

ブラック・ショールズ・モデルの拡張と確率的時間変更

YAMAZAKI, Akira / 山寄, 輝

(出版者 / Publisher)

法政大学経営学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

経営志林 / The Hosei journal of business

(巻 / Volume)

56

(号 / Number)

2

(開始ページ / Start Page)

33

(終了ページ / End Page)

47

(発行年 / Year)

2019-07-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00025617>

〔論 文〕

ブラック・ショールズ・モデルの拡張と確率的時間変更

山 崎 輝

概 要

本研究では、ブラック・ショールズ・モデルの確率的な時間変更によって記述できる株式リターン変動モデルの族に対して、その確率統計的性質に関する考察を与える。この族には、確率ボラティリティ・モデルやジャンプ・モデルなどの様々なモデルが含まれる。本稿では、この族の統一的な解析方法を提案するとともに、数値実験によって、この族に属するいくつかの具体的なモデルのサンプル・パスを発生させ、視覚化することでそれらの特性を比較する。

キーワード：株式収益率過程、株式収益率分布、時間変更過程、確率時刻、ジャンプ・モデル、確率ボラティリティ・モデル、サンプル・パス

1 はじめに

現代のファイナンスでは、ブラック・ショールズ・モデル (Black and Scholes, 1973) の浸透もあり、連続時間の確率過程を金融資産の価格変動モデルとして用いることが一般的になった。連続時間の確率過程が適用されるファイナンスの分野は、金融商品の価格評価、ポートフォリオの最適化、金融資産のリスク管理、イールドカーブや信用リスクの分析など、非常に多岐にわたる。ブラック・ショールズ・モデルのような正規分布を前提とする確率過程には、金融資産の価格変動モデルとして一定程度の妥当性があり、解析的な扱いが容易であるという利点をもつ。その一方で、このような確率過程では現実の金融資産の価格変動を捉えるには不十分との指摘も多く、改良を試みる研究が現在でも活発に行われている。

本稿では、株式収益率の変動モデルを対象を限定し、ブラック・ショールズ・モデルを拡張した各種モデルを確率的な時間変更の視点から統一的に扱う方法を提案する。これら拡張モデルの族には、時間に対して不連続に変化する

ジャンプ・モデルやボラティリティが不均一な確率ボラティリティ・モデルなど、過去の研究で提案された重要なモデルが多数含まれる。また、株式収益率の新しい変動モデルを生成するための手がかりも与える。さらには、標準モデルといくつかの拡張モデルのサンプル・パスを描くことで、各モデルの特徴を視覚化して比較する。

本研究の具体的な内容は以下のとおりである。まずは、株式の対数収益率が時間に対してドリフト付きのブラウン運動で拡散していく確率過程を標準モデルと定義する。すなわち、標準モデルとは、ブラック・ショールズ・モデルのことである。これに対して、期待収益率を不変として、標準モデルに確率的な時間変更を施した確率過程を考える。これを拡張モデルと呼ぶことにする。拡張モデルでは、株式の収益率は非正規分布に従う。拡張モデルと標準モデルの差異はこれらの確率過程の差の分散によって計測できる。この分散の一般式を導出し、拡張モデルと標準モデルの差異をオプション理論の観点から解釈できることを示す。さらには、拡張モデルの確率統計的性質を決定する特性関

数の一般表現を導出し、拡張モデルの性質は時間変更過程の特性関数に集約されることを示す。

次に、拡張モデルの族に属する具体的なモデルを紹介する。よく知られているように、ジャンプ・モデルに用いられるレヴィ過程のいくつかはこの拡張モデルの典型例である。また、確率ボラティリティ・モデルは、その分散過程の時間積分が確率的な時間変更とみなせるので、拡張モデルの枠組みで扱うことができる。さらには、近年提案された新しい株式収益率変動モデルでさえも、多重に時間変更した拡張モデルと解釈できる場合があることを示す。

最後に、モンテカルロ・シミュレーションによって、バリエーション・ガンマ過程、正規逆ガウス過程、ヘストン・モデルの3つの拡張モデルと標準モデルのサンプル・パスを発生させる。この数値実験では、期間の異なるサンプル・パスを描くことで、各モデルの特徴を視覚化する。モデル選択のためには、最尤法や情報量基準などの統計学に則った機械的な手続きだけでなく、サンプル・パスの挙動を実際に観察することも非常に重要であることを指摘する。

本研究の関連論文は多数存在するが、本節でそれらを列挙することはせずに、研究内容に直接関係のある文献を次節以降で適宜紹介することにしよう。

以降の論文構成は以下のとおりである。第2節では、正規分布を前提とする標準モデルの欠点を指摘した後、その代替案として確率的な時間変更による拡張モデルを提示し、理論的な考察を与える。第3節では、拡張モデルの具体例として、ジャンプ・モデル、確率ボラティリティ・モデル、時間変更レヴィ過程などを紹介する。第4節では、モンテカルロ・シミュレーションによって、標準モデルといくつかの拡張モデルのサンプル・パスを図示する。第5節で本研究の結論を述べる。補論では、本論中に掲載した公式の証明を与える。

2 株式収益率モデル

2.1 標準モデル

ある企業の時点 t の株価を S_t と表すことにする。この株式の対数収益率を確率過程 X として次のようにモデル化しよう。

$$\log \frac{S_t}{S_0} = X_t := \mu t + \sigma W_t. \quad (2.1)$$

ただし、 μ と σ は定数パラメータであり、 W は標準ブラウン運動である。本稿では、この確率過程 X を標準モデルとよぶことにする。標準モデルはブラック・ショールズ・モデル (Black and Scholes, 1973) と等価であり、時点 t の対数収益率 X_t は平均 μt 、分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従う確率変数となる。この「株式の収益率が正規分布に従う」という仮定は多くの実証研究で否定されており、実際の株式の収益率分布は負の歪度とある程度の尖度を持つことが知られている¹⁾。さらには、確率過程の性質としても、標準モデル (2.1) は現実の株価の動きといくつかの点で符号しない。以下では、それらのなかでも特に重要な二つの点を指摘する。

まず一つは標準モデル X の増分の独立性と定常性である。De Bondt and Thaler (1985) は米国株式市場において、株式の長期のヒストリカル・リターンがその後のリターンと負の相関関係にあることを実証した。一方、Jegadeesh and Titman (1993) は株式の短期のヒストリカル・リターンがその後のリターンと正の相関関係をもつことを実証した。すなわち、株式収益率の自己相関性が示された。これらの研究結果は、株式収益率の増分が独立であることを否定する証左である。また、株式のボラティリティにあたるパラメータ σ は一定ではなく、確率的に変動しており、その挙動は平均回帰性をもつなど、いくつかの特徴的な変動パターンが指摘されている²⁾。さらに Black (1976) は、株価とそのボラティリティの変動には負の相関関係があることを示した。すなわち、株価の下落局面ではボラティリティが上昇する傾向がある。これらの観測事実は株式収益率の増分が定常であることに反する。

もう一つは標準モデル X のサンプル・パス

の問題である。これはブラウン運動のサンプル・パスの問題と言い換えることができる。ブラウン運動 W のサンプル・パスは時刻 t に関して連続な関数となるが、いたるところ微分不可能であり、任意の時間区間でサンプル・パスの道のりが無限大になるという性質がある。一方、ブラウン運動は現時点から突然遠くへ移動することはなく、時間が t だけ進むときのブラウン運動の移動距離は高々 \sqrt{t} のオーダーとなる。すなわち、ブラウン運動のサンプル・パスは短い移動距離を激しく振動ながら進んでいることになる³⁾。ブラウン運動で記述される標準モデル (2.1) も同じ性質をもつことになるが、これらの性質は実際の株価の動きと明らかに矛盾する。近年、株式の値動きに関する高頻度データが取得できるようになったが、Ait-Sahalia and Jacod (2014) によると、微小時間区間の株価は時間に対して常に不連続に変化しており、有界変動性を示すとのことである。また、過去の混乱期で経験したように、株式市場では、株価の急落や急騰といった短時間での大幅な変動がみられることがある。こうした現象は標準モデルでは表現することができない。

