

マルチモード共振法による最密六方金属の弾性異方性解析

友部, 耕也 / TOMOBE, Koya

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学研究科編

(巻 / Volume)

63

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2022-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00025267>

マルチモード共振法による最密六方金属の 弾性異方性解析

ELASTIC ANISOTROPY ANALYSIS OF HEXAGONAL METAL BY MULTI-MODE RESONANCE METHOD

友部耕也

Koya TOMOBE

指導教員 平野 元久

法政大学大学院理工学研究科機械工学専攻修士課程

Elastic constants are indispensable for mechanical design and stress analysis as material constants that govern the deformation and natural frequency of materials. And they are closely related to various physical properties and important physical properties. In addition to the development of lightweight and high-strength materials non-ferrous metals with a hexagonal close-packed structure, such as magnesium alloys and titanium, are attracting attention as the next generation of lightweight materials, analysis of elastic anisotropy and high-accuracy measurement of materials have become important issues. In this study, we established a precise measurement method of resonance frequency under free vibration using a small test piece (Multi-Mode resonance method), and completed a natural vibration analysis (Inverse analysis method) combining the finite element method and the Rayleigh-Ritz method. The objective is to determine the elastic modulus matrix of a material with high accuracy. The purpose of this study is to realize elastic anisotropy analysis of Magnesium alloy, Titanium alloy and Pure Titanium alloy that are assumed to have elastic anisotropy by plastic working. We discuss the results of calculating the elastic modulus matrix obtained by inverse analysis.

Key Words: *Elastic modulus, Elastic anisotropy, Inverse analysis, Magnesium alloy, Titanium alloy, Pure Titanium alloy*

1 はじめに

弾性定数は材料の変形や固有振動数を支配する材料定数として機械設計・応力解析を進める上で不可欠であり、種々の物性（破壊、熱膨張、相変態、融解など）とも密接な関連性を持ち、材料科学的に重要な物性値である。また、次世代の軽量化素材として、実用金属中最軽量で比強度の高いマグネシウム合金や、高い比強度と耐食性を持つチタンなどの六方最密構造の非鉄金属が注目されている。両素材とも優れた特徴を持つが加工性やコストの面で需要が伸び悩んでいる。このような軽量かつ高強度の材料の弾性異方性解析、高精度測定が重要課題となっている。

均質等方性材料のヤング率（縦弾性係数）や剛性率（横弾性係数）を引張試験、ねじり試験から求められるが、弾性変形下にある固体の3次元応力状態を記述する一般化フックの法則（ $\{\sigma_i\} = \sum_j [c_{ij}]\{\epsilon_j\}$ ）にしたがう弾性係数マトリックス $[c_{ij}]$ を決定するには、例えば圧延加工による集合組織から生じる弾性異方性有する材料の場合には、一つの材料からいく通りものいろいろな方向に試験片を切り出すことが必要になる。これに対し、本研究が開発した3次元自由度のマルチモード共振法によれば、一度の共振実験で複数の共振振動数を測定できこの一連の共振振動数の測定値から逆問題解析の手法により弾性係数マトリックス $[c_{ij}]$ を一度に決定することが可能になる。

弾性定数の測定法は、原理的に静的測定法と動的測定法の二種に大別される。動的測定法は微小試験片にも適用可能

であり、極めて小さいひずみ（数10nmオーダー）で短時間の高精度測定を実現できるため、共振法をはじめとして超音波パルス法などの方法が提案されている。従来の共振法では、単純な曲げ振動、ねじり振動などの1次元自由度の特定の振動モードの共振振動数を測定し弾性定数を決定する。一方、立方体またはこれに近い直方体、あるいは軸長-直径比が1に近い円柱など、立体的な形状を持つ試験片を用いた3次元自由度の共振法では、固有振動数解析と逆解析に用いる最適化問題解法の実行には多くの計算時間を要することが想定される。自由振動下の共振実験を達成するにあたっては、試験片の拘束を極力取り除いて再現性の高い共振振動を実現することは容易でないことが想定される。Demarest や Ohno は立方体や直方体の試験片によって、酸化物単結晶などのように内部摩擦 Q^{-1} が小さく、すなわち高い Q 値を持つ材料を用いて共振法実験の実施に成功し、これらの材料の弾性定数を決定している。

しかしながら、金属多結晶材料のように内部摩擦が比較的大きく共振を起こしにくい材料での測定例は数少ない。そこで、3次元自由度の自由振動の共振法であれば、圧延板、押出し材、引抜き材などの集合組織を持つ材料や、CFRP（Carbon Fiber Reinforced Plastics）などの異方性材料の弾性異方性を一つの材料から様々な方向に試験片を切り出す必要がなく、一個の微小試験片を用いることで測定・解析できる可能性がある。

以上で述べた観点に立ち、本研究では、微小試験片を用い

て自由振動下の共振振動数の精密測定法を確立し、有限要素法とレイリー・リッツ法を組み合わせた固有振動解析（逆解析法）を完成させ、異方性を有する材料の弾性係数行列を高精度に決定することを目的としている。当研究室ではこれまで、均質等方性のアルミニウム合金（ジュラルミン、超ジュラルミン、超々ジュラルミン）について、2個の独立な弾性定数を求め、各ヤング率の測定結果に有意差があることを示した。さらに、弾性異方性を有するSi単結晶の弾性定数測定については、立方晶の対称性由来する3個の独立な弾性定数を決定した。

本報告では、その更なる応用として最密六方格子を有し、塑性加工によって弾性異方性をもつと想定されるマグネシウム合金（AZ31B）、チタン合金（Ti 6Al-4V）の押出材（円柱体）と圧延材（直方体）、純チタン（TP270C, TP340C, H）の圧延材を対象とした。弾性異方性解析の実現を目的として、異方性材料の共振振動数測定と共振振動数逆解析を実施し、逆解析によって求めた弾性定数の結果について議論する。

