

### <研究ノート>分位点回帰によるマーケティングの効果測定

長谷川, 翔平 / HASEGAWA, Shohei

---

(出版者 / Publisher)

法政大学経営学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

The Hosei journal of business / 経営志林

(巻 / Volume)

57

(号 / Number)

1

(開始ページ / Start Page)

27

(終了ページ / End Page)

33

(発行年 / Year)

2020-04-30

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00025551>

## 〔研究ノート〕

## 分位点回帰によるマーケティングの効果測定

長谷川 翔 平

## 1. はじめに

マーケティングを含む多くの研究分野の実証分析では、回帰分析によって推定される回帰係数によって説明変数の被説明変数への影響を分析する。通常、回帰分析で得られる回帰係数は、説明変数を条件付きとした被説明変数の期待値に対する影響を意味する。しかし、被説明変数の期待値だけではなく、分布の裾に興味がある場合もある。このとき、分位点回帰 (Koenker and Bassett, 1978; Koenker and Hallock, 2001) と呼ばれる、説明変数を条件付きとした被説明変数の条件付き分位点を推測する分析方法が利用できる。分位点とは中央値や四分位数を含む概念であり、分位点回帰では任意の分位点について回帰係数を推定することにより、説明変数と被説明変数の関係をより詳細に分析することが可能となる。

分位点回帰は主に経済学分野で格差や不平等に関する研究に用いられ、教育や職業訓練の所得への効果について多くの実証研究が行われている。Buchinsky (1994) では、1960～80年代のアメリカにおける賃金構造の変化を、説明変数を教育・就業経験、被説明変数を所得とした分位点回帰によって分析しており、所得分布の下位と上位の分位点における教育・就業経験のリターンの比較を行った。その実証分析では、教育・就業経験を条件付きとした所得分布の上位の分位点では教育リターンが大きく、下位の分位点では就業経験のリターンが大きいことを明らかにした。所得と教育・就業経験のように、被説明変数の条件付き分布の上位と下位で説明変数の影響が異なる状況はマーケティングでも

考えることができる。例えば、ある製品の販売数量が多いときと少ないときでは価格やプロモーションなどのマーケティング変数の効果が異なると考えられる。または、同じ回数の広告を見た消費者でも、購買回数が大きく増加した消費者とほとんど増加しなかった消費者では広告の効果には差があると考えられる。本研究では、マーケティング・データに分位点回帰を応用することで、通常、回帰分析よりも詳細に説明変数と被説明変数間の関係を分析することを目的とする。

以下、本研究では第2節で関連する先行研究を紹介し、第3節でスーパーマーケットでのツナ缶の販売数量データを用いた実証分析を行う。この実証分析では、被説明変数を店舗における週次のツナ缶販売数量、説明変数を自己および競合製品の価格とプロモーションとした分位点回帰を行い、同時に分位点毎に説明変数の変数選択を行うことで、販売数量が多いときと少ないときのマーケティング変数の重要度を比較する。最後に第4節で、本研究のまとめと発展について述べる。

## 2. 先行研究

## 2.1. 分位点回帰

被説明変数を  $y_i$ 、説明変数  $x_i$  をとしたとき、線形回帰分析は、

$$y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i \quad (1)$$

と表される。ここで、 $i=1, \dots, n$  はデータ数、 $\varepsilon_i$  は誤差項を表す。通常、回帰分析 (以下、OLS) が説明変数の条件付き期待値  $E[y_i | x_i] = x_i' \beta$  を

推定するのに対し、Koenker and Bassett (1978)で提案された分位点回帰は  $p$  分位点における条件付き分位点  $Q_p[y_i|x_i] = x_i'\beta_p$  を推定する。OLSでは残差二乗和  $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i'\beta)^2$  を最小化することで回帰係数  $\beta$  を推定するが、分位点回帰ではチェック関数

$$\sum_{i=1}^n \rho_p(y_i - x_i'\beta_p) \quad (2)$$

を最小化することで回帰係数  $\beta_p$  を推定する。ここで、 $\rho_p(\varepsilon) = \frac{|\varepsilon| + (2p-1)\varepsilon}{2}$  であり、 $p=0.5$  のとき  $\rho_{0.5}(\varepsilon) = |\varepsilon|/2$  となることから、式(2)は最小絶対偏差を一般化した関数とみなすことができる。

