

## 離散時間Newell-Whithamモデルの数値解析

USUMI, Taisuke / 臼見, 太佑

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学研究科編

(巻 / Volume)

63

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

5

(発行年 / Year)

2022-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00025406>

# 離散時間 Newell-Whitham モデルの数値解析

Numerical Analysis for Discrete-Time Newell-Whitham Model

白見 太佑

Taisuke USUMI

指導教員 磯島 伸

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

The exponential Newell-Whitham (eNW) model, defined by a differential equation with time delay, is one of the most important models for traffic flow. The discrete-time and ultradiscrete analogues of the eNW model have already been derived by considering the relationship between the eNW model and the Lotka-Volterra (LV) equation. In this paper, we analyze the behavior of the numerical solution for the ultradiscrete eNW model using the initial values which are derived from the exact solution of the discrete and ultradiscrete LV equation.

**Key Words** : traffic flow model, delay differential equation, discretization, ultradiscretization

## 1. はじめに

交通流モデルの1つである遅延微分方程式 Newell-Whitham (NW) モデルと可積分系である Lotka-Volterra (LV) 方程式 (Kac-van Moerbeke 系) との対比に注目した, NW モデルの時間差分化, 超離散化およびその厳密解については既に議論されている<sup>1)</sup>. 本研究では, 超離散 NW モデルの数値解の挙動を, 離散 LV 方程式の厳密解, およびその超離散化を参考にした初期値を与えることにより解析を行った.

## 2. 全離散 eNW モデル

遅延微分方程式

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(h_n(t)) \tag{1}$$

によって表される追従モデル (図1) は交通流において重要なモデルの1つである<sup>2, 3)</sup>. ここで  $x_n(t)$  は時刻  $t$  における  $n$  番目の車の位置,  $h_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$  は車間距離,  $\tau > 0$  は時間遅れを表す定数,  $V$  は最適速度 (optimal velocity, OV) 関数であり, ここでは

$$V(h) = V_0 [1 - \exp(-(\alpha/V_0)(h - L))] \tag{2}$$

と定義する (図2). ここで  $V_0$  は最大速度,  $L$  は最小車間距離を意味し,  $\alpha > 0$  は交通状況の変化に対して運転手の反応度を調整するパラメータである. なお, 追従モデルの OV 関数として (2) 式を採用したモデルを指数関数型 NW(eNW) モデルと呼ぶことにする.

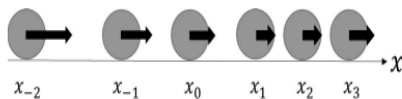


図1 車が一列に並んだ一車線交通

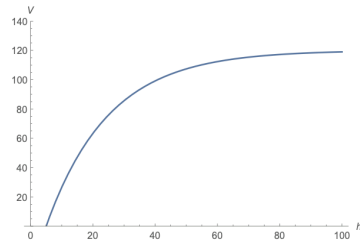


図2  $V_0 = 120, L = 5, \alpha = 6$  の eNW モデルの OV 関数

eNW モデルと全離散 LV 方程式<sup>4)</sup> との対比により, 全離散 eNW モデル

$$\frac{K_n^{i+1}}{K_n^i} = \frac{1 + \alpha\gamma K_{n+1}^{i-m}}{1 + \alpha\gamma K_n^{i-m+1}}, \tag{3}$$

$$K_n^i = S_n(\gamma^i t), \tag{4}$$

$$S_n(t) = \exp(-(\alpha/V_0)(h_n(t) - L)) \tag{5}$$

を導出できる. ここで  $K_n^i$  は全離散 eNW モデルの従属変数であり,  $\gamma$  は時間差分間隔であって  $t = \gamma^i t$ ,  $m$  は  $\tau = \gamma m$  である.