2 実験方法

2.1 共振振動数測定装置実験方法

本研究では、マルチモード共振実験を10回行い、それぞれの共振振動数（固有振動数）を元に解析を行う。実験装置は、共振測定解析装置 FC-200 を用いており、この装置は共振測定解析装置本体、制御装置、制御ソフトウェアの3つの部分から構成されている。共振測定解析装置の概略図を Fig.1 に示す。各測定の条件を統一するため、赤色で示す加振素子の梁の表面にひずみゲージを貼り、試験片を上下の針で把持する際、一定のひずみとなるよう調節し、把持力の統一化を行った。

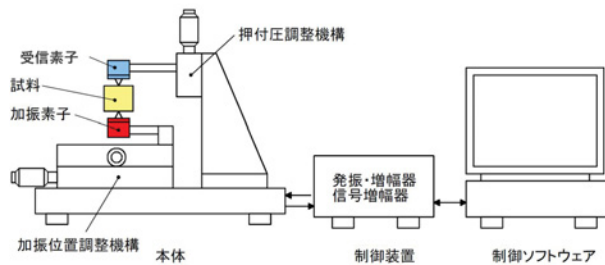


Fig. 1 Resonant frequency measurement system

制御装置から試験片支持部の加振用圧電素子に交流電圧を印加すると探針に支持された試料（試験片）を加振する。共振振動数の条件が満足されると試験片が共振する。この時、微小な加振力でも試験片の共振振幅は大きくなり、この振幅を試験片上部に取付けた受信用圧電素子で検出し共振波形がピークを示す共振振動数を読み取ることができる。本実験では、加振周波数を10kHz～1000kHzの範囲で測定した。

2.2 試験片

今回使用した試験片の主要諸元を Table 1, Table 2 に示す。試験片は、市販のマグネシウム合金（AZ31B）、チタン合金（Ti 6Al-4V）の円柱体、圧延材、純チタン合金（TP270C, TP340C, TP340H）の圧延材であり、円柱体は、熱間押出、圧延材は、マグネシウム合金、チタン合金、TP340H は熱

間圧延、TP270C, TP340C は冷間圧延である。また、今回使用した圧延材における圧延方向に平行な辺の長さ、垂直な辺及び厚さをそれぞれ X, Y, Z と定義した。

Table 1 Sizes of cylindrical test specimen

Material	Diameter (mm)	Height (mm)	Density (g/cm^3)
AZ31B	5.98	6.03	1.79
Ti 6Al-4V	5.99	6.01	4.36

Table 2 Sizes of rolled material test specimen

Material	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Density (g/cm^3)
AZ31B	10.00	10.00	1.99	1.76
Ti 6Al-4V	10.00	10.00	2.05	4.35
TP270C	10.00	10.00	1.99	4.50
TP340C	10.00	10.00	1.99	4.50
TP340H	7.00	7.00	4.05	4.48

2.3 引張試験

引張試験に用いる試験片については、JIS Z2241 13B 号に規定されている。本実験で用いた引張り試験片の寸法と形状を Fig.2 に示す。

試験片は、面内異方性を確認するため圧延材のみ用意した。試験機は島津製作所製オートグラフ AG-10TA、試験片は、共振振動実験に用いたものと同様な AZ31B, Ti 6Al-4V を使用した。また、試験片は圧延方向（R.D.）に切り出したもの、圧延直角方向（T.D.）に切り出したものを用意し、ひずみ測定には二軸ひずみゲージを用いた。

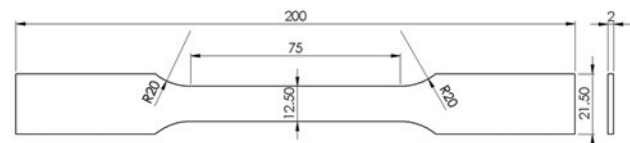


Fig. 2 Tension test specimen

3 Rayleigh-Ritz 有限要素解析

3.1 円柱体試験

金属材料の場合、試験片を円柱体とすることにより試験片製作が容易となり、かつ加工精度が向上する利点がある。試験片形状として直径 $2R$ 、軸長 $2L$ の円柱体を異方性材料（立方晶）と仮定して、 c_{11}, c_{12}, c_{44} を与える。解析には有限要素法と Rayleigh-Ritz 法を用いて、試験関数は円周方向に三角関数、柱軸方向にルジャンドル多項式、同心円筒に有限要素法を適用して算出する。座標系は Fig. 3 に示すように、円柱体の中心に原点を置く円柱座標系 (r, θ, z) に、直交座標系の三軸方向変位を $(u, v, w) e^{i\omega t}$ とした。変位 u, v, w を次式に示す。 ω は角振動数であり、周波数 f の関数とし

て, $\omega = 2\pi f$ で表される.

$$\begin{aligned} u &= R_u(r) \theta_u(\theta) P_u(z) \\ v &= R_v(r) \theta_v(\theta) P_v(z) \\ w &= R_w(r) \theta_w(\theta) P_w(z) \end{aligned} \quad (1)$$