分位点回帰の応用先は、所得と教育・就業経験の関係を分析した Buchinsky (1994)をはじめ、職業訓練プログラムの効果を分析した Abadie et al. (2002)、金融資産の VaR (Value at Risk) へ応用した Engle and Manganelli (2004) など、期待値だけでなく分布の裾に関心のある分野が挙げられ、多くの研究が行われている。マーケティングでも、Dotson et al. (2008) で分位点回帰を用いた顧客満足度と従業員満足度の関係について分析が行われている。ただし、分位点回帰を用いる目的は分位点間の説明変数の影響の比較ではなく、正規分布に従わないデータへの対応である。

統計モデルとしての観点からは、打ち切りデータ (Powell, 1986) やパネルデータ (Koenker, 2004)、カウントデータ (Machado and Silva, 2005)、二値データ (Kordas, 2006) などへの分位点回帰の適用が研究されている。また、分位点回帰の回帰係数の推定についてはベイズ法も提案されており、Yu and Moyeed (2001) は、分位点回帰が式(1)の誤差項に非対称ラプラス分布を仮定することと等しいことを利用し、メトロポリス・ヘイスティング法によるパラメータ推定を提案している。さらに、Kozumi and Kobayashi (2011) では、非対称ラプラス分布が指数分布と正規分布の混合分布として表現できることを利用し、ギブスサンプリングによるパラメータ推定を提案している。これらのベイズ法による分位点回帰のパラメータ推定法が提案されたことで、従来の推定方法で

は推定が困難であった順序カテゴリカルデータへの対応 (Rahman, 2016) やノンパラメトリックモデル (Taddy and Kottas, 2010) などの様々な拡張が行われている。

## 2.2. 変数選択

多数の説明変数の中から被説明変数へ影響のある変数を選択する方法には、パラメータ推定後に事後的に変数選択を行うものとパラメータ推定と同時に変数選択を行うものがある。前者はAICやBICを用いたステップワイズ法が代表的な方法である。後者にはLASSOなどの正則化 (Tibshirani, 1996) やベイズモデルによるSSVS (Stochastic Search Variable Selection; George and McCulloch, 1993) の方法がある。LASSOでは回帰係数に関する罰則付き最小二乗法を解くことによって一部の回帰係数がゼロに推定され、説明変数の選択が行われる。正則化による変数選択は、LASSOを拡張したSCAD (Fan and Li, 2001) や elastic net (Zou and Hastie, 2005) などの様々な正則化モデルも提案されており、特に機械学習の分野で過剰適合を防ぐために用いられることが多い。一方のSSVSでは回帰係数の事前分布に spike-and-slab 事前分布を設定することで、回帰係数がゼロかそうでないかを確率で評価して説明変数の選択を行う。

分位点回帰における変数選択は、正則化 (Li et al., 2010) と SSVS (Alhamzawi and Yu, 2012) がともに提案されているが、本研究では回帰係数がゼロでない確率を評価できる利点のあるSSVSによる変数選択を用いた分析を行う。理由としては、LASSOのように係数が明確にゼロと推定されるより、係数がゼロとなる確率が得られた方が柔軟にマーケティング上の意思決定に活用できると考えられるためである。マーケティング研究におけるSSVSによる変数選択は、Gilbride et al. (2006) で消費者の製品属性に対する選好の理解、Broderson et al. (2015) でオンライン広告の効果測定、Owusu et al. (2016) でクチコミ等のUGC (User Generated Contents) が購買意向に与える影響の分析などに応用されている。