次小節では、以上で述べた標準モデルの欠点を克服するために、標準モデルの拡張版を提示し、その拡張モデルの族を統一的に扱う方法を検討する。

2.2 確率的時間変更による拡張モデル

標準モデル (2.1) の拡張版として、次式で定義する株式の対数収益率過程 Y を考えよう。

$$\log \frac{S_t}{S_0} = Y_t := \mu t + \omega(\tau_t - t) + \sigma W(\tau_t). \quad (2.2)$$

ただし、 μ 、 σ 及び W は標準モデル (2.1) と同じパラメータと標準ブラウン運動であり、 $W(\tau_t)$ は時点 τ_t のブラウン運動、すなわち $W(\tau_t) := W_{\tau_t}$ である。 ω は定数パラメータであり、その役割は後述する。株式の収益率モデル (2.2) で特徴的なのは、確率時刻 (stochastic time) τ_t の存在であり、この確率過程 τ を時間変更過程 (time-change process) とよぶ。この時間変更過程 τ は任意の時刻 t に対して $E[\tau_t] = t$ を満たし、ブラウン運動 W とは独立

な非減少確率過程であると仮定する。時間変更過程 τ を明示的に与えた具体例は次節で述べるとして、以下では、株式の収益率過程 Y の一般的な性質について考察する。

まずは特別な場合として、すべての時刻で $\tau_t = t$ となることを考えてみよう。すなわち、時間変更過程 τ が確定的な場合である。このとき、確率過程 X と Y は完全に一致するので、株式の収益率モデル (2.2) は標準モデル (2.1) の拡張となっていることがわかる。したがって、式 (2.2) で定義した株式の収益率過程 Y を拡張モデルとよぶことにする。時間変更過程 τ が確率的に変動する場合には、確率的な時間変更が施されたブラウン運動 $W(\tau)$ はブラウン運動 W とは異なる性質をもち、時点 t の対数収益率 Y_t は非正規分布に従う確率変数となる。それゆえ、拡張モデル (2.2) では、収益率分布に歪度や尖度をもたせることが可能となる。時刻 t が時計の針が刻む時刻 (カレンダー時刻、calendar time) であるのに対して、確率時刻 τ_t はビジネス時刻 (business time) とよばれ、情報の到着速度に対応した仮想的な時刻と解釈するのが一般的である。例えば、 $\tau_t < t$ のときには、通常よりも市場参加者の受け取る情報が少ないため、株式市場の反応が鈍く、ゆったりした時間が流れていると解釈できる。逆に $\tau_t > t$ のときには、新しい情報がたくさん出たため株式市場が敏感に反応し、目まぐるしく株価が変動する時間帯であると解釈できる。次節で与える具体例によって明らかになるが、この解釈は拡張モデル (2.2) がいわゆる確率ボラティリティ・モデルとよばれるモデルの一般化であることを暗示している。確率過程論における確率時刻の詳細な解説については、例えば、Barndorff-Nielsen and Shiryaev (2015) を参照せよ。

次に、定数パラメータ ω の役割を考えてみよう。パラメータ ω が負の値をとるとき、ビジネス時刻 τ_t がカレンダー時刻 t を上回る状況では、拡張モデル (2.2) の右辺第二項は負の値となり、時点 t の収益率 Y_t を押し下げる方向に作用する。すなわち、株式の収益率過程 Y と時間変更過程 τ は負の相関をもつことにな

る。したがって、Black (1976) が指摘した株価とボラティリティの負の相関関係を拡張モデル (2.2) によって再現することができる。

共通のドリフト係数 μ 、拡散係数 σ 、及びブラウン運動 W をもつ標準モデル (2.1) と拡張モデル (2.2) の値はどの程度乖離するのだろうか。以下では、その理論的な関係を考察しよう。前述のとおり、時間変更過程 τ が確定的な場合には両者は一致するが、時間変更過程が確率的な場合には乖離が生じる。平均的な乖離については、ブラウン運動の性質及び時間変更過程とブラウン運動の独立性、確率時刻の平均値の仮定、補論 A に掲載した補題 1 の性質 2 により、任意の時刻 t に対して次式が成り立つことがわかる。

$$\mathbb{E}[X_t - Y_t] = 0. \quad (2.3)$$

すなわち、両者の平均値は常に等しく、単位時間あたりの期待収益率は共に μ となる。一方、時点 t の株式収益率 X_t と Y_t の差の分散は次式で与えられる。

$$\text{Var}[X_t - Y_t] = \omega^2 \text{Var}[\tau_t] + \sigma^2 \mathbb{E}[(\tau_t - t)]. \quad (2.4)$$

式 (2.4) の導出は補論 A を参照せよ。標準モデル X と拡張モデル Y の乖離は式 (2.4) によって特徴付けられる。まずは式 (2.4) の右辺第一項に着目すると、パラメータ ω の絶対値と確率時刻 τ_t の分散の大きさが X_t と Y_t の乖離の程度に影響することがわかる。次に右辺第二項に着目すると、

$$\mathbb{E}[(\tau_t - t)] = \mathbb{E}[(\tau_t - t)^+] + \mathbb{E}[(t - \tau_t)^+], \quad (2.5)$$

であることから、式 (2.5) は時間変更過程 τ を原資産とするアット・ザ・マネーのロング・ストラドルというオプション戦略の期待ペイオフと同値であることがわかる。したがって、ロング・ストラドルの解釈と同様に、時間変更過程 τ のボラティリティが高く、オプション満期 t が長期になると、式 (2.5) の値は大きくなる。式 (2.4) の右辺第二項は、このロング・ストラドルを σ^2 単位保有していることと同値なのである。式 (2.5) の解析的表現については補論 B を参照せよ。以上のように、拡

張モデル (2.2) による株式収益率の変動は標準モデル (2.1) のそれと一定の類似性をもつが、その乖離は式 (2.4) で評価できることがわかった。Miyachi et al. (2019) と Shiraya et al. (2019) では、このようなモデルの類似性を巧みに利用してデリバティブ価格の効率的な評価方法を提案している。

本節の最後に、拡張モデルが生成する時点 t の対数収益率 Y_t に関する確率分布の性質について述べよう。本稿では、確率変数 Y_t の確率分布の性質を特定するために、特性関数を利用するアプローチを推奨するが、その理由は以下のとおりである。まず、拡張モデル (2.2) では、確率変数 Y_t の確率密度関数が閉じた形式で得られない場合があるので、確率密度関数による包括的な議論はできない。次に、確率変数 Y_t の積率母関数は存在しない可能性があり、仮に存在したとしても、積率母関数から確率分布を得るための両側逆ラプラス変換の数値計算は一般に不安定であるため、積率母関数を直接扱うことは適切とはいえない。それに対して、複素平面上で定義される確率変数 Y_t の特性関数は常に存在し、特性関数から確率分布を得るための逆フーリエ変換にはいくつかの効率的な計算アルゴリズムが知られている。さらに次式で示すように、拡張モデル (2.2) に関する確率分布の特性関数は一般的な形式が得られるため、統一的な議論が可能である。すなわち、時点 t の株式の対数収益率 Y_t の特性関数は

$$\Phi_{Y_t}(\theta) := \mathbb{E}[e^{i\theta Y_t}] = e^{i\theta(u - \omega)t} \Phi_{\tau_t}\left(\theta\omega + \frac{1}{2}i\theta^2\sigma^2\right), \quad (2.6)$$