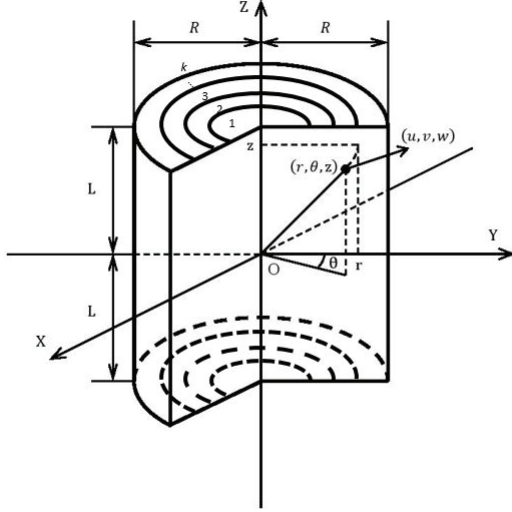


Fig. 3 The cylinder model

振動の基本モードは円周方向の波数 m , と柱軸方向の対称性 O(対称モード) あるいは E(逆対称モード) で分類され, 変位成分 (u, v, w) , 円周方向に対して, 固有値は縮退しているが位相差を持つ 2 種のモードで

$$\left. \begin{aligned} u &\propto \cos m\theta \\ v &\propto \sin m\theta \\ w &\propto \cos m\theta \end{aligned} \right\} \text{もしくは} \left. \begin{aligned} u &\propto \sin m\theta \\ v &\propto -\cos m\theta \\ w &\propto \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

であり, 軸方向に対してルジャンドル多項式 $P_j(x)$ に $\sqrt{(2j+1)/2}$ を乗じたものを用いて,

$$\text{対称モード : } O \left\{ \begin{aligned} u &\propto P_j(z/l) \\ v &\propto P_j(z/l) \\ w &\propto P_j(z/l) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} j = \text{偶数} \\ j = \text{奇数} \end{array} \quad (3)$$

$$\text{逆対称モード : } E \left\{ \begin{aligned} u &\propto P_j(z/l) \\ v &\propto P_j(z/l) \\ w &\propto P_j(z/l) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} j = \text{奇数} \\ j = \text{偶数} \end{array} \quad (4)$$

であり, 半径方向に対して, Fig. ?? に示すように半径 R を k 等分した $r_i = Ri/k$ ($i = 0 \sim k$) に節点を置いた. 要素 (i) 内変位 $\mathbf{u}^{(i)}$ は, 節点変位 (u_i, v_i, w_i) の節点 ($i-1$) と i の間の直線内挿によることとして,

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}_{i-1} (1 - \xi) + \mathbf{u}_i \xi \quad \left(\xi = \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right) \quad (5)$$

$$= \Theta \mathbf{P} \{ \phi_{i-1} (1 - \xi) + \phi_i \xi \} \quad (6)$$

である. ここで, Θ は円周方向を, P は軸方向を行列表示した右辺であり, ϕ_i は節点 i の一般化変位ベクトルである. ここでモードを波数 m , 対称性 O または E とし, その分類

を n とし, $mO(E)-n$ の形で表す. 運動エネルギー T は質量行列 M の式として,

$$T = \frac{\pi}{2} \rho \omega^2 r^2 l \Phi^T M \Phi \quad (7)$$

となる. 変位行列 Φ と質量行列 M は, 重なり部分を考慮して

$$\begin{aligned} \Phi &= \{ \phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_k \} \quad (8) \\ M &= \begin{bmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & & & & \\ M_{12}^1 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & & & & \\ & M_{12}^2 & M_{22}^2 & & & \\ & & M_{22}^2 + M_{11}^3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & M_{22}^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_0 & M'_1 & & & & \\ M'_1 & M_1 & M'_2 & & & \\ & M_1 & M_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & M_k \end{bmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

となる.

ひずみエネルギー V は, 応力ひずみ関係を与える弾性行列 H の式として,

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\epsilon}_i^T \mathbf{H} \boldsymbol{\epsilon}_i d\tau_i \quad (10)$$

ここで, $\boldsymbol{\epsilon}_i$ はひずみの 6 成分 ($\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}, \gamma_{r\theta}$) であり, 弾性行列 H は

$$H = G \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & & & \\ c_2 & c_1 & c_2 & & & \\ c_2 & c_2 & c_1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

と表される. 等方性材料では

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \\ c_2 &= c_1 - 2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

とおくことができる.

立方晶の場合は

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & & & & c_{44} & \\ & & & & & c_{44} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ひずみ成分を計算して積分を実行する際,

$$\int_{-1}^1 \mathbf{P}_i^T \mathbf{P}_j d\zeta \equiv \mathbf{D}_{ij} \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{P}_i^T \mathbf{P}'_j d\zeta \equiv \mathbf{E}_{ij} \quad (15)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{P}'_j^T \mathbf{P}_i d\zeta \equiv \mathbf{E}'_{ij} \quad (16)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{P}'_i^T \mathbf{P}'_j d\zeta \equiv \mathbf{F}_{ij} \quad (17)$$

には

$$\int_{-1}^1 P_i P_j d\zeta = \delta_{ij} \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 P'_i P'_j d\zeta = \sqrt{(2i+1)(2j+1)} \frac{(j+1)j}{2} \quad (19)$$

$$(i+j = \text{偶}, i > j) \quad (20)$$

$$= 0 \quad (i+j = \text{奇}) \quad (21)$$

$$\int_{-1}^1 P'_i P_j d\zeta = \sqrt{(2i+1)(2j+1)} \quad (22)$$

$$(i+j = \text{奇}, i > j) \quad (23)$$

$$= 0 \quad (\text{その他}) \quad (24)$$

を用い、また途中の計算過程で得られる

$$\int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{i-1+\xi} d\xi \equiv f_1 \quad (25)$$

$$\int_0^1 \frac{\xi^2}{i-1+\xi} d\xi \equiv f_2 \quad (26)$$

$$\int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{i-1+\xi} d\xi \equiv f_{12} \quad (27)$$

には近似数値積分を用いる。よって全ひずみエネルギーは

$$V_i = \frac{1}{2} \frac{G\pi R^2 L}{RL} \begin{pmatrix} \phi_{i-1} \\ \phi_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{i-1} \\ \phi_i \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{2} G\pi R \Phi^T K \Phi \quad (29)$$