### 3. 実証分析

#### 3.1. データ

実証分析では R の bayesm パッケージに含まれるスーパーマーケットにおけるツナ缶の販売数量データを利用する。このデータは7ブランドのツナ缶について、計338週間の製品販売数量、販売価格（ドル）、店頭プロモーション実施率、卸値、来店者数が週次で記録されている。本研究では、表1に集計値を載せた販売数量、販売価格、店頭プロモーション実施率のみ変数として用いる。

実証分析では、被説明変数をブランド A の週次販売数量の対数值、説明変数を自己および競合製品の週次平均販売価格の対数值と週次店頭プロモーション実施率とする。切片を含む説明変数の数は  $K=15$  である

#### 3.2. モデル

Kozumi and Kobayashi (2011) に従い、分位点回帰のモデルを式(3)のように表す。

$$y_i = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_p + \phi z_i + \sigma \tau \sqrt{z_i} u_i, \quad z_i \sim \text{Exp}(1) u_i \sim N(0,1) \quad (3)$$

ここで、 $\phi = \frac{1-2p}{p(1-p)}$ ,  $\tau^2 = \frac{2}{p(1-p)}$ ,  $\sigma$  は正規分布に従う  $u_i$  に係る尺度パラメータである。回帰係数  $\boldsymbol{\beta}_p = (\beta_{p1}, \dots, \beta_{pk})'$  の事前分布には式(4)の spike-and-slab 事前分布を設定する (George and McCulloch, 1993; Alhamzawi and Yu, 2012)。なお、以下では表記簡略化のため分位点を表す  $p$  を省略する。

$$\beta_j \sim (1-\gamma_j)N(0, \lambda_0) + \gamma_j N(0, \delta_0), \quad j=1, \dots, K \quad (4)$$

第1項の正規分布の分散  $\lambda_0$  には小さな値、第2項の正規分布の分散  $\delta_0$  に大きな値を設定することで (本研究の実証分析では  $\lambda_j=0.001$ ,  $\delta_j=100$  とした)、 $\gamma_j \in [0,1]$  は回帰係数  $\beta_j$  がゼロでない確率  $\text{Pr}(\beta_j \neq 0)$  を意味するパラメータとなる。もし、 $\gamma_j=0$  であれば、 $\beta_j$  の事前分布は  $\beta_j \sim N(0,0.001)$  となり、 $\beta_j$  の事後分布に対して  $E[\beta_j]=0$  となる強い制約を持つ。反対に  $\gamma_j=1$  であれば、 $\beta_j$  の事前分布は  $\beta_j \sim N(0,100)$  となり、散漫な事前分布となる。

以上のモデルで推定すべきパラメータは  $\theta = (\boldsymbol{\beta}_p, z_i, \sigma, \gamma_j)$  となる。全てのパラメータはマルコフ連鎖モンテカルロ法のギブスサンプリングによって容易に推定可能である (Kozumi and Kobayashi, 2011; Alhamzawi and Yu, 2012)。なお、次節の実証分析では、 $\boldsymbol{\beta}_p$  以外のパラメータの事前分布は、 $\sigma^2 \sim \text{InvGamma}(2,2)$  および  $\gamma_j \sim \text{Bernoulli}(0.5)$  として、ハイパーパラメータには散漫な事前分布を設定した。

#### 3.3. 分析結果

3.2節のモデルをマルコフ連鎖モンテカルロ法によって推定した。パラメータの事後分布の計算には、2000回のバーンイン期間の後の8000サンプルを用いた。表2は spike-and-slab 事前分布を用いた分位点回帰 (QR-SSVS) とベイズ回帰 (Bayes-SSVS) の推定結果である。表には  $\boldsymbol{\beta}_p$  回帰係数の事後平均と事後標準偏差、

表1 データ集計値

ブランド	販売数量		価格		店頭プロモーション実施率
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	
A	20810	37542	0.80	0.10	0.31
B	16104	49633	0.80	0.09	0.34
C	2656	1179	1.72	0.08	0.29
D	14412	32532	0.79	0.11	0.23
E	2893	1100	1.46	0.07	0.35
F	1057	368	3.38	0.09	0.25
G	8518	12244	0.75	0.07	0.24