と表現することができる。したがって、時点 t の確率時刻 τ_t の特性関数 $\Phi_{\tau_t}(\theta)$ が既知であれば、株式収益率 Y_t の特性関数が特定できる。ただし、 θ は特性関数のパラメータ、 $i := \sqrt{-1}$ は虚数単位である。特性関数の表現 (2.6) の導出については補論 C を参照せよ。このような形式で特性関数が統一的に表現できるため、拡張モデル (2.2) では、様々な変動パターンをもつ株式の収益率過程を比較的容易に解析することができる。すなわち、拡張モデル (2.2) では、それぞれの具体的なモデルを別個に解析す

る必要はなく、株式の収益率過程 Y の部品となる時間変更過程 τ の個別性のみに着目すればよい。複数のモデルを検討する際には、モデル分析の効率性の観点から、これは非常に大きな利点となる。なお、すべての時刻で $\tau_t = t$ となるとき、式 (2.6) は平均 μt 、分散 $\sigma^2 t$ をもつ正規分布の特性関数に一致することが容易に確認できる。

本小節の議論で明らかのように、拡張モデル (2.2) の特徴は時間変更過程 τ で決まるので、次節では、いくつかの重要な時間変更過程を具体的に与え、株式収益率の変動に対してどのようなモデル化が可能であるかを論じよう。

3 具体的な拡張モデル

3.1 従属過程による時間変更

本小節では、非減少レヴィ過程による時間変更を紹介しよう。レヴィ過程とは、その増分が独立かつ定常であり、サンプル・パスが右連続かつ左極限をもつ確率過程である。すなわち、サンプル・パスが不連続でジャンプを伴う確率過程である。非減少レヴィ過程で定義される時間変更過程を従属過程 (subordinator) といい、これによるブラウン運動の時間変更をブラウン運動の従属化 (Brownian subordination) とよぶことがある。時刻は過去に遡ることがないので、従属過程は必ず非減少確率過程としてモデル化される。従属化されたブラウン運動はレヴィ過程になることが知られており、したがって、拡張モデル (2.2) は不連続なサンプル・パスをもつ収益率過程となる。しかしながら、レヴィ過程の増分の独立性と定常性も拡張モデルに継承されるので、標準モデルの欠点の一部は解消されない。

時間変更過程 τ が従属過程であるとき、レヴィ・ヒンチンの公式より、確率時刻 τ_t の特性関数は

$$\Phi_{\tau_t}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta\tau_t}] = \exp\{t\phi_{\tau}(\theta)\}, \quad (3.1)$$

と表現することができる。上式の $\phi_{\tau}(\theta)$ を従属過程 τ の特性指数とよぶ。式 (3.1) より、確率時刻 τ_t のキュムラント母関数⁴⁾ が時刻 t と特

性指数 $\phi_{\tau}(\theta)$ の積に分離できることがわかる。特性指数は単位時間における確率時刻 τ_1 のキュムラント母関数であることに注意せよ。したがって、時間変更過程 τ に従属過程を適用する拡張モデルでは、確率時刻 τ_1 をモデル化して、特性指数 $\phi_{\tau}(\theta)$ を調べれば十分なのである。

3.1.1 ガンマ過程

その増分がガンマ分布に従う従属過程をガンマ過程 (gamma process) とよぶ。すなわち、ガンマ過程とは

$$\tau_1 \sim G\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}\right),$$

としてモデル化された従属過程である。ただし、 $G(a, b)$ は形状パラメータ a 、尺度パラメータ b をもつガンマ分布を表す。通常のガンマ分布では、形状パラメータと尺度パラメータは独立に設定され、2つのパラメータをもつ確率分布となるが、拡張モデル (2.2) では、時間変更の仮定 $\mathbb{E}[\tau_t] = t$ があるため、自由度がひとつ落ちるので、1つのパラメータ κ だけでガンマ分布が特定される。確率時刻 τ_t の分散は $\text{Var}[\tau_t] = \kappa t$ となる。

ガンマ過程の特性指数は

$$\phi_{\tau}(\theta) = -\frac{1}{\kappa} \log(1 - i\theta\kappa), \quad (3.2)$$

となり、ガンマ過程を時間変更過程とする拡張モデル (2.2) の確率統計的性質は式 (3.2) と式 (2.6) で特定される。この拡張モデルは、バリエアンス・ガンマ過程 (variance gamma process) という名称で Madan and Seneta (1990) によって最初に提案された。このモデルでは、時点 t の株式収益率 Y_t の確率分布は歪度と尖度を持ち、パラメータ κ が尖度の程度を決定する。サンプル・パスはいたるところ不連続であり、有界変動性をもつ。バリエアンス・ガンマ過程の特徴は、有限の時間区間で無限回のジャンプをしているが、相対的には少ない頻度で細かいジャンプを繰り返す点にある。以上の性質は現実の株価の動きを記述するには大変よい性質である。

3.1.2 逆ガウス過程

その増分が逆ガウス分布 (inverse Gaussian distribution) に従う従属過程を逆ガウス過程 (inverse Gaussian process) とよぶ。逆ガウス分布はワルド分布ともいう。すなわち、逆ガウス過程とは

$$\tau_1 \sim \text{IG}\left(1, \frac{1}{\kappa}\right),$$

としてモデル化された従属過程である。ただし、 $\text{IG}(a, b)$ は平均パラメータ a 、形状パラメータ b をもつ逆ガウス分布を表す。通常の逆ガウス分布では、平均パラメータと形状パラメータは独立に設定され、2つのパラメータの確率分布となるが、ガンマ過程の場合と同様の理由により、確率時刻 τ_1 の分布は1つのパラメータ κ だけで決定される。確率時刻 τ_t の分散もガンマ過程と同じく、 $\text{Var}[\tau_t] = \kappa t$ になる。

逆ガウス過程の特性指数は

$$\phi_\tau(\theta) = -\sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left(\sqrt{\frac{1}{2\kappa} - i\theta} - \sqrt{\frac{1}{2\kappa}} \right), \quad (3.3)$$

となり、逆ガウス過程を時間変更過程とする拡張モデル (2.2) の確率統計的性質は式 (3.3) と式 (2.6) で特定される。この拡張モデルは、正規逆ガウス過程 (normal inverse Gaussian process) という名称で知られ、Barndorff-Nielsen (1997) によって最初に提案された。この拡張モデルでも、任意の時点 t の株式収益率 Y_t の確率分布は歪度と尖度を持ち、パラメータ κ が尖度の程度を決定することになる。サンプル・パスはバリエンス・ガンマ過程と同様、いたるところ不連続で有限の時間区間で無限回のジャンプをする。バリエンス・ガンマ過程と異なるのは、正規逆ガウス過程は非常に高い頻度で細かいジャンプを繰り返しており、有界変動性をもたない点である。

3.2 アクティビティ・レートによる時間変更

本小節では、確率過程の時間に関する積分によって定義される時間変更過程の例を紹介しよう。ある非負値確率過程 v を用いて時間変更過程 τ を次のように定義する。

$$\tau_t = \int_0^t v_u - du, \quad (3.4)$$

非負値確率過程 v をアクティビティ・レート (activity rate) とよび、これが本小節のモデル化の対象となる。アクティビティ・レートは非負値をとるため、式 (3.4) で定義された時間変更過程 τ は明らかに非減少確率過程となる。また、確率時刻の平均値が $\mathbb{E}[\tau_t] = t$ を満たすためには、任意の時刻 t で $\mathbb{E}[v_t] = 1$ となる必要がある。確率時刻 (3.4) の特性関数は

$$\Phi_{\tau_t}(\theta) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^t v_u - du \right\} \right], \quad (3.5)$$

と書けるため、形式的には確率過程 v をスポット・レートとする割引債価格の表現に類似している。したがって、いくつかのアクティビティ・レートに対しては、特性関数 (3.5) の閉じた形式が広く知られている。また、ブラウン運動の性質より、

$$\sigma W(\tau_t) = \sigma W \left(\int_0^t v_u - du \right) = \int_0^t \sigma \sqrt{v_u} - dW_u, \quad (3.6)$$