と書ける。ここで $K_{11}^{(i)}$, $K_{12}^{(i)} = K_{21}^{(i)}$ および $K_{22}^{(i)}$ は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} K_{11}^{(i)} = & c_1 [D_{11} \left(i - \frac{1}{2}\right) + (D_{11} + mD_{12} + mD_{21} + m^2 D_{22}) f_1 \\ & \cdot \frac{l}{a} + F_{33} \frac{a}{lk^2} \left(\frac{i}{3} - \frac{1}{4}\right)] + c_2 \left\{ \frac{l}{2a} (-2D_{11} - mD_{12} - mD_{21}) \right. \\ & - \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{2}{3}\right) (E_{13} + E'_{13}) + \frac{1}{3k} m (E_{23} + E'_{23}) \} \\ & + (F_{11} + F_{22}) \cdot \frac{a}{lk^2} \left(\frac{i}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3k} m (E_{32} + E'_{32}) \\ & - (E_{31} + E'_{31}) \frac{1}{k} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{3}\right) + D_{33} \frac{l}{a} \left(i - \frac{1}{2} + m^2 f_1\right) \\ & + D_{22} \frac{l}{a} \left(i + \frac{1}{2} + f_1\right) + m^2 D_{11} \frac{l}{a} f_1 + m (D_{21} + D_{12}) \\ & \cdot \frac{l}{a} \left(\frac{1}{2} + f_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12}^{(i)} = & c_1 \{ -D_{11} \left(i - \frac{1}{2}\right) + (D_{11} + mD_{12} + mD_{21} + m^2 D_{22}) \\ & \cdot -E_{13} \frac{1}{k} f_{12} \} \frac{l}{a} + F_{33} \frac{a}{lk^2} \left(\frac{i}{6} - \frac{1}{12}\right) + c_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{a} m (D_{21} - D_{12}) \right. \\ & \cdot \left(\frac{i}{3} - \frac{1}{12}\right) + E'_{13} \frac{1}{k} \left(\frac{2i}{3} - \frac{5}{12}\right) + (E_{23} + E'_{23}) \frac{m}{k} \left(\frac{i}{6} - \frac{1}{12}\right) \} \\ & + (F_{11} + F_{22}) \frac{a}{lk^2} \left(\frac{i}{6} - \frac{1}{12}\right) - \frac{m}{6k} (E_{32} + E'_{32}) - E_{31} \frac{1}{k} \\ & \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{6}\right) + E'_{31} \frac{1}{k} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{3}\right) + D_{33} \frac{l}{a} \left\{ -\left(i - \frac{1}{2}\right) + f_{12} m^2 \right\} \\ & + D_{22} \frac{l}{a} \left\{ -\left(i - \frac{1}{2}\right) + f_{12} \right\} + m^2 D_{11} \frac{l}{a} f_{12} + \frac{l}{a} m D_{21} \\ & \cdot \left(\frac{1}{2} + f_{12}\right) + \frac{l}{a} m D_{12} \left(-\frac{1}{2} + f_{12}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{22}^{(i)} = & c_1 \{ [D_{11} \left(i - \frac{1}{2}\right) + (D_{11} + mD_{12} + mD_{21} + m^2 D_{22}) \\ & \cdot f_2] \frac{l}{a} + F_{33} \frac{a}{lk^2} \left(\frac{i}{3} - \frac{1}{12}\right) \} + c_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{a} (2D_{11} + mD_{12} \right. \\ & + mD_{21}) \frac{1}{k} \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{6}\right) (E_{13} + E'_{13}) + \frac{1}{3k} m (E_{23} + E'_{23}) \} \\ & + (F_{11} + F_{22}) \frac{a}{lk^2} \left(\frac{i}{3} - \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{3k} m (E_{32} + E'_{32}) \\ & + (E_{31} + E'_{31}) \frac{1}{k} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{6}\right) + D_{33} \frac{l}{a} \left(i - \frac{1}{2} + m^2 f_2\right) \\ & + D_{22} \frac{l}{a} \left(i - \frac{3}{2} + f_2\right) + m^2 D_{11} \frac{l}{a} f_2 + m (D_{12} + D_{21}) \\ & \cdot \frac{l}{a} \left(-\frac{1}{2} + f_2\right) \end{aligned}$$

よって、一般固有値問題として、

$$\begin{aligned} K \Phi &= M \Phi \lambda \quad (30) \\ \lambda &= \frac{\rho R L \omega^2}{G} \end{aligned}$$

を解くことで、固有振動数の計算を行う。本計算では柱軸方向に5項 (p=5) をとり、半径方向に18分割 (k=18) した。

3.2 直方体試験片

圧延材のマルチモードにおける自由振動の固有振動数を厳密に算出することは困難であるため、Demarest および Ohno が鋳物に対して単結晶の直方体試験片に適用した同様な Rayleigh-Ritz 法を用いた。また、試験関数に Legendre 多項式を規格化した P 関数の積を用い変位 u, v, w を次式のように置いた。

$$\begin{aligned} u &= \frac{P_{11}(X_1/L_1) P_{l2}(X_2/L_2) P_{l3}(X_3/L_3)}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \\ v &= \frac{P_{m1}(X_1/L_1) P_{m2}(X_2/L_2) P_{m3}(X_3/L_3)}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \quad (31) \\ w &= \frac{P_{n1}(X_1/L_1) P_{n2}(X_2/L_2) P_{n3}(X_3/L_3)}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \end{aligned}$$