表 2 回帰係数の事後分布

	QR-SSVS									Bayes-SSVS		
	$p=0.25$			$p=0.50$			$p=0.75$			平均	標準 偏差	$\gamma_j$
	平均	標準 偏差	$\gamma_j$	平均	標準 偏差	$\gamma_j$	平均	標準 偏差	$\gamma_j$			
切片	9.03	(0.81)	1.00	9.02	(0.73)	1.00	9.28	(0.83)	1.00	8.90	(0.41)	1.00
価格												
A	-3.93	(0.18)	1.00	-4.22	(0.21)	1.00	-4.74	(0.23)	1.00	-4.36	(0.22)	1.00
B	0.55	(0.16)	0.90	0.83	(0.19)	0.97	0.98	(0.21)	1.00	0.68	(0.22)	0.40
C	-0.38	(0.39)	0.05	-0.34	(0.49)	0.04	-0.67	(0.73)	0.08	-0.37	(0.58)	0.02
D	1.09	(0.14)	1.00	1.05	(0.17)	1.00	0.97	(0.17)	1.00	1.15	(0.19)	1.00
E	0.97	(0.39)	0.41	1.03	(0.47)	0.22	0.41	(0.55)	0.04	1.20	(0.62)	0.13
F	-1.24	(0.70)	0.25	-1.24	(1.17)	0.11	-0.62	(1.83)	0.12	-0.61	(1.14)	0.05
G	0.39	(0.15)	0.15	0.34	(0.20)	0.05	0.65	(0.23)	0.35	0.61	(0.27)	0.09
プロモーション												
A	0.14	(0.06)	0.04	0.13	(0.08)	0.02	0.13	(0.08)	0.02	0.08	(0.09)	0.01
B	-0.12	(0.06)	0.03	-0.16	(0.07)	0.03	-0.11	(0.09)	0.01	-0.14	(0.07)	0.02
C	-0.07	(0.05)	0.01	-0.03	(0.05)	0.00	-0.01	(0.07)	0.01	0.01	(0.08)	0.00
D	-0.09	(0.06)	0.01	-0.05	(0.08)	0.01	-0.15	(0.09)	0.02	-0.03	(0.11)	0.00
E	-0.10	(0.04)	0.02	-0.01	(0.11)	0.01	-0.02	(0.05)	0.00	-0.07	(0.05)	0.00
F	-0.13	(0.05)	0.04	-0.17	(0.08)	0.03	-0.18	(0.08)	0.12	-0.13	(0.08)	0.01
G	-0.07	(0.03)	0.01	-0.08	(0.05)	0.01	0.04	(0.13)	0.01	-0.08	(0.08)	0.01

$\gamma_j = \Pr(\beta_j \neq 0)$  の推定値を記す。分位点回帰の結果は、分位点の代表値として  $p = \{0.25, 0.50, 0.75\}$  の事後分布を載せた。被説明変数  $y_i$  はブランド A の週次販売数量の対数としているため、対数価格の A の行は自己価格弾力性となり、競合ブランド B ~ G の行は交差価格弾力性となる。プロモーションについても同様に A の行が自己のプロモーションの効果であり、B ~ G の行は競合ブランドのプロモーションの効果を示す。

まず、価格の影響を考察すると、自己価格弾力性は  $p = \{0.25, 0.50, 0.75\}$  の全てでマイナスの符号で推定されると同時に  $\gamma_j = 1.00$  となっているため、値下げすると販売数量が増加するという一般的な結果が得られている。分位点間の比較を行うと、下位よりも上位の分位点、つまり販売数量が多いときのほうが、自己価格弾力

性が絶対値の意味で高くなっている。交差価格弾力性については、ブランド B・D が全ての分位点でプラスの符号に推定され、 $\gamma_j$  の数値も 1 に近いいため、ブランド A の販売数量の大小にかかわらず、ブランド B・D はブランド A と価格面で競合関係にあることが分かる。

