予算ゲームと混雑ゲームの共通の一般化におけるナッシュ均衡

KIYOSUE, Fuga / 清末, 風雅

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学研究科編
(巻 / Volume)
63
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
2
(発行年 / Year)
2022-03-24
(URL)
https://doi.org/10.15002/00025409

予算ゲームと混雑ゲームの共通の一般化におけるナッシュ均衡

Nash equilibria in a common generalization of budget games and congestion games

清末 風雅
Fuga KIYOSUE

指導教員 高澤兼二郎

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

Budget games are a variant of congestion games. In budget games, a player chooses a subset of resources strategically and maximizes her utility. In the general case, Nash equilibria do not exist in budget games. But Drees et al. showed that the game has a Nash equilibrium under an assumption that the strategy space of each player is the base family of a matroid and each player has a fixed demand for all resources. In this thesis, we generalize the utility functions in budget games to set functions to provide a common generalization of budget games and congestion games. We then extend the theorem of Drees et al. to this generalized model. We have also found a counterexample to a proof of another theorem on the time complexity of finding a Nash equilibrium by Drees et al.

1.　はじめに

予算ゲームとはプレイヤーが資源の集合を選択し効用を最大化させる戦略形ゲームであり，混雑ゲームの亜種である．Drees ら [2] は制約を加えたゲームがナッシュ均衡を持つという定理を示した．本研究では，この定理を拡張するために，集合関数を用いて効用関数を一般化した．また，一般化した予算ゲームが重み付き混雑ゲームとオフセット予算ゲームを含むことを示した．さらに，制約を加えた予算ゲームのナッシュ均衡が求まる計算時間に関する Drees ら [2] の証明の反例を示し，反例が存在する条件を示した．

2.　予算ゲーム

(1)　モデル

プレイヤーの集合を $N(|N| = n)$ で表し，資源の集合を R で表す．また各資源 $r \in R$ の予算を b_r で表す．さらに，プレイヤー i の戦略を $s_i \subseteq R$ で表し，戦略空間を $S_i \subseteq 2^R$ で表す．すべてのプレイヤーの戦略を示す，**戦略プロファイル**を $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ と表す．プレイヤー i の資源 r に対する需要を $d_r(i) > 0$ と表す．戦略プロファイル $\mathbf{s}$ における，資源 r の総需要は $\tilde{d}_r(\mathbf{s}) = \sum_{i \in N_r(\mathbf{s})} d_r(i)$ である．ただし，$N_r(\mathbf{s})$ は戦略プロファイル $\mathbf{s}$ において資源 r を選択しているプレイヤーの集合とする．戦略プロファイル $\mathbf{s}$ において，プレイヤー i が資源 r から得る効用は $u_{i,r}(\mathbf{s}) = d_r(i) \cdot \min\left\{1, \frac{b_r}{\tilde{d}_r(\mathbf{s})}\right\}$ であり，資源 r の単位需要当たりの効用を $c_r = \min\left\{1, \frac{b_r}{\tilde{d}_r(\mathbf{s})}\right\}$ と定義する．戦略プロファイル $\mathbf{s}$ におけるプレイヤー i の得る効用は，$u_i(\mathbf{s}) = \sum_{r \in s_i} u_{i,r}(\mathbf{s})$ と表す．

(2)　需要一定マトロイド予算ゲーム

有限集合 R とその部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^R$ が以下の三つの条件を満たすとき，$M = (R, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という [3].

(I1) 空集合 $\emptyset$ について，$\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$.

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

有限集合 R とその部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^R$ に対して，$(R, \mathcal{I})$ がマトロイドであるとするとき，$\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ をこのマトロイドの独立集合といい，任意の $e \in R - B$ に対して，$B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ をみたす独立集合 $B \in \mathcal{I}$ をマトロイドの基という．

予算ゲームでプレイヤー i において，$\mathcal{I}_i = \{x \subseteq s \mid s \in S_i\}$ と書く．$M_i = (R, \mathcal{I}_i)$ がすべてのプレイヤー i についてマトロイドである予算ゲームを，**マトロイド予算ゲーム**という．

定理 1 (Drees ら [2])．各プレイヤー i の需要が資源によらず一定（すべての資源 r において $d_r(i) = d(i)$）であるマトロイド予算ゲームは，有限回の向上試行でナッシュ均衡に到達する．

(3)　定理 1 の証明

戦略プロファイル $\mathbf{s}$ に対して，プレイヤー i による $|s_i \backslash s'_i| = 1$ かつ，$u_i(\mathbf{s}_{-i}, s_i) < u_i(\mathbf{s}_{-i}, s'_i)$ を満たす s_i から s'_i への戦略変更を，プレイヤー i の**レイジームーブ**という．また，マトロイド予算ゲームでは，すべての向上試行はレイジームーブに分解することができる [1, 2, 4].