が成り立つので、拡張モデル (2.2) は $\sigma \sqrt{v}$ をボラティリティ変動過程とする確率ボラティリティ・モデルであると解釈できる。

現実のボラティリティの変動特性を捉えるために、アクティビティ・レート v には平均回帰性をもたせてモデル化することが多く、この場合には、拡張モデル (2.2) の増分は非定常となる。アクティビティ・レートの確率変動が株式の収益率分布の尖度を生成し、パラメータ ω に負の値を設定することで、Black (1976) が指摘した株価とボラティリティの負の相関関係を再現することができる。ただし、この相関関係のモデル化は通常確率ボラティリティ・モデルのそれとは異なるので注意を要する。通常確率ボラティリティ・モデルでは、ブラウン運動 W とアクティビティ・レート v の間に直接相関をもたせる⁵⁾ ことが多い。

3.2.1 平方根過程

アクティビティ・レート v が確率微分方程式

$$dv_t = a(1 - v_t)dt + c\sqrt{v_t}dB_t, \quad (3.7)$$

に従う場合を考えよう。ただし、 a と c はフェラー条件 (Feller condition) とよばれる不等式

$2a > c^2$ を満たす正の定数パラメータ、 B は W と独立な標準ブラウン運動であり、アクティビティ・レートの初期値は $v_0=1$ とする。確率微分方程式 (3.7) に従う確率過程は平方根過程 (square root process) とよばれ、フェラー条件は平方根過程が必ず正の値をとるための制約条件である。確率微分方程式 (3.7) で規定されたアクティビティ・レート v は確率的に変動するが、1 の値に平均回帰するので、任意の時刻 t に対して $\mathbb{E}[v_t]=1$ となることが保証される。パラメータ a が平均回帰の強さを制御し、パラメータ c がアクティビティ・レートの確率的な変動の程度を決定する。時点 t の平方根過程 v_t の分散は

$$\text{Var}[v_t] = \frac{c^2}{a} (e^{-at} - e^{-2at}) + \frac{c^2}{2a} (1 - e^{-at})^2, \quad (3.8)$$

となることが知られている。平方根過程 (3.7) はブラウン運動によって駆動しているため、そのサンプル・パスは時間に対して連続となる。したがって、平方根過程 (3.7) の時間積分として定義される時間変更過程 (3.4) のサンプル・パスは時間に対して C^1 級の関数となる。この性質は前小節で紹介した従属過程のサンプル・パスとの大きな違いである。

平方根過程をアクティビティ・レートとする確率時刻 τ_t の特性関数 (3.5) は閉じた形式が知られている。例えば、Yamazaki (2018) の 5.1 節を参照せよ。式 (3.6) を適用すると、平方根過程 (3.7) によって時間変更された拡張モデル (2.2) は Heston (1993) が提案した確率ボラティリティ・モデル (以下、ヘストン・モデルとよぶ) と等価であることがわかる。ヘストン・モデルはブラック・ショールズ・モデルの一連の拡張モデルのなかでも、最も多くの応用事例が存在する著名なモデルである。

3. 2. 2 その他のアクティビティ・レート

Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) はレヴィ過程によって駆動する平均回帰過程をアクティビティ・レートに採用して、ボラティリティ変動過程が不連続にジャンプする確率ボラティリティ・モデルを提案した。また、

Yamazaki (2016) は Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) のモデルを一般化して、エキゾティック・オプションの価格評価に応用した。

Leippold and Wu (2002) はアクティビティ・レートに 2 次ガウス過程 (quadratic Gaussian process) を用いた確率ボラティリティ・モデルを提案した。このモデルでは、ボラティリティの急騰など、株式収益率の分散過程について非線形な変動を表現することができる。

3. 3 二重時間変更

本小節では、確率的な時間変更を繰り返し適用することで、新しい拡張モデルを生成できることを簡潔に説明する。詳しい解説は Carr et al. (2003) や Carr and Wu (2004) を参照せよ。

2 つの独立な時間変更過程 τ と η を考えよう。独立性と確率時刻の平均値の仮定より、

$$\mathbb{E}[\tau(\eta_t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tau_u | \eta_t = u]] = \mathbb{E}[\eta_t] = t,$$

となるので、二重時間変更 $\tau(\eta)$ もやはり時間変更過程になる。二重時間変更による確率時刻 $\tau(\eta_t)$ の特性関数は

$$\Phi_{\tau(\eta_t)}(\theta) = \int_0^\infty \Phi_{\tau_u}(\theta) f_{\eta_t}(u) du, \quad (3.9)$$

と表現できる。ただし、 $f_{\eta_t}(x)$ は確率時刻 η_t の確率密度関数を表す。一般には、二重時間変更は非可換であり、式 (3.9) の閉じた形式を得ることは難しい。ところが、時間変更過程 τ が従属過程である場合には、式 (3.1) より、

$$\Phi_{\tau(\eta_t)}(\theta) = \Phi_{\eta_t}(-i\phi_\tau(\theta)), \quad (3.10)$$

が成り立ち、 τ の特性指数を用いて式 (3.9) を簡潔に表現することができる。したがって、この場合には、確率時刻 τ_t の特性指数と確率時刻 η_t の特性関数の閉じた形式が既知であれば、二重時間変更の特性関数 (3.10) の閉じた形式を得ることができる。

式 (3.10) の性質を利用して二重時間変更した拡張モデル (2.2) は時間変更レヴィ過程 (time-changed Lévy process) として知られており、Carr and Wu (2004) により提案された。時間変更レヴィ過程は従属過程による時間変更

とアクティビティ・レートによる時間変更の両方の長所をもたせることができ、株式の収益率過程の精緻なモデル化が可能になるが、その一方でモデルの解析は複雑になる。時間変更レヴィ過程のファイナンスへの応用は最先端分野の一つであり、Yamazaki (2014)、Umezawa and Yamazaki (2015)、Zeng and Kwok (2016)、Cui et al. (2019) などで研究の進展がみられる。

4 サンプル・パスの生成

本節では、標準モデルと拡張モデルのサンプル・パスをモンテカルロ・シミュレーションによって生成し、それらのグラフを比較する。拡張モデルとして、3.1.1 節のバリアンス・ガンマ (VG) 過程、3.1.2 節の正規逆ガウス (NIG) 過程、及び 3.2.1 節のヘストン・モデルの 3 つを実装する。各モデルのパラメータの値は表 1 に掲示した。すべてのモデルにおいて、期待収益率 μ を年率 7% とし、パラメータ σ を 0.2 と置いた。すなわち、標準モデルの株式のボラティリティ (株式収益率の標準偏差) が年率 20% になるように設定した。ただし、拡張モデルの株式収益率の標準偏差は 20% よりも大きくなる。パラメータ ϖ は負値なので、拡張モデルは負の歪度をもつ株式収益率分布を生成することになる。パラメータ κ は VG 過程と NIG 過程の確率時刻 τ_1 の分散に等しいので、これらの時間変更過程であるガンマ過程と逆ガウス過程の標準偏差はともに年率 10% になる。また、式 (3.8) を用いて計算すると、ヘストン・モデルのアクティビティ・レートの標準偏差は年率 34.7% になる。

4.1 時間変更過程のサンプル・パス

図 1 の上段及び左下のグラフには、各拡張モデルの時間変更過程のサンプル・パスを表示した。それぞれのグラフの横軸はカレンダー時刻、縦軸はビジネス時刻であり、破線で示した対角線は標準モデルにおけるビジネス時刻の進捗を表している。実線の軌跡が時間変更過程のサンプル・パスである。確率時刻の平均値は $\mathbb{E}[\tau_t]=t$ なので、各時間変更過程のサンプル・パスは破線を中心線として増加しているが、確率変動要因により、破線からの乖離が生じている。サンプル・パスが破線の下側に位置するときは、株式市場が比較的落ち着いている時間帯であり、上側に位置するときは、相場が荒れている時間帯である。