次に、店頭プロモーションの影響を考察すると、ブランド A の自己のプロモーションは全ての分位点で  $\gamma_j$  がゼロに近い値で推定され、販売数量に影響を与えていないことが分かり、有効なプロモーション戦略として働いていないことが示唆される。ただし、競合製品のプロモーションについても  $\gamma_j$  の推定値がほとんどの分位点でゼロに近く、ブランド A の販売数量は自己・競合のプロモーションから受ける影響は少なく、価格の方が強い影響を持つことが分かる。

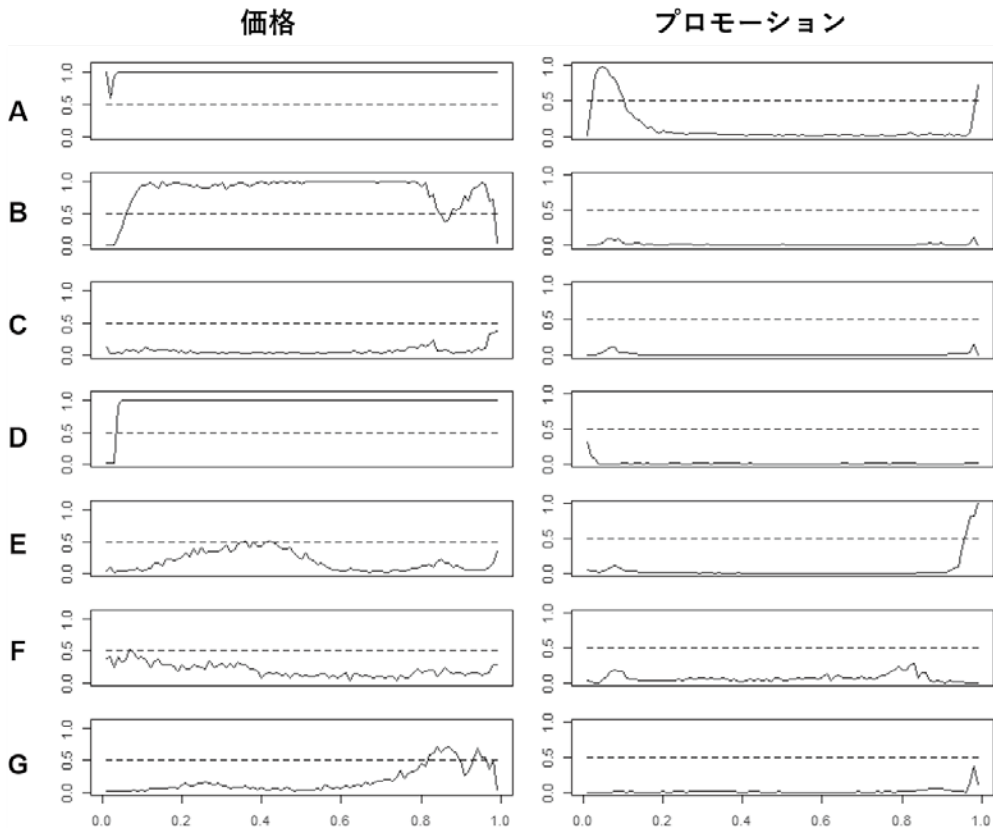
各分位点における価格およびプロモーション

の回帰係数をより詳しく考察するため、図1を示す。図1は切片を除く全ての説明変数について、 $\gamma_j$ の推定値を図示したグラフであり、縦軸が $\gamma_j$ の値、横軸が分位点 $p$ を表す。ブランドDの価格やブランドEのプロモーションなどのいくつかのグラフで $p$ が極めて0や1に近い両極端の部分で、 $\gamma_j$ の値が大きく変動しているものがあるが、これは分位点回帰では両端の分位点で推定値が不安定になる場合があることが理由だと考えられ、以下では考察しない。図1からは、ブランドA・B・Dの価格が、表1でも見たとおり、分位点 $p$ の0~1のほとんどで $\gamma_j=1$ と推定されていることが分かる。プロモーションについても、表1の結果と同様で、自己および競合製品ともにブランドAの販売数量へ影響を与えていないことが分かる。ただし、ブラン