ここで試験片寸法は、Fig. 4 に示すように $2L_1 \times 2L_2 \times 2L_3$ とし、座標原点は中心にとる。円柱体の場合と同様に、計算される振動モードは P 関数の偶奇性によって決定される。本研究に用いられる試験片のように形状および弾性的性質に対称性がある場合は、その対称性を反映して P_{11} , P_{m2} , P_{n3} の偶奇の全ての組合せである8種類の計算を行うことですべてのモードを計算することができる。本研究では、EEE-n, OOO-n などのように表示した。

圧延加工により金属材料は圧延方向とそれに直交する方向に対称性を有する集合組織を形成するため、直行異方性材料と仮定し、弾性スティフネス c_{ij} は次のように9個のパラメータを用いて表現できる。[4]

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & & & \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & & & & c_{55} & \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (32)$$

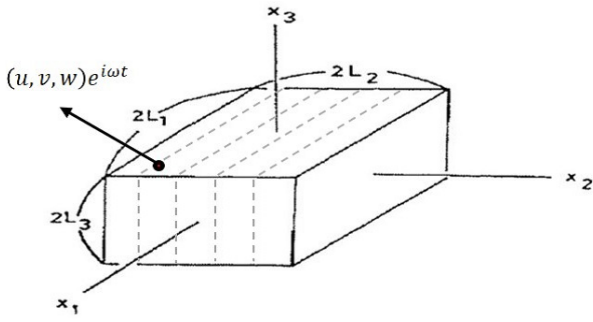


Fig. 4 The cuboid model

スティフネス c_{ij} からコンプライアンス s_{ij} への換算式を次式に示す。

$$\begin{aligned}
 D &= c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{12}c_{13}c_{23} - c_{13}^2c_{22} - c_{11}c_{23}^2 - c_{12}^2c_{33} \\
 E_x &= 1/s_{11} = (c_{23}^2 - c_{22}c_{33})/D \\
 E_y &= 1/s_{22} = (c_{13}^2 - c_{11}c_{33})/D \\
 E_z &= 1/s_{33} = (c_{12}^2 - c_{11}c_{22})/D \\
 \nu_{xy} &= -s_{12}/s_{11} = (c_{13}c_{23} - c_{12}c_{33})/(c_{23}^2 - c_{22}c_{33}) \\
 \nu_{yx} &= -s_{23}/s_{22} = (c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23})/(c_{13}^2 - c_{11}c_{33}) \\
 \nu_{zx} &= -s_{13}/s_{33} = -(c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23})/(c_{12}^2 - c_{11}c_{22}) \\
 G_{xy} &= 1/s_{44} = c_{44} \\
 G_{yz} &= 1/s_{55} = c_{55} \\
 G_{zx} &= 1/s_{66} = c_{66}
 \end{aligned} \tag{33}$$

先行研究の結果より弾性コンプライアンスをパラメータとした方が厚さ方向に関するパラメータの影響度が小さく、測定に有利であることが分かっている [4]。以上の理由から本研究では圧延方向、圧延方向に垂直方向および板厚方向にそれぞれヤング率 E 、剛性率 G 、ポアソン比 ν の 9 個を弾性コンプライアンスとして採用した。さらに、 s_{11} 、 s_{22} 、 s_{12} 、 s_{44} の 4 個のみを独立な弾性定数パラメータとし、共振振動数への影響度が小さい板厚方向の他の 5 個の弾性定数は近似的に等方体と仮定して測定を行った。

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & & & \\ s_{12} & s_{22} & s_{12} & & & \\ s_{12} & s_{12} & s_{22} & & & \\ & & & s_{44} & & \\ & & & & s_{44} & \\ & & & & & s_{44} \end{bmatrix} \tag{34}$$

3.3 振動モードの表示

節点変位行列 Φ の一般化節点変位ベクトル ϕ_i は、

$$\phi_i = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, a_4, b_4, c_4, a_5, b_5, c_5\} \tag{35}$$

となり、一般化節点変位ベクトルを用いて振動モードを描画するには、式 (6) から、例えば、

$$\begin{cases} u_i = \cos m\theta (a_1P_0 + a_2P_2 + a_3P_4 + a_4P_6 + a_5P_8) \\ v_i = \sin m\theta (b_1P_0 + b_2P_2 + b_3P_4 + b_4P_6 + b_5P_8) \\ w_i = \cos m\theta (c_1P_1 + c_2P_3 + c_3P_5 + c_4P_7 + c_5P_9) \end{cases}$$

(36)

を用いて。ここで、式 (6) の Θ について、計算時に式 (2) のどちらかを利用して計算を行ってもよいが、波数 $m=0$ の場合においてのみ位相差は無く、どちらか一方のみでしか、節点変位ベクトル u_i は現れない。

この式 (36) により振動モードを表すことができ、基本モードを波数 m 、対称性 O または E とし、基本モードの次数を n とし、 $mO(E)-n$ の形で表す。

また、実際に円柱座標を出力する場合は、円柱座標系 (r, θ, z) から直交座標系 (X, Y, Z) に変換する必要があり、式 (36) を用いて以下のように計算できる。

$$\begin{cases} X = (r + u_i) \cos \theta - v_i \sin \theta \\ Y = (r + u_i) \sin \theta + v_i \cos \theta \\ Z = \frac{z}{L} \times L + w_i \end{cases} \tag{37}$$

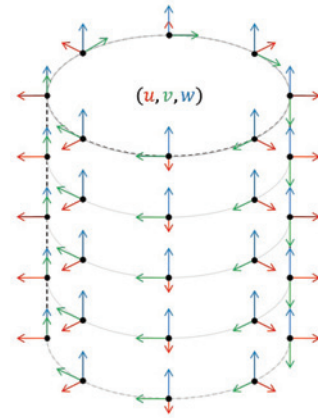


Fig. 5 Displacement vectors at the coordinates specified by Cylindrical coordinate (r, θ, z)