## 3. 全離散 eNW モデルの厳密解

全離散 eNW モデルの解については, 全離散 LV 方程式との対比により孤立波解

$$\begin{aligned} K_n^i &= \frac{g_{n+1}^i g_n^{i-m+1}}{g_{n+1}^{i-m} g_n^{i+1}}, \\ g_n^i &= f_j^T = 1 + e^{2kn - \Omega i}, \\ \Omega &= \log \left( \frac{1 + \alpha\gamma(1 + e^{-k})}{1 + \alpha\gamma(1 + e^k)} \right), \\ m &= -\frac{k}{\Omega} \end{aligned} \tag{6}$$

を得ることが出来る. 図3は孤立波解のグラフの概形となっており, 車間距離が後方へ伝わっていく様子を表していることが分かる.

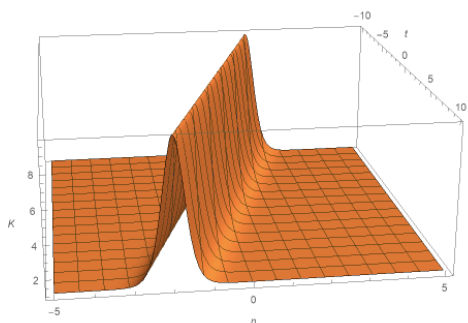


図3 全離散 eNW モデルの孤立波解 ( $\alpha = 1, \gamma = 0.1, m = 3, k \simeq 2.88$ )

また, 先行研究<sup>5)</sup>で用いられている方法に従い適切な変数変換を施すことにより衝撃波を表す関数

$$\begin{aligned} K_n^{\bar{t}} &= \frac{F_n^{\bar{t}}}{G_n^{\bar{t}}} \quad (F_n^{\bar{t}} > 0, G_n^{\bar{t}} > 0), \\ F_n^{\bar{t}} &= 1 + CX, \\ G_n^{\bar{t}} &= A + BX, \\ X &= e^{b\bar{t}+an} \end{aligned} \quad (7)$$

を求めることができる. ここで,  $A, B, C$  は正の定数,  $a, b$  は定数と仮定し, また以下の十分条件を満たす.

(1)  $B - AC \neq 0, m = 1$  かつ

$$A = \frac{1}{\lambda} - \alpha\gamma \quad (8)$$

$$B = \left( \frac{1}{\lambda e^{a-2mb}} - \alpha\gamma \right) C \quad (9)$$

$$a = b + \log \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha\gamma\lambda} (e^b - 1) \right\} \quad (10)$$

(2)  $B - AC \neq 0, m \neq 1$ , (8), (9) 式かつ

$$\alpha\gamma\lambda e^b + e^{bm+b}(1 - \alpha\gamma\lambda) - e^{bm} = 0 \quad (11)$$

$$a = bm + b \quad (12)$$

図4は条件(1)を満たす場合である.  $m = 1, b = 5$  とすると他のパラメータは  $A = 9.9, B \simeq 1.91, a \simeq 11.6$  となる. ここで,  $K$  の時間発展を観察すると, 徐々に  $K$  の値が大きな車の数が後方に伝わって増加していることが分かる. すなわち, この関数は流体でいう衝撃波を表し, 交通流として解釈すると渋滞区間の先頭の様子を表すと考えられる. 図5は条件(2)を満たす場合であり,  $m = 40$  とすると, 他のパラメータは  $A = 9.9, B \simeq 1.92, a \simeq -1.68, b \simeq -0.041$  となる.  $K$  の時間発展を観察すると, 徐々に  $K$  の値が大きな車の数が後方に伝わって減少していることがわかる. つまり, この関数を交通流として解釈すると渋滞区間の最後尾の様子を表すと考えられる.