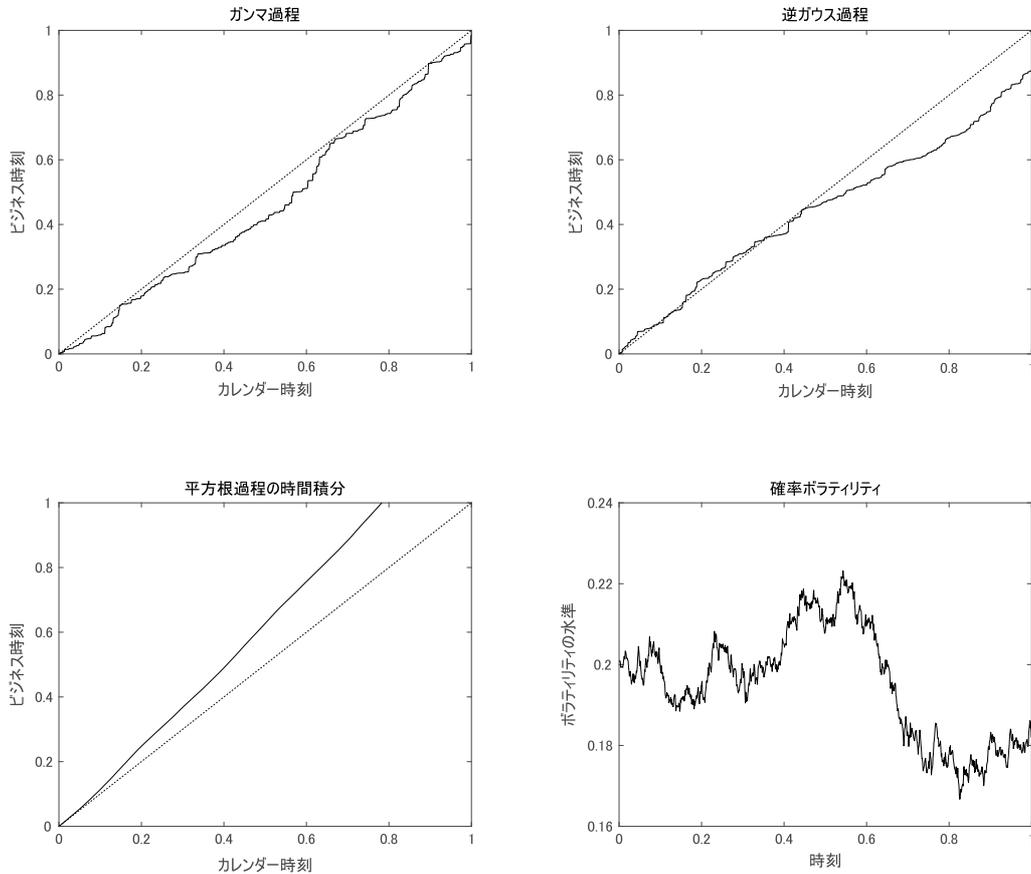
図 1 の上段の 2 つのグラフはガンマ過程と逆ガウス過程のサンプル・パスである。2 つの確率過程はともに非減少レヴィ過程なので、不連続で滑らかではないサンプル・パスを描いている。グラフから直接読み取るとは難しいが、これらのサンプル・パスは小刻みにジャンプしている不連続な軌跡なのである。ガンマ過程と逆ガウス過程は一見すると同じようなサンプル・パスに見えるが、後で示すように、これらによって時間変更された拡張モデルはかなり異なる性質をもつサンプル・パスを描くことになる。

図 1 の左下のグラフは平方根過程の時間に関する積分で定義された時間変更過程のサンプル・パスである。前述の時間変更過程のサンプル・パスと大きく異なる点は、平方根過程をアクティビティ・レートとする時間変更過程のサンプル・パスは滑らかな軌跡を描くという点である。なぜなら、3.2.1 節で説明したとおり、このサンプル・パスは C^1 級の関数となるから

表 1：各モデルのパラメータ値

	μ	σ	ϖ	κ	a	c
標準モデル	0.07	0.2				
VG 過程	0.07	0.2	-0.1	0.01		
NIG 過程	0.07	0.2	-0.1	0.01		
ヘストン	0.07	0.2	-0.1		0.3	0.4

図1：ビジネス時刻と確率ボラティリティのサンプル・パス



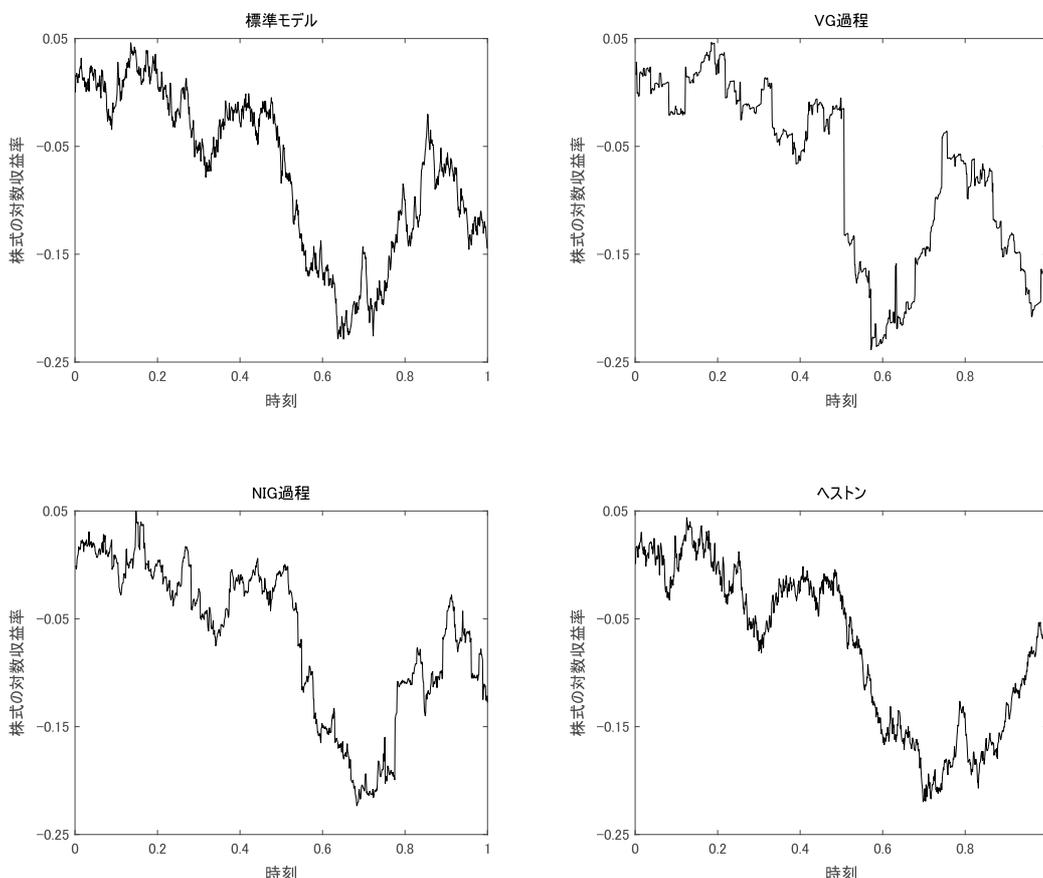
である。図1の右下のグラフはヘストン・モデルのボラティリティ変動過程 $\sigma\sqrt{v}$ のサンプル・パスを表示している。ボラティリティ変動過程の初期値と平均回帰の水準はともに $\sigma\sqrt{v_0}=0.2$ 、すなわち20%である。このグラフからは、ボラティリティが確率的に変動しながらも、遠方には拡散せずに20%の水準に回帰する様子がみてとれる。

