 設計領域内の設計変数と p の初期値を設定する (step 1). 次に, 有限要素法で目的関数を計算する (step 2). 次に, 随伴変数法で感度を計算し (step 4), そして, 設計変数を更新し (step 5), 無制約問題の収束判定条件 (step 3) を満たすまで, 繰り返し計算を行う. 制約条件を満足していれば, 計算を終了し, 満足していなければ目的関数にペナルティを付加し (step 8), step 2~6 までの計算と同様な計算を行う. step 3 及び step 7 の収束判定条件における Δf は (16) 式のように定義する.

$$\Delta f = \left| \frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{f^{(0)}} \right| \quad (16)$$

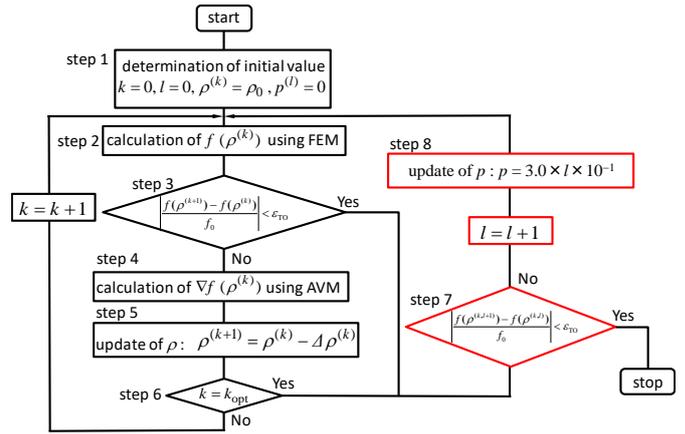


Fig. 1. Flowchart for TO

3. 最適化モデル

(1) 精度検証のための解析モデル

図 2 に三次元有限要素解析と随伴変数法の精度を検証するための片持ち梁モデルを示す. 有限要素解析については, 各メッシュ規模における変位と理論解との比較を行う. また, 感度解析については, 目的関数に平均コンプライアンスを用いて差分法との比較を行う.

境界条件として, $x = 360\text{mm}$, $y = 0\text{mm}$, $z = 60\text{mm}$ の節点と $x = 360\text{mm}$, $y = 40\text{mm}$, $z = 60\text{mm}$ の節点に $P=24\text{kN}$ の荷重条件を適用し, $x = 0$ の境界には, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ の拘束条件を適用する. また, 有限要素法弱形式の求解に使用する Eisenstat の前処理付き共役勾配法 (MESGSCG) の収束判定値を $\epsilon_{\text{FEM}} = 10^{-6}$ とする. ヤング率 $E = 2.0 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, ポアソン比 $\nu = 0.0$ とする.

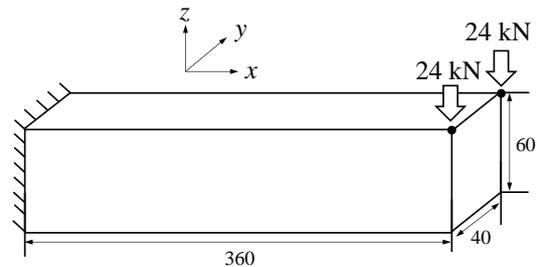


Fig. 2. Cantilever beam model

(2) 椅子モデルを用いた最適化問題

図 3 にトポロジー最適化結果を行う椅子モデルを示す. 本問題の設計目標は, (17) 式に示すように, 設計領域 Ω_d 内の節点に設計変数 ρ を配置して, 同領域内の平均コンプライアンスが最小となるトポロジーを探索することである.

$$\begin{aligned} \min. \quad & f(\rho) = P^T d \\ \text{s.t.} \quad & g(\rho) = V(\rho) - V_{\text{per}} V_{\text{all}} \leq 0 \quad \left(\because V(\rho) = \int_{\Omega_d} \rho dS \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで V_{per} は 0~1 に正規化された体積制約値の比率を表

す。平均コンプライアンスは物体の変形のしやすさを表す指標である。従って平均コンプライアンスの最小化は剛性最大化と等価とみなすことができる。

本問題では、(17)式に示す制約付き最適化問題を解くため、外点ペナルティ関数法を用い、(17)式を(18)式のような拡張目的関数の最小化問題として解くことにより、制約を考慮する。

$$\min. F(\boldsymbol{\rho}, p) = f(\boldsymbol{\rho}) + p \left[\sum_{i=1}^m \{ \max(0, g_i(\boldsymbol{\rho})) \}^\gamma \right] \quad (18)$$

ここで、 p はペナルティ係数、 γ は1以上の定数を示す。この2値は任意の値を設定することが可能である。本論文では $\gamma=2$ とする。また、 p は(19)式のように設定する。

$$p = 3.0 \times l \times 10^{-1} \quad (19)$$

ここで l は最適化問題の外反復回数を示す。境界条件として、図3に示すように一様荷重を加え、 $z=0$ の境界には、 $u=0, v=0, w=0$ の拘束条件を適用する。