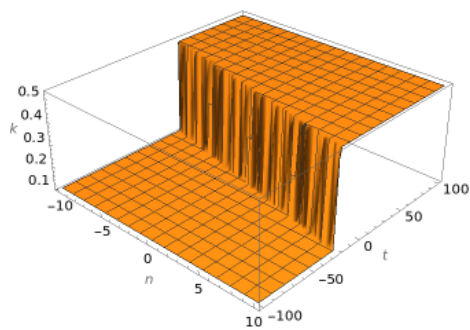


図4 条件(1)の衝撃波

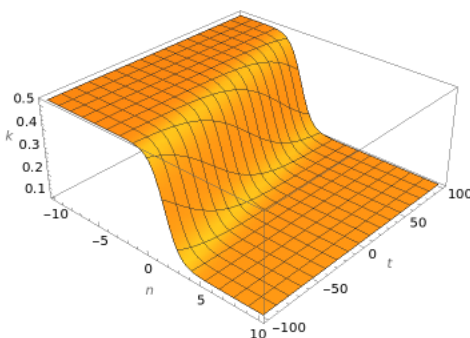


図5 条件(2)の衝撃波

#### 4. 超離散 eNW モデル

差分方程式の従属変数を離散化する手法として超離散化法という手法があり, 以下の公式が用いられる.

$$\epsilon \log \left( \exp \frac{A}{\epsilon} \cdot \exp \frac{B}{\epsilon} \right) = A + B, \quad (13)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \left( \exp \frac{A}{\epsilon} + \exp \frac{B}{\epsilon} \right) = \max\{A, B\}$$

前節で示した全離散 eNW モデル (3) に対して変数変換

$$K_n^{\bar{t}} = e^{X_n^{\bar{t}}/\epsilon}, \quad (14)$$

$$\alpha\gamma = e^{\zeta/\epsilon} \quad (15)$$

を施し, 超離散化法を適用することにより, 超離散 eNW モデル

$$\begin{aligned} X_n^{\bar{t}+1} - X_n^{\bar{t}} &= \max\{0, X_{n+1}^{\bar{t}-m} + \zeta\} \\ &\quad - \max\{0, X_n^{\bar{t}-m+1} + \zeta\} \end{aligned} \quad (16)$$

を得る. ここで, (4), (5), (14) 式より, 交通流として妥当な結果を得るためには  $X_n^{\bar{t}} \leq 0$  とする必要がある. そのため, ここでは  $\zeta > 0$  とする. さらに, (16) 式に対して場合分けを行い, 以下のように記述する.

$$X_n^{\bar{t}+1} - X_n^{\bar{t}} = \begin{cases} X_{n+1}^{\bar{t}-m} - X_n^{\bar{t}-m+1} & (A^\pm) \\ X_{n+1}^{\bar{t}-m} + \zeta & (B^+) \\ -X_n^{\bar{t}-m+1} - \zeta & (B^-) \\ 0 & \end{cases} \quad (17)$$

ここで  $(A^\pm), (B^\pm)$  は図6に示した各領域に対応する. 図6は  $X_{n+1}^{\bar{t}-m}, X_n^{\bar{t}-m+1}$  の値によって  $X_n^{\bar{t}}$  がどのように変化する

かを示している。例えば  $X_n^i \leq -\zeta$  の場合、 $X_n^{i+1} - X_n^i = 0$  となり、車両は車間距離を維持すると解釈できる。

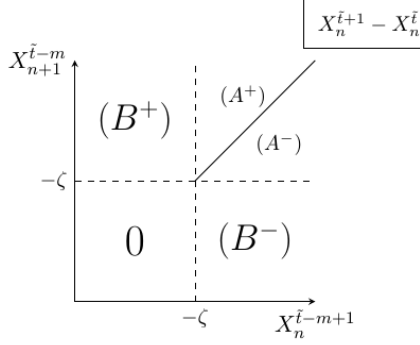


図 6  $X_n^{i+1} - X_n^i$  の値の平面図

### 5. 超離散 eNW モデルの厳密解

全離散 eNW モデルの孤立波解に対して、超離散化を施し、超離散 eNW モデルの孤立波解

$$\begin{aligned} X_n^i &= \hat{G}_{n+1}^i + \hat{G}_n^{i-m+1} - \hat{G}_{n+1}^{i-m} - \hat{G}_n^{i+1} \\ \hat{G}_n^i &= \max\{0, 2\kappa n - \psi \tilde{t}\} \\ \psi &= \max\{0, \zeta - \kappa\} - \max\{0, \zeta + \kappa\} \\ \psi &= -\frac{\kappa}{m} \end{aligned} \quad (18)$$