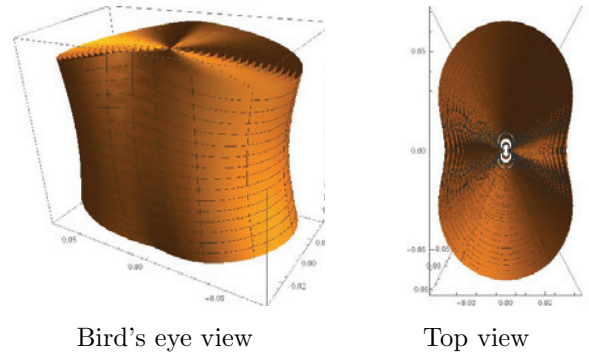


Fig. 6 Resonance mode specified by 2O-1

3.4 逆解析と最適化問題解法アルゴリズム

一般的な形状での弾性体の三次元自由振動を扱う場合、試験片の形状・寸法・密度および一組の弾性定数を与えて共振周波数を計算することは可能であるが、共振周波数から弾性定数を計算することは不可能である。したがって、弾性定数をパラメータとし、共振周波数の実験値と計算値が十分に一致するまで、固有値計算を繰り返し、最適化問題として弾性定数を逆解析により求める。今回単結晶では六方晶系であるマグネシウム、チタンの弾性定数 [7] を採用している。本研究では、最小二乗法を利用して各材料の弾性定

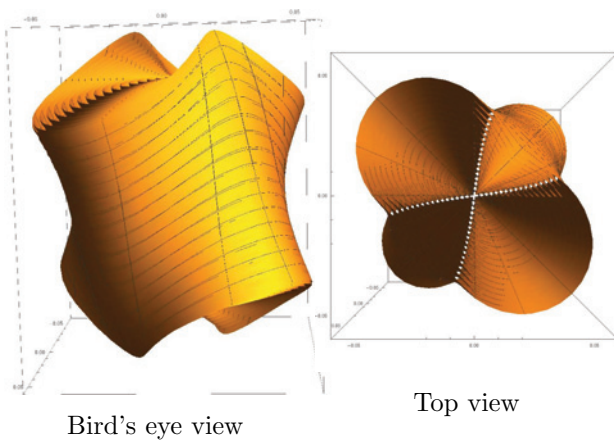


Fig. 7 Resonance mode specified by 2E-1

数を算出した。共振振動数の実験値と計算値を各モードごとに差を取り、偏差二乗和 $\sum (f^n)^2$ を求める。その $\sum (f^n)^2$ が最小となる弾性定数が最終結果として決定される。最適化の手順を以下の Fig. 8 に示す。

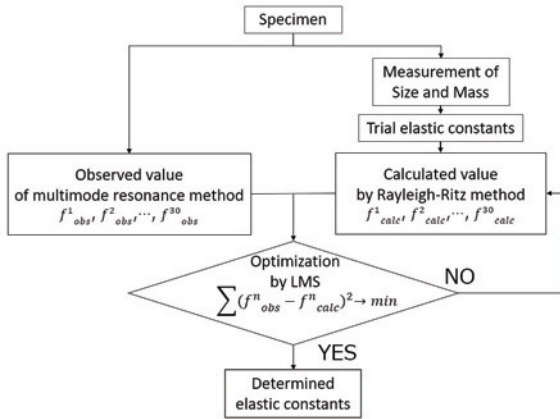


Fig. 8 Flowchart for solving inverse problem

4 測定結果

4.1 共振振動数

Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11 に各試験片の多モード共振法により計測された共振振動数結果を示す。波形のピーク値が共振振動数であり、円柱材では 11~12 個、圧延材では、12~16 個のピークが検出された。また、Table 3, 4, 5, 6 に解析により求めた共振振動数の計算値と多モード共振法により計測された実測値の比較を示す。なお、計算値は最適化された弾性定数を用いて算出した値である。

4.2 弾性定数

Table 7, 8, 9, 10, 11 に本測定法により求めた弾性定数を示す。また、Fig. 12, Fig. 13, Fig. 14 に各圧延材のヤング率およびポアソン比の面内分布を引張試験値の比較とともに示す。ここで R.D. を 0°, T.D. を 90° と表示する。45° 方向の値は、チタン合金の引張試験値を除き座標変換に