4.2 1年間の株式収益率のサンプル・パス

図2には、標準モデルと各拡張モデルによって生成した1年間の株式収益率のサンプル・パスを表示した。各サンプル・パスともに同じブラウン運動のサンプル・パスが基になっており、時間変更過程 τ のサンプリングの違いとパラメータ ω の影響により、それぞれの株式収

益率のサンプル・パスに差異が生じている。標準モデル（左上グラフ）とヘストン・モデル（右下グラフ）では、サンプル・パスが常に小刻みに振動しながら変動している様子がみてとれる。一方、VG過程（右上グラフ）とNIG過程（左下グラフ）では、所々でサンプル・パスの急騰や急落がみられ、特に、VG過程ではその頻度が高くなっている。しかしながら、次小節以降でみる短期間のサンプル・パスと比較すると、互いのサンプル・パスの違いは然程顕著とはいえない。1年間の株式収益率のサンプル・パスはどのモデルでもそれらしい軌跡を描いており、一見するとこれら3つの拡張モデルを使い分ける必要性は高くないように思われる。

図2：1年間の株式収益率のサンプル・パス



4.3 1ヶ月間の株式収益率のサンプル・パス

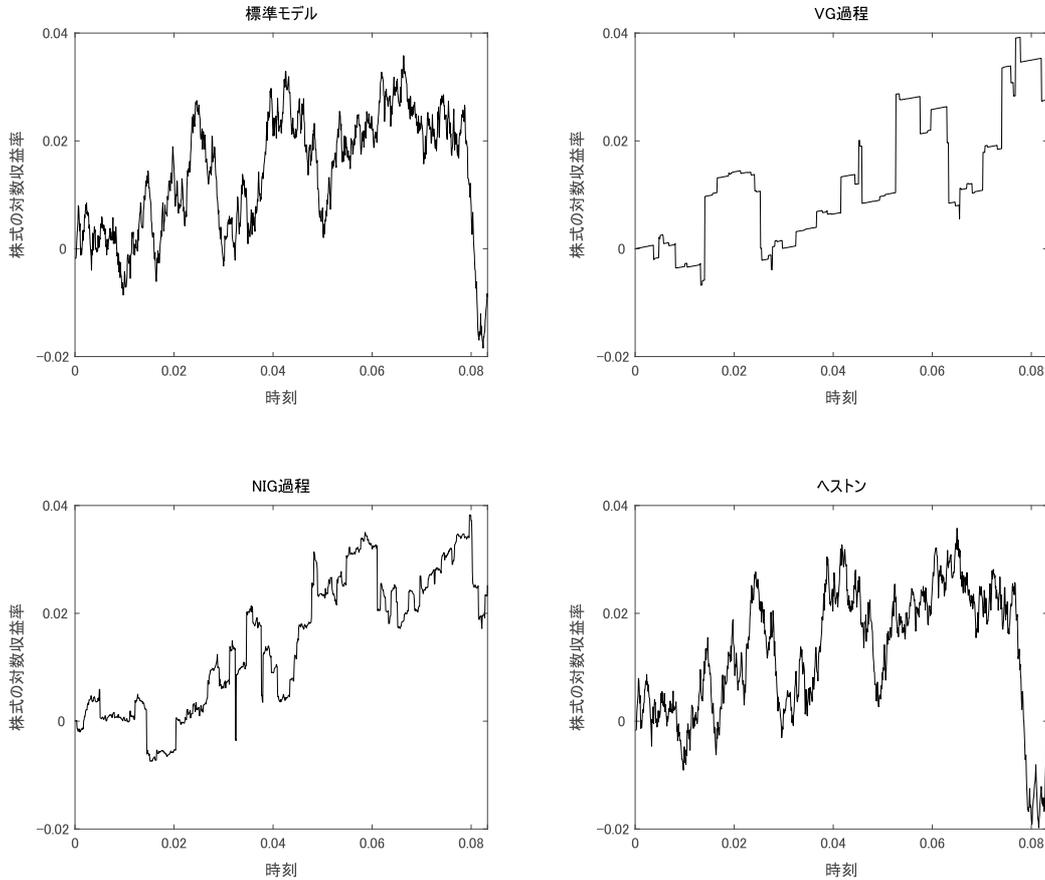
図3には、標準モデルと各拡張モデルによって生成した1ヶ月間の株式収益率のサンプル・パスを表示した。すなわち、この図は図2にある1年間の株式収益率のサンプル・パスを1ヶ月間の尺度に拡大表示したグラフである。1ヶ月間のサンプル・パスを描くと、標準モデルと各拡張モデルの特徴が顕著に現れる。まず、標準モデルのサンプル・パス（左上グラフ）は1年間のサンプル・パス（図2の左上グラフ）と区別するのが難しいほど、似たような特徴をもつ軌跡を描いている。標準モデルの1ヶ月間のサンプル・パスは1年間のサンプル・パスの自己相似形であり、常に小刻みに振動しながら連続的に変動しているのである。一方、VG過程とNIG過程のサンプル・パス

（右上と左下のグラフ）は不連続であり、常に大小のジャンプを繰り返しながらその軌跡を描いている。また、この不連続性の特徴はVG過程の方が顕著である。ヘストン・モデルのサンプル・パス（右下グラフ）は標準モデルのそれと同じように見えるが、グラフの右側を比較すると、ヘストン・モデルでは、株価下落時にボラティリティが上昇している様子がみてとれる。このように、ヘストン・モデルはBlack (1976) が指摘した株価とボラティリティの負の相関関係を再現することができる。