を得ることができる。図 7 は超離散 eNW モデルの孤立波解のグラフであり、全離散の場合と同様に、車間距離の分布が後方へ伝わる様子を表していることが分かる。

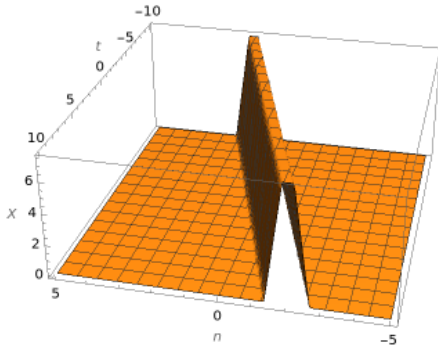


図 7 超離散 eNW モデルの孤立波解 ( $m = 3, \zeta = 5, \kappa = 15/2$ )

同様に全離散 eNW モデルの衝撃波関数を超離散化することにより

$$X_n^i = \tilde{F}_n^i - \tilde{G}_n^i \quad (19)$$

$$\tilde{F}_n^i = \max\{0, \tilde{C} + \tilde{b}\tilde{t} + \tilde{a}n\} \quad (20)$$

$$\tilde{G}_n^i = \max\{\tilde{A}, \tilde{B} + \tilde{b}\tilde{t} + \tilde{a}n\} \quad (21)$$

を得る。また、超離散化の際の十分条件として以下が求まる。

(1)  $\tilde{B} \neq \tilde{A} + \tilde{C}, m = 1$  かつ

$$\max\{\tilde{A}, \zeta\} = -\tilde{\lambda} \quad (22)$$

$$\max\{\tilde{B}, \tilde{C} + \zeta\} = 2\tilde{b}m - \tilde{a} - \tilde{\lambda} + \tilde{C} \quad (23)$$

$$\max\{\tilde{a}, \tilde{b}m - \zeta - \tilde{\lambda}\} = \max\{\tilde{b}m, 2\tilde{b}m - \zeta - \tilde{\lambda}\} \quad (24)$$

また、パラメータの十分条件は以下である。

$$\tilde{b} - \zeta - \tilde{\lambda} > \tilde{a}, \quad \tilde{b} > 2\tilde{b} - \zeta - \tilde{\lambda}, \quad (25)$$

$$\zeta = -\tilde{\lambda}, \quad 0 > \tilde{b} > \tilde{a}, \quad \zeta > \tilde{A}$$

$$\tilde{a} > \tilde{b} - \zeta - \tilde{\lambda}, \quad 2\tilde{b} - \zeta - \tilde{\lambda} > \tilde{b}, \quad (26)$$

$$\tilde{a} = 2\tilde{b} - \zeta - \tilde{\lambda}, \quad \tilde{a} > \tilde{b} > 0, \quad \tilde{C} + \zeta \geq \tilde{B}$$

(2)  $\tilde{B} \neq \tilde{A} + \tilde{C}, m \neq 1$ , (22), (23) 式かつ

$$\max\{\tilde{b} + \zeta + \tilde{\lambda}, \tilde{b}(m+1)\} = \quad (27)$$

$$\max\{\tilde{b}(m+1) + \zeta + \tilde{\lambda}, \tilde{b}m\}$$

$$\tilde{a} = \tilde{b}(m+1) \quad (28)$$

また、パラメータの十分条件は以下である。

$$\tilde{b}(m+1) > \tilde{b} + \zeta + \tilde{\lambda}, \quad \tilde{b}(m+1) + \zeta + \tilde{\lambda} > \tilde{b}m, \quad (29)$$