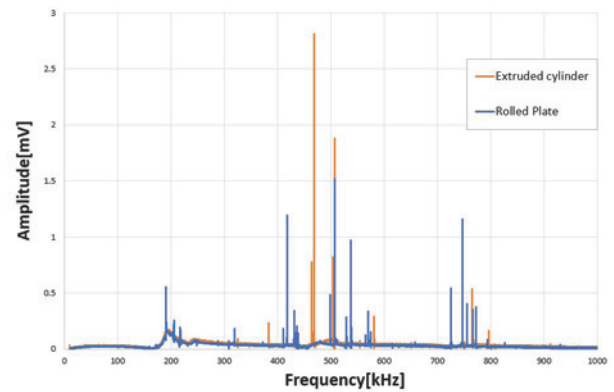


Fig. 9 Resonance frequency of AZ31B

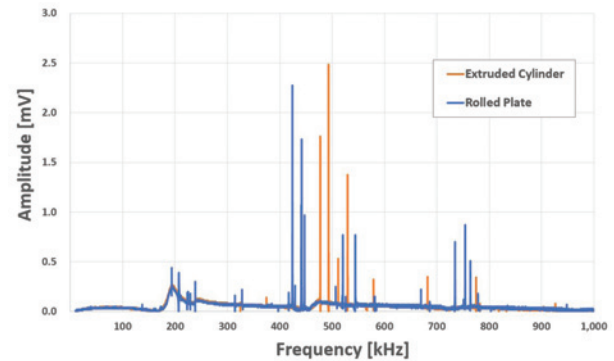


Fig. 10 Resonance frequency of Ti 6Al-4V

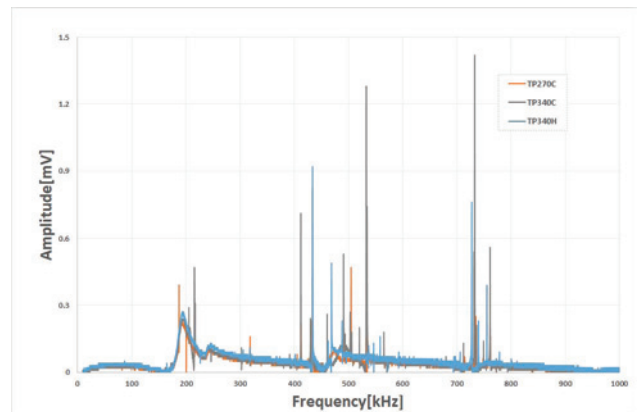


Fig. 11 Resonance frequency of Pure titanium

Table 3 Resonance frequencies of TP340C rolled plate

No.	Calculation (kHz)	Mode	Observation (kHz)
1	82.673	EEE-1	-
2	108.958	OOE-1	-
3	140.052	OOE-2	-
4	187.432	OEE-1	200.580
5	275.824	OEO-1	-
6	282.79	EEO-1	-
7	299.524	EOE-1	302.320
8	314.501	OOE-3	-
9	320.118	EEE-2	318.70
10	324.277	OOO-1	-
11	366.693	EEE-3	-
12	387.785	OOO-2	391.660
13	423.575	EOO-1	411.980
14	459.003	OEE-2	460.660
15	493.841	OOE-4	491.040
16	494.031	EEO-2	503.380
17	527.562	OEO-5	532.920
18	544.002	OEE-1	-
19	558.85	EEO-3	565.280
20	572.651	OEO-2	-
21	581.943	OOO-3	-
22	660.848	OEO-3	-
23	688.256	OOO-4	-
24	724.757	OEO-4	712.160
25	739.042	EEE-4	732.920
26	747.917	OEE-3	749.300
27	767.247	EEO-4	761.320
28	779.072	EOE-2	-
29	791.701	EEO-5	-
30	806.501	EEE-5	-

Table 4 Resonance frequencies of TP340H rolled plate

No.	Calculation (kHz)	Mode	Observation (kHz)
1	235.569	EEE-1	-
2	297.167	OOE-1	-
3	375.591	OOE-2	-
4	387.05	EOO-1	-
5	396.476	OOO-1	-
6	400.812	EEO-1	-
7	434.214	OEE-1	433.800
8	449.636	OOO-2	468.560
9	481.467	EEE-2	488.420
10	507.043	OOO-3	-
11	539.413	OEE-2	537.240
12	594.77	OEO-1	-
13	655.009	EOE-1	-
14	667.56	OOE-3	-
15	669.474	OOE-4	-
16	675.455	EEE-3	-
17	677.626	EEO-2	-
18	718.643	EEO-3	706.320
19	722.31	EOO-2	-
20	725.055	OOO-4	-
21	727.583	OOO-5	727.620
22	739.826	EOO-3	740.020
23	760.501	OOE-5	755.440
24	763.196	EEE-4	-
25	776.062	EOE-2	778.580
26	782.613	OEO-2	-
27	792.978	EEO-4	-
28	808.864	OOE-6	-
29	824.833	EEO-5	-
30	842.853	OOO-6	-

よる換算値である。ここで用いた換算式を以下に示す。

$$l = \cos \theta$$

$$m = \sin \theta$$

$$\bar{s}_{11} = s_{11}l^4 + (2s_{12} + s_{44})l^2m^2 + s_{22}m^4$$

$$\bar{s}_{12} = s_{12}(l^4 + m^4) + (s_{11} + s_{22} - s_{44})l^2m^2$$

$$\bar{s}_{22} = s_{11}m^4 + (2s_{12} + s_{44})l^2m^2 + s_{22}l^4$$

$$\bar{s}_{44} = 2(2s_{11} + 2s_{22} - 4s_{12} - s_{44})l^2m^2 + s_{44}(l^4 + m^4) \quad (38)$$

なお値は、引張試験値を除き 10 回の平均値である。

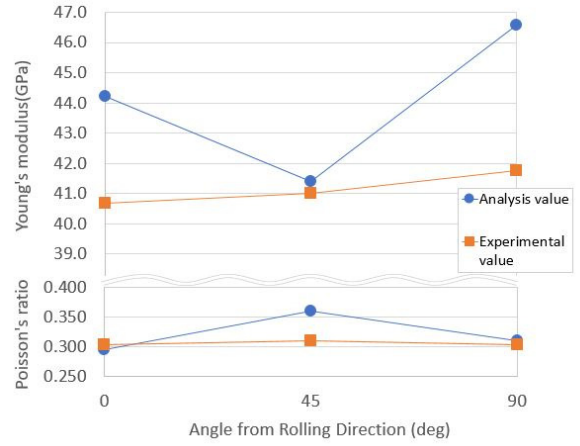


Fig. 12 Elastic constants of AZ31B

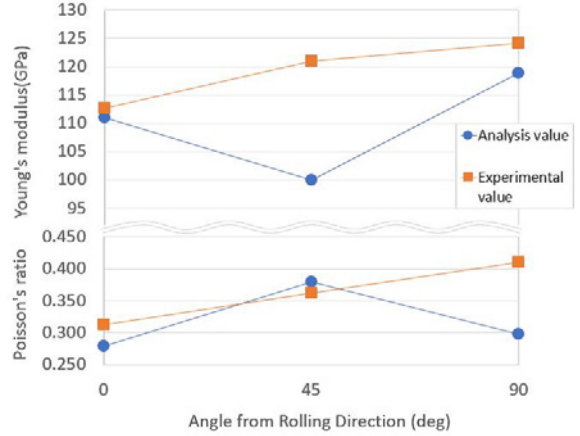


Fig. 13 Elastic constants of Ti 6Al-4V

Table 5 Elastic stiffness of AZ31B cylinder specimen (MV is Mean Value, SD is Std. Deviation)