4.4 1週間の株式収益率のサンプル・パス

図4には、標準モデルと各拡張モデルによって生成した1週間の株式収益率のサンプル・パスを表示した。すなわち、この図は図3に

図3：1ヶ月間の株式収益率のサンプル・パス



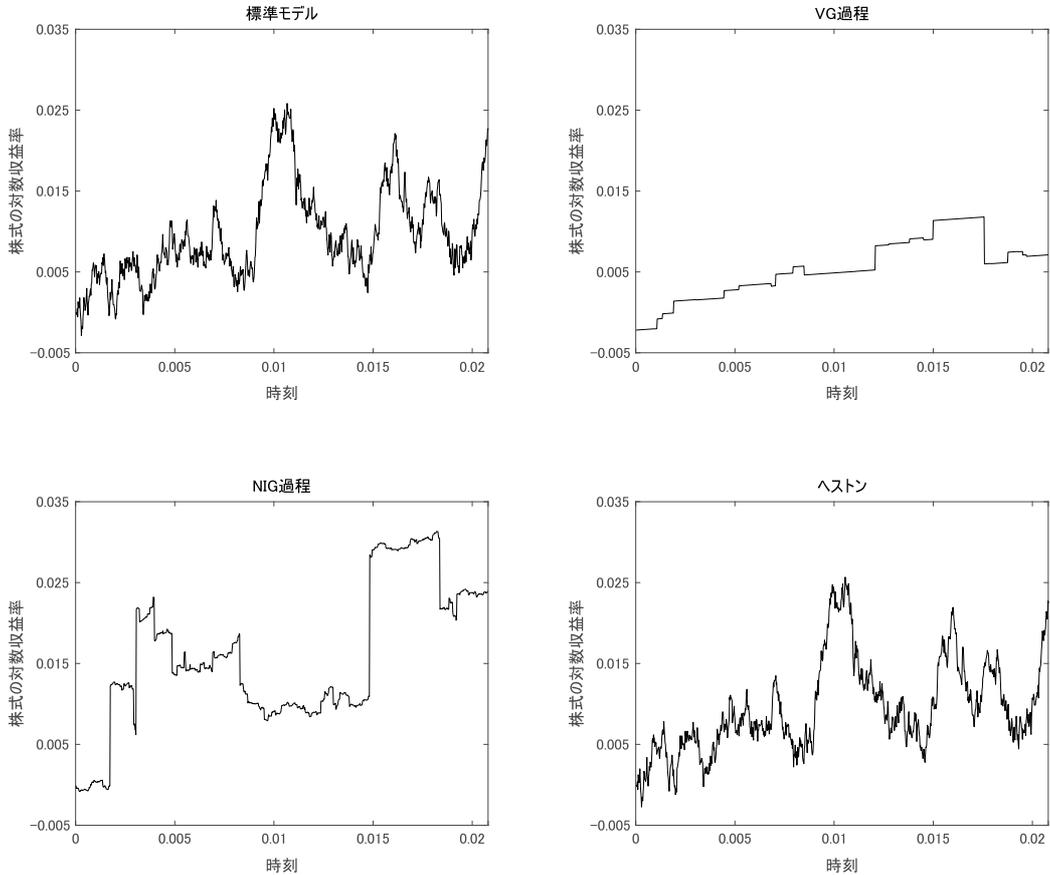
ある1ヶ月間の株式収益率のサンプル・パスをさらに1週間の尺度に拡大表示したグラフである。1週間のサンプル・パスを描くと、標準モデルと各拡張モデルの特徴がさらに顕著に現れる。標準モデルのサンプル・パス（左上グラフ）は1年間や1ヶ月間のサンプル・パス（図2及び図3の左上グラフ）と同様に常に小刻みに振動しながら連続的に変動している。この現象はブラウン運動の自己相似性に起因したものである。また、ヘストン・モデルのサンプル・パス（右下グラフ）は標準モデルのそれと概ね一致してしまう。短期の時間区間では、ヘストン・モデルは標準モデルとほぼ同じモデルとしてサンプル・パスを生成するのである。その一方で、ジャンプ・モデルであるVG過程とNIG過程のサンプル・パス（右上と左下のグ

ラフ）は標準モデルのそれとはまったく異質な軌跡を描いており、自己相似性がみられない。これらのサンプル・パスは「取引が少なく値動きの小さい時間帯が多いが、取引があった場合には大きく変動する株価」を表現するのに適している。つまり、VG過程とNIG過程は流動性の低い個別銘柄との相性がよい拡張モデルなのである。

5 おわりに

本稿前半では、ブラック・ショールズ・モデルのいくつかの拡張モデルが確率的な時間変更によって表現でき、さらには統一的に解析できることを示した。これに該当する拡張モデルは、ジャンプ・モデルや確率ボラティリティ・

図4：1週間の株式収益率のサンプル・パス



モデルなどの著名なモデルだけでなく、時間変更レヴィ過程のような先端的なモデルも含まれる。さらには、多重時間変更を考えることで新しい株式収益率モデルの提案も比較的容易にできることを示唆した⁶⁾。したがって、本稿の主題である「ブラック・ショールズ・モデルの拡張モデルを時間変更の観点から整理する」ことは、モデル解析の効率化だけでなく、手法の汎用化や理論の一般化などの面で多くの利点がある。すなわち、それぞれの拡張モデルを個別に検討するのではなく、本稿第2.2節で示した一般表現のままで議論が展開できれば、個別のモデルにその結果を落とし込むことは容易なのである。

また、本稿後半では、いくつかの具体的な拡張モデルのサンプル・パスを生成して、それら

の特徴を比較した。正規分布を基礎とする標準モデルは現実の株価の動きと矛盾するいくつかの欠点をもつが、拡張モデルでは、それら欠点を克服することができる。本研究では、時間尺度の異なるサンプル・パスを描くことで、各拡張モデルの特徴を視覚的に確認した。今回の数値実験の結果は、「ある企業の株価変動を表現するためには、どのようなモデルを採用すべきか」との問いに答えるための一助となるであろう。

補論A 式(2.4)の導出

補題1 時間変更過程 τ 、時間変更されたブラウン運動 $W(\tau)$ 、ブラウン運動 W に関する期待値演算に対して次の性質が成り立つ。

1. $\mathbb{E}[(\tau_t - t)^2] = \text{Var}[\tau_t]$.
2. $\mathbb{E}[W_t(\tau_t - t)] = 0$.
3. $\mathbb{E}[W(\tau_t)^2] = t$.
4. $\mathbb{E}[W_t W(\tau_t)] = -\frac{1}{2} \mathbb{E}[|\tau_t - t|] + t$.
5. $\mathbb{E}[W(\tau_t)(\tau_t - t)] = 0$.

補題 1 の証明：性質 1 は確率時刻の期待値が $\mathbb{E}[\tau_t] = t$ であることより自明である。性質 2 は時間変更過程 τ とブラウン運動 W の独立性より自明である。性質 3 については、時間変更過程 τ とブラウン運動 W の独立性と繰り返し期待値の法則より、

$$\mathbb{E}[W(\tau_t)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_u^2 | \tau_t = u]] = \mathbb{E}[\tau_t] = t,$$

が成り立つ。性質 4 については、ブラウン運動の性質 $\mathbb{E}[W_t^2] = t$ と性質 2 より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t W(\tau_t)] &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}[(W_t - W(\tau_t))^2] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[W_t^2] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[W(\tau_t)^2] \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}[|\tau_t - t|] + t, \end{aligned}$$

が成り立つ。性質 5 については、繰り返し期待値の法則より、

$$\mathbb{E}[W(\tau_t)(\tau_t - t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_u(u - t) | \tau_t = u]] = 0,$$

となることがわかる。 \square

式 (2.4) の導出：式 (2.3) より、 X_t と Y_t の差の分散は、

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_t - Y_t] &= \mathbb{E}[(X_t - Y_t)^2] \\ &= \sigma^2 \mathbb{E}[W_t^2] + \omega^2 \mathbb{E}[(\tau_t - t)^2] + \sigma^2 \mathbb{E}[W(\tau_t)^2] \\ &\quad - 2\sigma\omega \mathbb{E}[W_t(\tau_t - t)] - 2\sigma^2 \mathbb{E}[W_t W(\tau_t)] \\ &\quad + 2\sigma\omega \mathbb{E}[W(\tau_t)(\tau_t - t)], \end{aligned}$$

と展開できる。ゆえに、補題 1 とブラウン運動の性質 $\mathbb{E}[W_t^2] = t$ より、式 (2.4) が得られる。 \square

補論 B 式 (2.5) の計算方法

補題 2 任意の確率変数 Z の特性関数を $\Phi(\theta)$ とする。このとき、任意の定数 a に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z 1_{\{Z \leq a\}}] &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Re[e^{-i\theta a} \frac{d}{d\theta} \Phi(\theta)]}{\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

ただし、 1_A は事象 A が真ならば 1、偽ならば 0 を出力する指示関数であり、 $\Re[w]$ は複素数 w の実部を表す。

補題 2 の証明：確率変数 Z の累積分布関数を $F(z)$ とすると、次の関係式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty z e^{i\theta z} dF(z) &= i^{-1} \frac{d}{d\theta} \Phi(\theta), \\ \int_{-\infty}^\infty z e^{-i\theta z} dF(z) &= -i^{-1} \frac{d}{d\theta} \Phi(-\theta), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

が成り立つことと、符号関数が以下のように表現できることに注意しよう。

$$\begin{aligned} \text{sgn}(z - a) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\theta(z - a)}{\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} -1 & \text{if } z < a, \\ 0 & \text{if } z = a, \\ 1 & \text{if } z > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ここで確率変数 $Z \text{sgn}(Z - a)$ を考えると、符号関数の定義から、その期待値は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty z \text{sgn}(z - a) dF(z) &= -\mathbb{E}[Z 1_{\{Z \leq a\}}] + \mathbb{E}[Z 1_{\{Z > a\}}] \\ &= \mathbb{E}[Z] - 2\mathbb{E}[Z 1_{\{Z \leq a\}}]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