$$\zeta = -\tilde{\lambda}, \quad \tilde{a} > 0, \quad \tilde{b} > 0, \quad \tilde{B} > \tilde{C} + \zeta, \quad \zeta > \tilde{A}$$

$$\tilde{b} + \zeta + \tilde{\lambda} > \tilde{b}(m+1), \quad \tilde{b}m > \tilde{b}(m+1) + \zeta + \tilde{\lambda}, \quad (30)$$

$$\tilde{b} = \frac{\zeta + \tilde{\lambda}}{m-1}, \quad 0 > \tilde{a}, \quad 0 > \tilde{b}, \quad \tilde{C} + \zeta \geq \tilde{B}, \quad \tilde{A} > \zeta$$

図 8, 9 はそれぞれ (25), (29) 式の場合の超離散衝撃波のグラフである。(25) 式の場合は、 $0 > \tilde{b} > \tilde{a}$ , (19)-(21) 式より、 $n \rightarrow -\infty$  の時  $X_n^i = \tilde{C} - \tilde{B}$ ,  $n \rightarrow \infty$  の時  $X_n^i = -\tilde{A}$  となる。ここで、 $-\tilde{A} > \tilde{C} - \tilde{B}$  とするとグラフの概形は図 8 のようになり、渋滞の先頭を表すことがわかる。なお、 $\tilde{C} - \tilde{B} > -\tilde{A}$  とするとグラフの概形は渋滞の最後尾を表す概形となる。(26) 式の場合も同様に  $-\tilde{A}, \tilde{C} - \tilde{B}$  の大小関係によってグラフの概形が変わる。(29) 式の場合は、 $\tilde{a} > 0, \tilde{b} > 0$  であるので、 $n \rightarrow -\infty$  の時  $X_n^i = -\tilde{A}$ ,  $n \rightarrow \infty$  の時  $X_n^i = \tilde{C} - \tilde{B}$  となる。さらに、 $-\tilde{A} > \tilde{C} - \tilde{B}$  が成り立つので、グラフの概形は図 9 のような渋滞の最後尾を表すことがわかる。(30) 式の場合は、 $0 > \tilde{a}, 0 > \tilde{b}, \tilde{C} - \tilde{B} > -\tilde{A}$  であるので、グラフの概形は (29) 式と同様の図 9 のような渋滞の最後尾を表す概形となる。条件 (2) の場合は渋滞の先頭を表す概形の波は存在しない。

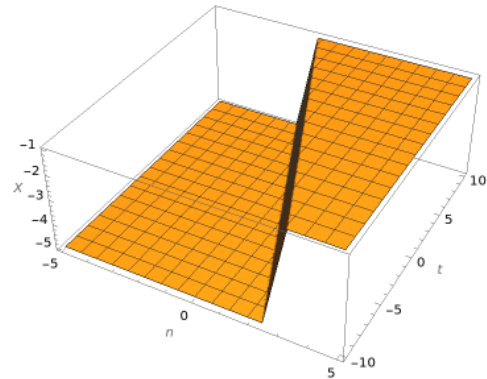


図 8 (25) 式の場合の超離散衝撃波 ( $m = 1, \zeta = 2, \tilde{A} = 1, \tilde{B} = 7, \tilde{C} = 2, \tilde{a} = -5, \tilde{b} = -1$ )

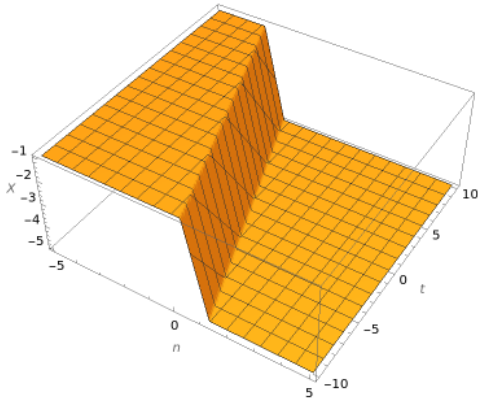


図 9 (29) 式の場合の超離散衝撃波 ( $m = 5, \zeta = 2, \tilde{A} = 1, \tilde{B} = 7, \tilde{C} = 2, \tilde{a} = 4.5, \tilde{b} = 0.75$ )