	c_{11} (GPa)	c_{12} (GPa)	c_{44} (GPa)	E (GPa)
Mean Value (MV)	52.8	12.9	16.6	40.5
Std. Deviation (SD)	0.299	0.733	0.139	0.498

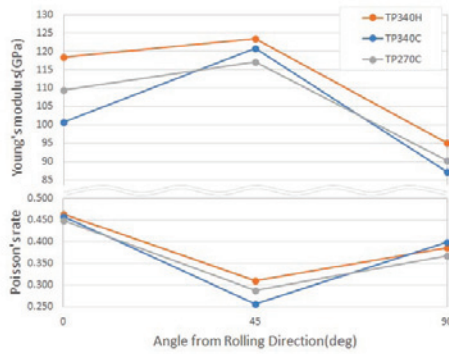


Fig. 14 Elastic constants of Pure titanium

Table 6 Elastic Constants of AZ31B rolled plate

	s_{11}	s_{12}	s_{22}	s_{44}
MV	0.0227	-0.00668	0.0215	0.0657
SD	0.00164	0.000615	0.00106	0.00108

Table 7 Elastic stiffness of Ti 6Al-4V cylinder specimen

	c_{11} (GPa)	c_{12} (GPa)	c_{44} (GPa)	E (GPa)
MV	171	96.4	43.9	118
SD	3.73	5.04	0.236	0.960

Table 8 Elastic Constants of Ti 6Al-4V rolled plate

	s_{11}	s_{12}	s_{22}	s_{44}
MV	0.00898	-0.00251	0.00842	0.0276
SD	0.000299	0.000193	0.000296	0.000128

Table 9 Elastic Constants of Pure titanium rolled plate

		s_{11}	s_{12}	s_{22}	s_{44}
TP270C	MV	0.00911	-0.00410	0.0113	0.0218
	SD	0.000280	0.000311	0.00103	0.00203
TP340C	MV	0.00996	-0.00456	0.0115	0.0208
	SD	0.000596	0.000375	0.000396	0.000274
TP340H	MV	0.00878	-0.00407	0.0105	0.0213
	SD	0.00200	0.000474	0.000249	0.00123

5 結論

異方性材料の弾性定数測定法開発を目的として、マグネシウム合金チタン合金および純チタン合金を本測定法によって弾性定数の測定を行い、以下の結果を得た。

- 1 本測定方法によって、マグネシウム合金およびチタン合金では、従来データと同等の弾性定数を測定できることを確認し、弾性異方性を有する3個、4個の独立な弾性定数を対象とした測定法が確立された。
- 2 六方最密構造金属が異方性を有していることが分かり、弾性定数はR.D.からT.D.に増加傾向にある。AZ31Bでは約5%、Ti 6Al-4Vでは約10%の増加率が見られた。この結果は、引張試験による値ともよく一致した。微小試験片から面内異方性を決定する手法が確立された。
- 3 解析値における45°方向ヤング率の換算値がR.D.値に比べて低下、45°方向ポアソン比の換算値が増加しており、引張試験値と異なる結果となった。式(38)から分かるように s_{12} の値の影響が大きく、45°方向のヤング率、ポアソン比の値がR.D.値、T.D.値と大きく異なる原因だと思われる。そのため、本測定法に用いた初期値となる弾性定数のさらなる最適化が必要である。3.4で述べた通り、今回単結晶では六方晶系であるマグネシウム、チタンの弾性定数を採用している。今後、この値を変化させることで最小二乗法による偏差二乗和をより少なくし、より最適な値に収束させる必要があると考えられる。
- 4 純チタンではT.D.からR.D.に増加傾向があり、約15%の増加率が見られた。また、熱間圧延の純チタン合金と冷間圧延の純チタンでは、熱間圧延の弾性定数が大きく、0°方向では約15%、90°方向では約10%上回った。展望としては他の六方最密構造金属と同じようにR.D.からT.D.に弾性定数が増加するものと考えていたが、逆の結果となった。初期値を何度か変えて計算したが有用な値にはならなかった。問題は与える初期値ではなく、ピックアップした共振振動数を式に入れ込む際のズレやモードの違いによる値の変化を一般化する必要があると考えられる。

謝辞

本研究を行うにあたって多大なるご指導を賜ったゼミ担当教員の平野元久教授、試験片の作成にご協力頂いたワークショップの方々に謝意を表します。

参考文献

- [1] H. H. Demarest, *J. Acoust. Soc. Am.* **49**, 768 (1971).
- [2] I. Ohono, *J. Physo. Earth* **24**, 355 (1976).
- [3] 妹尾允史, 西村融, 平野元久, 日本機械学会論文集 (A編) **50**, 451, 440 (1984).
- [4] 妹尾允史, 松室昭仁, 河合 望, 張川隆司, 日本機械学会論文集 (A編) **54**, 501, 1030 (1988).
- [5] 長松昭男, モード解析入門, コロナ社 (1993).
- [6] 南部隆夫, 微分方程式入門, 朝倉書店 (2000).
- [7] 中曾根祐司, 異方性材料の弾性論, コロナ社 (2014)