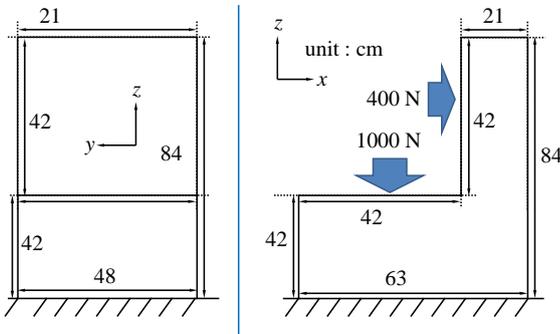


Fig. 3. chair model

4. トポロジー最適化結果

(1) 有限要素解析と随伴変数法の精度検証

図4にメッシュ規模における計算精度の比較結果を示す。メッシュ規模が大きいほど理論解に近づいていき、片持ち梁モデルでは要素数が1000の辺りではほぼ理論解と一致した。また、要素を立方体と歪ませた六面体で比較した結果、精度に差があり、規模が小さいほど顕著に表れた。

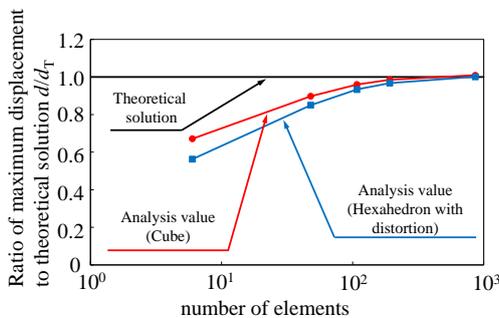


Fig. 4. Accuracy of finite element method

また、図5に随伴変数法と差分法の比較結果を示す。 $n=3\sim 5$ の域で随伴変数法と差分法の値が一致していることから、

妥当性が確認できた。

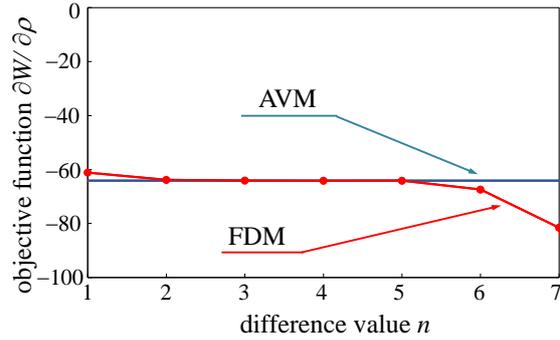


Fig. 5. Comparison of sensitivity accuracy derived from AVM and FDM

(2) 最適化結果

表1に、最適化条件を示す。図6に最適化結果の材料領域、図7にグレースケール領域を示す。外形にはトラス構造を含んだ特異なものとなり、内部についても複雑な構造が現れた。グレースケールは材料領域に沿うように存在している。

TABLE I OPTIMIZATION PARAMETERS

CG method convergence condition value	volume constraint V/V_{\max}	Initial design variable	iteration
10^{-6}	0.4	0.01	2000

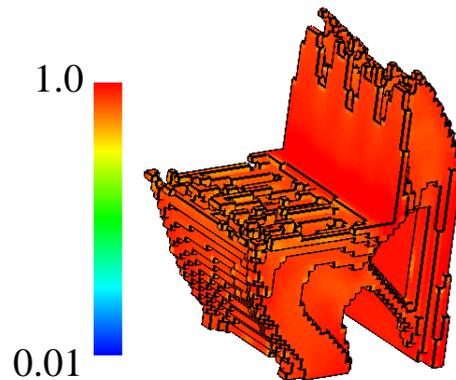


Fig. 6. Material domain of optimized structure

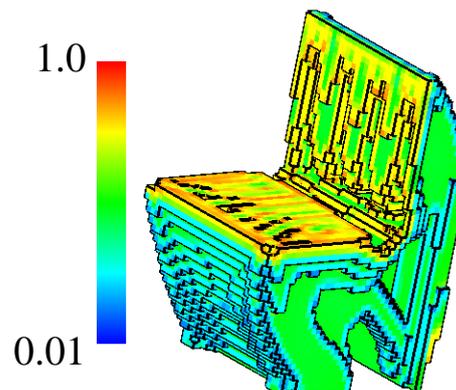


Fig. 7. Grayscale area of optimized structure

5. まとめ

本論文では、有限要素法の計算精度と、随伴変数法を用いた感度解析の妥当性を確認した。そして、剛性最大化を目的とした平均コンプライアンス最小化によるトポロジー最適化を実施した。本論文から得られた結果を要約すると、以下のようになる。

- (1) 片持ち梁モデルにおいては、要素数が約 1000 で理論解に十分近い値となった。また、要素形状によっても精度に差があり、立方体に近いほど小規模メッシュでも精度が良くなった。
- (2) 随伴変数法と差分法で感度を比較した結果、値が一致し、妥当性が確認できた。
- (3) 椅子モデルを用いてトポロジー最適化を行った結果、外形にはトラス構造を含んだ特異なものとなり、内部についても複雑な構造が現れた。グレースケールは材料領域に沿うように存在している。

参考文献

-
- [1] M. P. Bendsøe, “Optimal shape design as a material distribution problem,” *Struct. Optim.*, vol.1, pp. 193-202 (1989).
 - [2] Z. Hashin, and S.shtrikman, “A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials,” *J. Mech. Phys. Solids*, pp.127-140, (1963).
 - [3] I.-H. Park, B.-T. Lee, and S.-Y. Hahn, “Design sensitivity analysis for nonlinear magnetostatic problems using finite element method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1533-1536 (1992).
 - [4] 北村充:「数理計画法による最適化 実際の最適化問題に活かすための考え方と手法」, 森北出版(2015)
 - [5] 邵長城:「基本からわかる有限要素法」, 森北出版(2008)
 - [6] 森博嗣:「C 言語による有限要素法入門」, 森北出版(1989)
 - [7] 竹内則雄・樫山和男・寺田賢二郎:「計算力学」, 森北出版(2003)