### 6. 超離散 eNW モデルのシミュレーション

(16) 式の超離散 eNW モデルの時間発展を求め、その挙動を観察した。まず、ソリトン解のような孤立波の導出を試みた。超離散 eNW モデルのソリトン解は  $X_n^{\tilde{t}} \geq 0$  となるため、 $X_n^{\tilde{t}} \leq 0$  の値をとる波状の初期値を与え、その後の時間発展を観察した。 $m = 1$  のとき、 $X_n^{\tilde{t}} \geq -\zeta$  の初期値を与えると、(16) 式から  $X_n^{\tilde{t}+1} = X_{n+1}^{\tilde{t}-1}$  が成り立つので図 10 のように 2 周期で振動して進行していく。なお、 $m \geq 2$  とすると、今回実験した範囲ではどのような初期値に対してもいずれ発散してしまう。

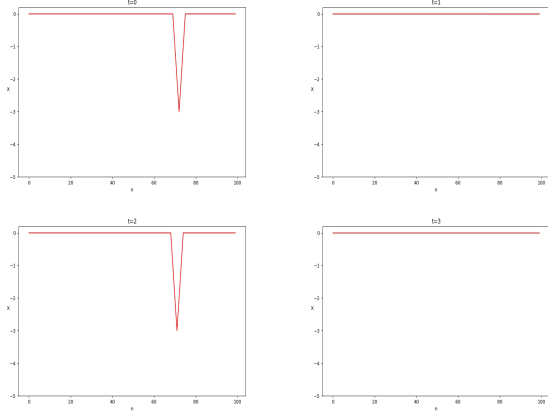


図 10 2 周期で振動する進行波 ( $m = 1, \zeta = 3$ )

次に、衝撃波のような挙動をする解の導出を試みた。図 11, 12 は (25) 式を満たす初期値を与えた場合であり、結果として 3 周期で進行する渋滞の先頭を表す進行波と 2 周期で進行する渋滞の最後尾を表す進行波を得ることが出来た。図 13, 14 は (29) 式を満たす初期値を与えた場合である。図 13 のように 3 周期で進行する渋滞の最後尾を表す進行波を得ることが出来たが、初期値の与え方によって図 14 のように衝撃波とは違う挙動をする解も取得することが出来た。図 15, 16 は (25) 式を満たす初期値にノイズを与えた場合である。図 15 は時刻  $\tilde{t} = 0$  でノイズを与えた。 $\tilde{t} = 35$  で衝撃波がノイズと衝突後、ノイズを吸収した。図 16 は時刻  $\tilde{t} = 0$  で 2 周期で振動して進行する波を与えた場合である。時刻  $\tilde{t} = 38$  で

2 周期の波が衝撃波に追いつき衝突後、その波は吸収された。なお、 $m \geq 2$  としてノイズを与えると、いずれ発散する。

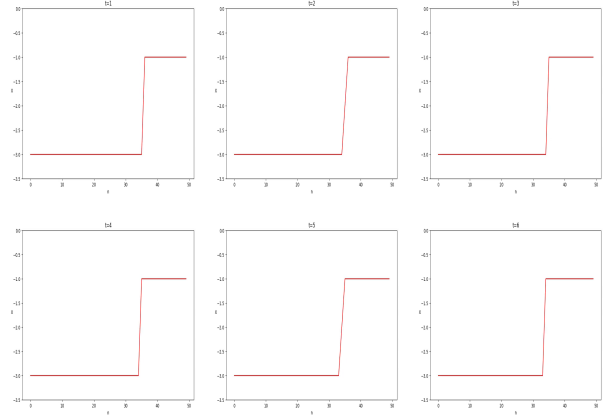


図 11 渋滞の先頭を表す超離散衝撃波 ( $m = 1, \zeta = 2, \tilde{A} = 1, \tilde{B} = 5, \tilde{C} = 2, \tilde{a} = -3, \tilde{b} = -1$ )