ドAのプロモーションの回帰係数が $p=0.10$ 前後で $\gamma_j=1$ に近い値を取っていることが読み取れる。 $p=0.10$ におけるブランドAのプロモーションの回帰係数は $\beta_{0.10}=0.21$ と推定されており、ブランドAがプロモーションを実施したとき、販売数量が少ないときには効果があるが、販売数量が多くなると効果が認められなくなること示している。この結果は、やはりブランドAのプロモーションが有効に働いていないことを示している。

図1で注目すべき点としては、ブランドGの価格の回帰係数が $p=0.85$ 前後の上位の分位点で $\gamma_j>0.5$ となり、ブランドAの販売数量に対して影響を与える確率が高まっていることが挙げられる。表1のBayes-SSVSの結果ではブランドGの価格は $\gamma_j=0.09$ と推定され、ブランド

図1  $\Pr(\beta_j \neq 0)=\gamma_j$ の推定値 (縦軸： $\gamma_j$ ，横軸：分位点 $p$ )



実線が $\gamma_j$ の推定値，破線が $\gamma_j = 0.5$ を表す。

A の販売数量へ影響を与えないと判断されるが、分位点回帰の結果からはブランド G は価格面でブランド A と競合関係にある可能性が示唆されている。販売数量の上位の分位点で競合関係にあるということは、価格が条件付きのもとで、ブランド A の販売数量が多い場合に競合していることとなり、ブランド G がブランド A に与える影響力は大きい。また、ブランド G の価格の  $\gamma_j$  が  $p=0.85$  前後で上昇すると同時にブランド B の価格の  $\gamma_j$  は減少しており、上位の分位点では競合ブランドの影響が異なることも意味している。

以上の分析結果からマーケティング戦略上の知見として、ブランド A を製造している企業は、競合製品としてブランド B・D だけを考えるのではなく、ブランド G も競合として検討する必要があるということが言える。これは、現場の企業やスーパーマーケットでは、過去の購買情報から知見として既に得られていたことかもしれないが、上位と下位の分位点でどの程度、競合製品が自社製品に影響を与えるかを数値として理解できる点は、通常の回帰分析に比べた分位点回帰を用いることの利点である。

#### 4. まとめ

本研究ではマーケティング・データへの分位点回帰の応用例として、自己および競合製品の価格とプロモーションが販売数量に与える影響を考察した。実証分析では、パラメータ推定と同時に変数選択を行う SSVS と分位点回帰を組み合わせたモデルによって、説明変数が販売数量の条件付き分位点のどの位置で影響しているのかを分析した。その結果からは、条件付き期待値を考察する通常の回帰分析とは異なる結果が得られ、ブランド間の競合関係を再検討する必要が示唆された。

今後の研究の発展としては、第 1 に本研究で用いた分位点回帰における変数選択を高度化することを検討している。近年のマーケティング活動で収集されるデータは量・種類共に非常に大きくなっており、それに伴いマーケティング分析において利用可能な説明変数の数も膨大に

なることが多い。説明変数の数を  $K$  としたとき、SSVS による変数選択には  $2^K$  の計算が必要であり、説明変数が増えたときに計算負荷が大きくなる。この問題を解決する方法として、Ročková and George (2013) で EM アルゴリズムを応用した変数選択が提案されており、分位点回帰へ拡張すること検討している。第 2 に、集計データではなく消費者の購買履歴などミクロなマーケティング・データへの分位点回帰の応用を検討している。例えば、説明変数のある製品についての消費者の広告接触回数、被説明変数を消費者の購買数量とするモデルを考えたとき、従来の条件付き期待値に基づく分析では広告効果がないという結果が得られても、分位点回帰では購買数量が多い消費者には広告効果があるという結果が得られる場合が考えられる。このとき、条件付き期待値の結果に基づき広告出稿を中止すると、購買数量が多く利益貢献度の高い消費者を見逃してしまう可能性がある。または、より正確な広告効果を測定するため、Abadie et al. (2002) で提案された、ATE (平均処置効果) の分位点版である QTE (分位点処置効果) を利用することも検討している。