戦略プロファイル $\mathbf{s}$ の**ポテンシャル関数**を $\phi(\mathbf{s}) = (c_{r_1}(\mathbf{s}), \ldots, c_{r_m}(\mathbf{s}))$ とする．ここで，$c_{r_1}(\mathbf{s})$ から $c_{r_m}(\mathbf{s})$ は昇順に並んでいるとする．

定理 1 の略証．プレイヤー i がナッシュ均衡でない戦略プロファイル $\mathbf{s}$ において資源 r_1 から r_2 に変えるレイジームーブをし，

戦略プロファイルが $\mathbf{s}'$ に変わるとすると，$c_{r_1}(\mathbf{s}) < c_{r_2}(\mathbf{s}')$ がいえ，$c_r = \min\left\{1, \frac{b_r}{\tilde{d}_r(\mathbf{s})}\right\}$ より，$\frac{b_{r_1}}{\tilde{d}_r(\mathbf{s})} < 1$ がいえる．このことと，$\tilde{d}_{r_1}(\mathbf{s}') = \tilde{d}_{r_1}(\mathbf{s}) - d(i)$ より，$c_{r_1}(\mathbf{s}) < c_{r_1}(\mathbf{s}')$ がいえる．以上より，$\phi(\mathbf{s}) <_{\text{lex}} \phi(\mathbf{s}')$ となる．レイジームーブごとに ϕ は真に増加するので，有限回のレイジームーブにでナッシュ均衡に到達する． □

3. 予算ゲームの一般化とそれが含むゲーム

(1) 予算ゲームの一般化

戦略プロファイル $\mathbf{s}$ においてプレイヤー i が資源 r から得る効用を以下のように一般化する．

$$u_{i,r}(\mathbf{s}) = \min\{d_r(i), d_r(i) \cdot f_r(N_r(\mathbf{s}))\}.$$

ここで，$f_r : 2^N \to \mathbb{R}$ は単調非増加な集合関数である．$c_r(\mathbf{s}) = \min\{1, f_r(N_r(\mathbf{s}))\}$ とする．

(2) 一般化した予算ゲームにおける定理 1 の拡張

定理 2. 効用関数 $u_{i,r}(\mathbf{s})$ が式 (4) で定義され，各プレイヤー i の需要が資源によらず一定であるマトロイド予算ゲームは，有限回の向上試行でナッシュ均衡に到達する．

定理 2 の略証． 定理 1 と同様に $c_{r_1}(\mathbf{s}) < c_{r_2}(\mathbf{s}')$ がいえる．$c_r(\mathbf{s}) = \min\{1, f_r(N_r(\mathbf{s}))\}$ より，$c_{r_1}(\mathbf{s}) = f_{r_1}(N_{r_1}(\mathbf{s})) \lneqq 1$ である．$N_{r_1}(\mathbf{s}) \supset N_{r_1}(\mathbf{s}')$ であるので，$c_{r_1}(\mathbf{s}) < c_{r_1}(\mathbf{s}')$ がいえる． □

(3) 予算ゲームと重み付き混雑ゲームの関係

重み付き混雑ゲームにおいて，プレイヤー i が持つ重みを w_i とし，l_r を資源 r の単調非減少な遅延関数とする．さらに，戦略プロファイル $\mathbf{s}$ において，プレイヤー i が得る遅延は $\tilde{u}_i(\mathbf{s}) = \sum_{r \in s_i} l_r \left(\sum_{r \in s_i} w_i\right)$ である．

ここで，予算ゲームに各プレイヤーの資源に対する需要は資源ごとに一定 $(d_r(i) = d_r(j) = d_r, \forall i, j \in N)$ という制約を加えた．予算ゲームの単調非増加な集合関数を

$$f_r(N_r(\mathbf{s})) = -\frac{1}{d_r} \cdot l_r \left(\sum_{i \in N_r(\mathbf{s})} w_i\right)$$

とすると，一般化した予算ゲームと重み付き混雑ゲームの関係は以下のようになる．

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{s}) &= \sum_{r \in s_i} \min\left\{d_r, -l_r\left(\sum_{i \in N_r(\mathbf{s})} w_i\right)\right\} \\ &= -\tilde{u}_i(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