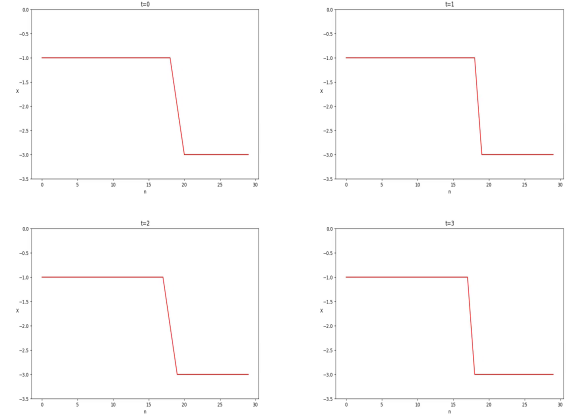


図 12 渋滞の最後尾を表す超離散衝撃波 ( $m = 1, \zeta = 4, \tilde{A} = 3, \tilde{B} = 5, \tilde{C} = 4, \tilde{a} = -2, \tilde{b} = -1$ )

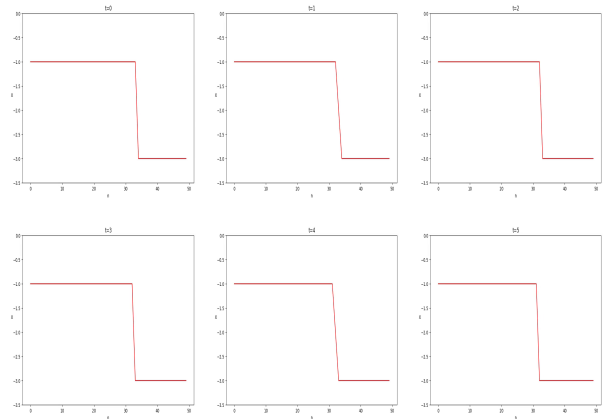


図 13 渋滞の最後尾を表す超離散衝撃波 ( $m = 2, \zeta = 2, \tilde{A} = 1, \tilde{B} = 5, \tilde{C} = 2, \tilde{a} = 3, \tilde{b} = 1$ )

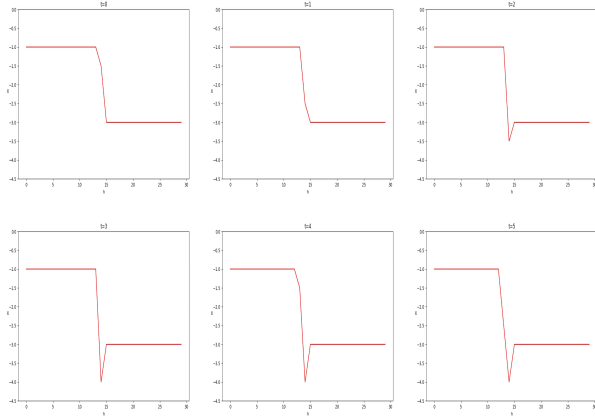


図 14 超離散衝撃波とは違う挙動をする例 ( $m = 3$ ,  $\zeta = 2$ ,  $\tilde{A} = 1$ ,  $\tilde{B} = 5$ ,  $\tilde{C} = 2$ ,  $\tilde{a} = 2$ ,  $\tilde{b} = 0.5$ )