#### 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP18K12881 の助成を受けたものである。

#### 参考文献

- Abadie, A., Angrist, J. and Imbens, G. (2002). Instrumental Variables Estimates of Subsidized Training on the Quantile of Trainee Earnings. *Econometrica*, 70(1), 91-117.
- Alhazwawi, R. and Yu, K. (2012). Variable selection in quantile regression via Gibbs sampling. *Journal of Applied Statistics*, 39(4), 799-813.
- Brodersen, K. H., Gallusser, F., Koehler, J., Remy, N. and Scott, S. L. (2015). Inferring causal impact using bayesian structural time-series models. *Annals of Applied Statistics*, 9(1), 247-274.
- Buchinsky, M. (1994). Changes in the U.S. Wage Structure 1963-1987: Application of Quantile

- Regression. *Econometrica*, 62(2), 405–458.
- Dotson, J. P., Retzer, J. and Allenby, G. M. (2008). Non-normal simultaneous regression models for customer linkage analysis. *Quantitative Marketing and Economics*, 6(3), 257–277.
- Engle, R. F. and Manganelli, S. (2004). CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367–381.
- Fan, J. and Li, R. (2001). Variable Selection via Nonconcave Penalized. *Journal of the American Statistical Association*, 96(456), 1348–1360.
- George, E. I. and McCulloch, R. E. (1993). Variable Selection via Gibbs Sampling. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 881–889.
- Gilbride, T. J., Allenby, G. M. and Brazell, J. D. (2006). Models for Heterogeneous Variable Selection. *Journal of Marketing Research*, 43(3), 420–430.
- Koenker, R. (2004). Quantile regression for longitudinal data. *Journal of Multivariate Analysis*, 91(1), 74–89.
- Koenker, R. W. and Bassett, G. (1978). Regression Quantiles. *Econometrica*, 46(1), 33–50.
- Koenker, R. and Hallock, K. F. (2001). Quantile Regression. *Journal of Economic Perspectives*, 15(4), 143–156.
- Kordas, G. (2006). Smoothed binary regression quantiles. *Journal of Applied Econometrics*, 21(3), 387–407.
- Kozumi, H. and Kobayashi, G. (2011). Gibbs sampling methods for Bayesian quantile regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(11), 1565–1578.
- Machado, J. A. F. and Silva, J. M. C. S. (2005). Quantiles for Counts. *Journal of the American Statistical Association*, 100(472), 1226–1237.
- Owusu, R. A., Mutshinda, C. M., Antai, I., Dadzie, K. Q. and Winston, E. M. (2016). Which UGC features drive web purchase intent? A spike-and-slab Bayesian Variable Selection Approach. *Internet Research*, 26(1), 22–37.
- Powell, J. L. (1986). Censored regression quantiles. *Journal of Econometrics*, 32(1), 143–155.
- Li, Q., Xi, R. and Lin, N. (2010). Bayesian regularized quantile regression. *Bayesian Analysis*, 5(3), 533–556.
- Rahman, M. A. (2016). Bayesian quantile regression for ordinal models. *Bayesian Analysis*, 11(1), 1–24.
- Ročková, V. and George, E. I. (2014). EMVS: The EM Approach to Bayesian Variable Selection. *Journal of the American Statistical Association*, 109(506), 828–846.
- Taddy, M. A. and Kottas, A. (2010). A Bayesian Nonparametric Approach to Inference for Quantile Regression. *Journal of Business & Economic Statistics*, 28(3), 357–369.
- Tibshirani, R. (1996). Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58(1), 267–288.
- Yu, K. and Moyeed, R. A. (2001). Bayesian quantile regression. *Statistics & Probability Letters*, 54(4), 437–447.
- Zou, H. and Hastie, T. (2005). Regularization and variable selection via the elastic net. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 67(2), 301–320.