よって，一般化した予算ゲームが重み付き混雑ゲームを含む．

(4) 予算ゲームとオフセット予算ゲームの関係

オフセット予算ゲームでは，戦略プロファイル $\mathbf{s}$ において，プレイヤー i が資源 r から得る効用 $\hat{u}_{i,r}(\mathbf{s})$ は，

$$\hat{u}_{i,r}(\mathbf{s}) = d_r(i) \cdot \min\left\{1, \frac{b_r}{\tilde{d}_r(\mathbf{s}) + \sigma_r}\right\}$$

である．$\sigma_r \geqq 0 (r \in R)$ は資源 r の**オフセット**という．

予算ゲームの単調非増加な集合関数を

$$f_r(N') = \frac{b_r}{\sum_{j \in N'} d_r(j) + \sigma_r}$$

とする．$N_1 \subseteq N_2$ のとき，$\sum_{j \in N_1} d_r(j) \leq \sum_{j \in N_2} d_r(j)$ であるので，

$$f_r(N_1) = \frac{b_r}{\sum_{j \in N_1} d_r(j) + \sigma_r} \geq \frac{b_r}{\sum_{j \in N_2} d_r(j) + \sigma_r} = f_r(N_2)$$

である．よって，$f_r(N')$ は単調非増加な関数であり，$\tilde{u}_i(\mathbf{s}) = u_i(\mathbf{s})$ がいえ，一般化した予算ゲームがオフセット予算ゲームを含むことがいえる．

4. 予算ゲームのナッシュ均衡の計算時間

(1) ナッシュ均衡の計算時間に関する定理

マトロイド予算ゲームの中で，すべてのプレイヤーのすべての戦略が一つの資源からなるゲームを**シングルトン予算ゲーム**という．

定理 3 (Drees ら [2])**.** 各プレイヤーの需要が資源によらず一定であるシングルトン予算ゲームは，計算時間 $\mathcal{O}(n)$ でナッシュ均衡が求まる．

Drees ら [2] は定理 3 を，持つ需要の小さいプレイヤーから順に一番効用が高い資源を選択すると，自分よりあとのプレイヤーの選択によって一番効用が高い資源が変わらないことを示すことにより証明しようとした．

(2) 反例の存在する条件

$d(i), d(j) (d(i) \leq d(j)), b_{r_1}, b_{r_2}$ について，以下の三つの式がすべて成り立つとき，定理 3 に対する Drees らの証明の反例となる：

- $\min\left\{1, \frac{b_{r_1}}{d(i)}\right\} \geq \min\left\{1, \frac{b_{r_2}}{d(i)}\right\}$,
- $\min\left\{1, \frac{b_{r_1}}{d(i)+d(j)}\right\} \geq \min\left\{1, \frac{b_{r_2}}{d(j)}\right\}$,
- $\min\left\{1, \frac{b_{r_1}}{d(i)+d(j)}\right\} < \min\left\{1, \frac{b_{r_2}}{d(i)}\right\}$.

三つの式を整理すると以下のようになる：

$$\frac{d(i)}{d(i)+d(j)} b_{r_1} < b_{r_2} \leq \frac{d(j)}{d(i)+d(j)} b_{r_1}.$$

5. 今後の課題

本研究では，予算ゲームの効用関数を一般化し，定理 1 の拡張をした．同様に，先行研究 [2] で Drees らが示した，マトロイド予算ゲームが α 近似ナッシュ均衡を持つという定理などの他の定理についても拡張の余地がありうる．これらの定理について，定理の拡張するために，Drees らがどのような性質を使用し，証明しているかを解析する必要がある．

参考文献

1) Heiner Ackermann, Heiko Röglin, Berthold Vöcking: Pure Nash equilibria in player-specific and weighted congestion games, Theoretical Computer Science, 2009, pp. 1552–1563
2) Maximilian Drees, Matthias Feldotto, Sören Riechers, Alexander Skopalik: Pure Nash equilibria in restricted budget games, Journal of Combinatorial Optimization, 2019, pp. 620–638.
3) Jon Lee, A First Course in Combinatorial Optimization, Cambridge Texts in Applied Mathematics, pp. 49–79
4) Kenjiro Takazawa: Generalizations of weighted matroid congestion games: pure Nash equilibrium, sensitivity analysis, and discrete convex function, Journal of Combinatorial Optimization, 2019, pp. 1043–1065.