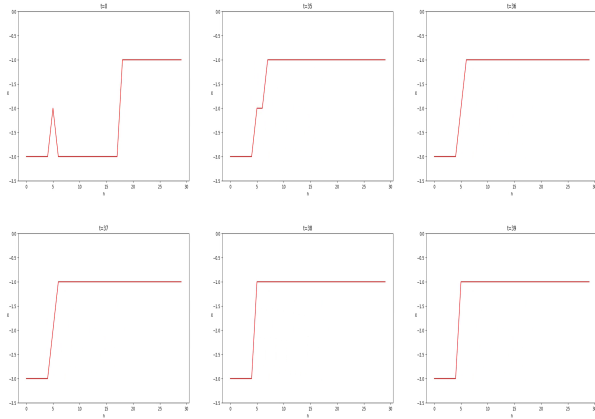


図 15 初期値にノイズを与えた例 1 ( $m = 1$ ,  $\zeta = 2$ ,  $\tilde{A} = 1$ ,  $\tilde{B} = 5$ ,  $\tilde{C} = 2$ ,  $\tilde{a} = -3$ ,  $\tilde{b} = -1$ )

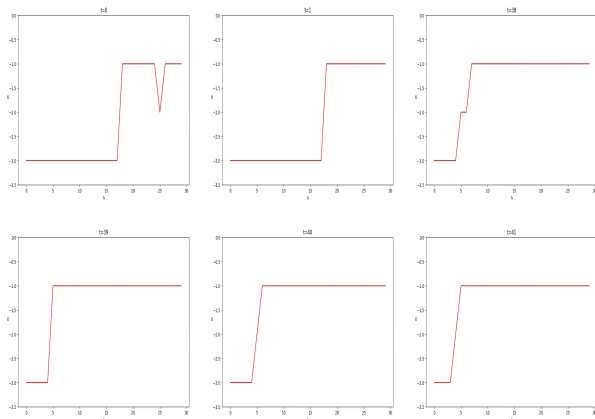


図 16 初期値にノイズを与えた例 2 ( $m = 1$ ,  $\zeta = 2$ ,  $\tilde{A} = 1$ ,  $\tilde{B} = 5$ ,  $\tilde{C} = 2$ ,  $\tilde{a} = -3$ ,  $\tilde{b} = -1$ )

## 7. おわりに

本稿では先行研究とは異なり、超離散 eNW モデルに対して、 $\zeta > 0$  とした解析を行うことにより、 $X_n^t \leq 0$  となる、渋滞の先頭や最後尾を表す交通流として意味を持つ解を数値的に導出することが出来た。また、(25), (26), (29), (30) 式のような交通流として意味を持つ解を得るためのパラメータの十分条件も導出することが出来た。さらに、衝撃波にノイズを加え、数値シミュレーションを行うことにより、その挙動の観察も行った。交通流モデルの研究においては密度と交通量の関係を示す基本図というものが重要であるが、車間距離の変化を定式化した eNW モデルでは密度や交通量の算出に工夫をしなければならない。そのため、今後は eNW モデルに対して、基本図の作成を検討する必要がある。また、OV 関数としてロジスティック曲線やアークタンジェントなどの他の関数を使用することが出来るかを検討することも今後の課題である。

## 参考文献

- 1) 鈴木 大庸, 離散可積分系による交通流モデルの時間差分化および超離散化とその厳密解, 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編, **59**(2018), 1-6.
- 2) G. F. Newell, Nonlinear Effects in the Dynamics of Car Following, *Oper. Res.*, **9**(1961), 209-229.
- 3) G. B. Whitham, Exact solutions for a discrete system arising in traffic flow, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **428**(1990), 49-69.
- 4) R. Hirota, S. Tsujimoto, Conserved Quantities of a Class of Nonlinear Difference-Difference Equations, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**(1995), 3125-3127.
- 5) Y. Tutiya, M. Kanai, Exact Shock Solution of a Coupled System of Delay Differential Equations: A Car-Following Model, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76**(2007), 083002[4 Pages].