一方で、式 (B.3) の最初の等式と式 (B.2) の関係、及びフビニの定理より、この期待値は次式としても表現できる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty z \text{sgn}(z - a) dF(z) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty z \int_0^\infty \frac{\sin\theta(z - a)}{\theta} d\theta dF(z) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\theta \frac{1}{i\theta} \int_{-\infty}^\infty z (e^{-i\theta(z - a)} - e^{i\theta(z - a)}) dF(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\theta a} \frac{d}{d\theta} \Phi(-\theta) + e^{-i\theta a} \frac{d}{d\theta} \Phi(\theta)}{\theta} d\theta. \\
&= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \left(i\theta \omega - \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 \right) \tau_t \right\} \right] \\
&= \Phi_{\tau_t} \left(\theta \omega + \frac{1}{2} i \theta^2 \sigma^2 \right), \quad (\text{C.1})
\end{aligned}$$

(B.5)

したがって、オイラーの公式より

$$\begin{aligned}
&e^{i\theta a} \frac{d}{d\theta} \Phi(-\theta) + e^{-i\theta a} \frac{d}{d\theta} \Phi(\theta) \\
&= 2\Re \left[e^{-i\theta a} \frac{d}{d\theta} \Phi(\theta) \right],
\end{aligned}$$

が成り立つので、式 (B.4) と式 (B.5) の等価性より、式 (B.1) が得られる。□

命題 1 時間変更過程 τ に対して次式が成り立つ。

$$\mathbb{E}[|\tau_t - t|] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Re \left[\frac{d}{d\theta} (e^{-i\theta t} \Phi_{\tau_t}(-\theta)) \right]}{\theta} d\theta. \quad (\text{B.6})$$

命題 1 の証明：まずは、 $\mathbb{E}[\tau_t] = t$ と $(\tau_t - t)^+ = (\tau_t - t) + (t - \tau_t)^+$ であることから

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\tau_t - t|] &= \mathbb{E}[(\tau_t - t)^+] + \mathbb{E}[(t - \tau_t)^+] \\
&= 2\mathbb{E}[(t - \tau_t)^+], \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう。ここで、

$$\mathbb{E}[(t - \tau_t)^+] = t\mathbb{P}(\tau_t \leq t) - \mathbb{E}[\tau_t 1_{\{\tau_t \leq t\}}], \quad (\text{B.8})$$

なので、式 (B.8) の右辺第 1 項はレヴィの反転公式⁷⁾、第 2 項は補題 2 が適用できる。オイラーの公式より、

$$\begin{aligned}
&\Im [te^{-i\theta t} \Phi_{\tau_t}(\theta)] + \Re \left[e^{-i\theta t} \frac{d}{d\theta} \Phi_{\tau_t}(\theta) \right] \\
&= \Re \left[\frac{d}{d\theta} (e^{-i\theta t} \Phi_{\tau_t}(-\theta)) \right],
\end{aligned}$$

となるので、式 (B.8) と式 (B.7) より、式 (B.6) が得られる。ただし、 $\Im[w]$ は複素数 w の虚部を表す。□

補論 C 特性関数の表現 (2.6) の導出

時間変更過程 τ とブラウン運動 W の独立性と繰り返し期待値の法則より、

$$\mathbb{E}[e^{i\theta(\omega\tau_t + \sigma W(\tau_t))}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\theta(\omega u + \sigma W_u)} | \tau_t = u]]$$

となる。式 (C.1) の 2 番目の等号では、正規分布の特性関数の表現を利用した。式 (C.1) より、時点 t の株式の対数収益率 Y_t の特性関数の表現 (2.6) が得られる。□

*本研究は JSPS 科研費 JP26380402 及び法政大学イノベーション・マネジメント研究センターの助成を受けています。

注

- 1) 負の歪度は S&P500 などの株価指数の収益率分布でよく観測される。詳しくは、Cont and Tankov (2003) を参照せよ。
- 2) 詳しくは、Bergomi (2016) 及びその中の参考文献を参照せよ。
- 3) ブラウン運動のサンプル・パスの性質については、例えば、Karatzas and Shreve (1991) を参照せよ。
- 4) ここでは、特性関数を自然対数で変換した関数をキュムラント母関数とよんだ。ただし一般には、積率母関数を自然対数で変換した関数として定義される。
- 5) 例えば、Heston (1993) を参照せよ。
- 6) 新しい確率過程の生成は可能だが、ファイナンスとして意味のあるモデルか否かは慎重な検討が必要である。
- 7) より厳密には、特性関数の逆フーリエ変換によって累積分布関数を得るための公式「Gil-Pelaez の定理」を適用する。

参考文献

- [1] Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. *High-Frequency Financial Econometrics*. Princeton University Press, 2014.
- [2] Barndorff-Nielsen, O. Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, 2(1):41-68, 1997.

- [3] Barndorff-Nielsen, O. and Shephard, N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63(2):167–241, 2001.
- [4] Barndorff-Nielsen, O. and Shiryaev, A. *Change of Time and Change of Measure*. World Scientific, 2015.
- [5] Bergomi, L. *Stochastic Volatility Modeling*. Chapman and Hall, 2016.
- [6] Black, F. Studies of stock price volatility changes. In *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association*, pages 177–181, Washington, DC., 1976.
- [7] Black, F. and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [8] Carr, P. and Wu, L. Time-changed Lévy processes and option pricing. *Journal of Financial Economics*, 71(1):113–141, 2004.
- [9] Carr, P., Geman, H., Madan, D. and Yor, M. Stochastic volatility for Lévy processes. *Mathematical Finance*, 13(3):345–382, 2003.
- [10] Cont, R. and Tankov, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall, 2003.
- [11] Cui, Z., Kirkby, L. and Nguyen, D. A general framework for time-changed Markov processes and applications. *European Journal of Operational Research*, 273(2):785–800, 2019.
- [12] De Bondt, W. and Thaler, R. Does the stock market overreact? *Journal of Finance*, 40(3):793–805, 1985.
- [13] Heston, S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.
- [14] Jegadeesh, N. and Titman, S. Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *Journal of Finance*, 48(1):65–91, 1993.
- [15] Karatzas, I. and Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1991.
- [16] Leippold, M. and Wu, L. Asset pricing under the quadratic class. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(2):271–295, 2002.
- [17] Madan, D. and Seneta, E. The variance gamma (VG) model for share market returns. *Journal of Business*, 63(4):511–524, 1990.
- [18] Miyachi, K., Shiraya, K. and Yamazaki, A. Approximation method using Black-Scholes formula for path-dependent option pricing under Lévy models. Available at *Center for Advanced Research in Finance (CARF)*, University of Tokyo, 2019.
- [19] Shiraya, K., Uenishi, H. and Yamazaki, A. A general control variate method for Lévy models in finance. Available at *Center for Advanced Research in Finance (CARF)*, University of Tokyo, 2019.
- [20] Umezawa, Y. and Yamazaki, A. Pricing path-dependent options with discrete monitoring under time-changed Lévy processes. *Applied Mathematical Finance*, 22(2):133–161, 2015.
- [21] Yamazaki, A. Pricing average options under time-changed Lévy processes. *Review of Derivatives Research*, 17(1):79–111, 2014.
- [22] Yamazaki, A. Generalized Barndorff-Nielsen and Shephard model and discretely monitored option pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 19(4):DOI:10.1142/S0219024917500121, 2016.
- [23] Yamazaki, A. A dynamic equilibrium model for U-shaped pricing kernels. *Quantitative Finance*, 18(5):851–875, 2018.
- [24] Zeng, P. and Kwok, Y. Pricing bounds and approximations for discrete arithmetic Asian options under time-changed Lévy processes. *Quantitative Finance*, 16(9):1375–1391, 2016.