

# 行列補完のためのニューラルネットワークによる局所低ランク近似

Guo, Bin / 郭, 斌

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院情報科学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 情報科学研究科編

(巻 / Volume)

17

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

6

(発行年 / Year)

2022-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00025258>

# 行列補完のためのニューラルネットワークによる局所低ランク近似

## Neural Network based on Locally Low Rank Approximation for Matrix Completion

郭 斌

Guo Bin

法政大学情報科学部 情報科学研究科

E-mail: bin.guo.8r@stu.hosei.ac.jp

### Abstract

*This paper deals with matrix completion when each column vector belongs to a low-dimensional manifold. One of the most common matrix completion methods is the matrix rank minimization method. The completion is achieved by solving an optimization problem with the matrix rank as the objective function, but the optimization with the objective function is NP-hard. Many relaxation problems using alternative functions have been proposed, but the estimation accuracy deteriorates when the data belong to a low-dimensional manifold. Recently, GAIN (Generative Adversarial Imputation Net), a matrix completion method based on machine learning, has been proposed as a solution to the matrix problem when the data belong to a low-dimensional manifold, but it is a simple three-layer neural network method, and high completion accuracy cannot be expected when the target manifold is complex or has a high dimensionality. This paper proposes an architecture for matrix completion based on clustering and projection, taking advantage of the fact that any manifold can be locally approximated in a low-dimensional linear space. Furthermore, an activation function is applied to the architecture to improve the accuracy. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of the proposed method.*

### 1.はじめに

本稿では、各列ベクトルが低次元多様体に属している場合の行列補完問題（以下、非線形行列補完と称する）を扱う。行列補完問題とは、部分的に観測要素が与えられ

ている行列の未知要素を補完する問題である。同問題では行列ランク最小化と呼ばれる手法を用いて行列補完を行うことが一般的である[1,2]。しかし、[1]や[2]の手法は非線形行列補完問題において精度が悪いため、同問題に対して様々な手法が提案されており、近年では、敵対的生成ネットワーク (Generative Adversarial Network: GAN) を用いた行列補完手法[3]も提案されている。同手法は、補完対象の行列に関して、未知の要素を含む各列ベクトルを元の多様体上のベクトルへと写像するネットワークにより行列補完を行う手法である。しかしながら[3]ではそのアーキテクチャが単純な3層ニューラルネットワークで構成されており、多様体が複雑な場合やその次元が高い場合において高い精度を期待することはできない。そこで本稿では、任意の多様体は局所的に低次元線形空間に近似可能であるという性質を利用した文献[4]に基づき、 $k$ -means クラスタリングと射影に基づいた行列補完のためのアーキテクチャを提案する。数値シミュレーションにより提案手法の有効性を示す。

### 2.行列補完の問題設定

本章では本論文で扱う行列補完問題について説明する。

#### 2.1 線形行列補完問題

まず、本論文では、一般的な線形行列補完という問題について説明する。

行列補完問題とは、行列  $X \in \mathbb{R}^{M \times N}$  の欠落したエントリを推定するものである。多くの古典的な方法は、その列（または行）ベクトルが低次元の線形部分空間に属することを仮定して、次のような行列のランク最小化問題を解く。

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \text{rank}(X) \\ \text{Subject to} & x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{array} \quad (2.1)$$

本論文では式(2.1)を線形行列補完問題と称する。 $\Omega$ は既知の値の集合で、 $x_{i,j}^*$ は観測値である。式(2.1)はNP 困難であることが知られているため、ランクの代わりに様々な目的関数を使用される。

文献[1]では、切断核ノルム最小化法を導入して $X$ の切断核ノルムで(2.1)の目的関数を以下のように緩和する、

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \|X\|_{*,r} \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで、 $\|X\|_{*,r}$  は与えられた定数 $r$ で切り捨てたものを表す。核ノルムは次のように定義される。

$$\|X\|_{*,r} = \sum_{i=r+1}^M \sigma_i \quad (2.3)$$

$\sigma_i$ は $X$ の第 $i$ 番目に大きい特異値である。

しかし、実用的なアプリケーションでは、行列の列ベクトルは低次元の線形部分空間に属さないことがほとんどである。そのため、低ランク行列を推定する古典的な方法は高い性能を発揮しない。

## 2.2 非線形行列補完

2.1 に説明した線形行列補完問題と同様に、以下に非線形行列補完問題を定式化する。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \text{rank}(\psi(X)) \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし、関数 $\psi$ は $X$ の各列ベクトルに対して、その各列ベクトルが属する多様体から同次元の線形空間に写像する関数を示す。ほとんどの応用において同関数は未知であり、この非線形行列補完問題は明示的に設計することは不可能である。そのため、非線形行列補完問題はその多様体の性質を考慮し、その多様体の特性と $X$ の未知の要素を同時に推定する問題となる。

近年、行列の列ベクトルが低次元の多様体に属すると仮定した手法がいくつか提案されている。論文[5]では、多様体上の各ベクトルの局所領域が低次元の線形部分空間によって近似できるという考えに基づくアプローチを紹介する。

まず、対角行列 $D^{(i)} \in \{0,1\}^{N \times N}$ を定義する。ここで、 $i = 1, 2, \dots, N$  における $D^{(i)}$ の第 $j$ 対角要素 $D_{j,j}^{(i)}$ が以下のように

定義されると、多様体の局所領域は低次元線形空間で近似可能なことから、部分行列 $XD^{(i)}$ は低ランク行列で近似することができる、

$$D_{j,j}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_j \text{ is nearest neighbor of } x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで、 $x_i$ は $X$ の第 $i$ 番目の列ベクトルである。したがって、非線形行列補完問題は、以下の式で定式化される、

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{i=1}^N \|XD^{(i)}\|_{*,r} \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

式(2.6)は、 $X$ の各列ベクトルにおける局所近傍の列ベクトルを集めて生成した部分行列 $XD^{(i)}$ の行列ランク総和最小化問題の近似問題を表す。同問題の解法として、文献[5]では文献[1]の手法を用いた逐次的最小化アルゴリズムを提案している。

## 3. 関連研究

### 3.1 線形行列補完問題の解法(NASO 法)

本項では行列補完問題によく使われている行列ランク最小化手法に対する従来の手法 NSAO(Null Space based Alternating Optimization)法[2]について説明する。行列補完問題は以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \text{rank}(X) \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.1 \text{ 再掲})$$

行列 $X$ のランクを最小化することは、その行列の零空間の次数を最大化することに等しいことから、問題(2.1)は以下の問題と等価である。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && \text{rank}W \\ & \text{Subject to} && XW = 0_{m,n}, x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega' \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし、 $W \in R^{n \times n}$ と $X \in R^{m \times n}$ が設計変数であり、 $0_{m,n}$ は $m \times n$ の零行列を表す。NSAO 法では、問題(3.1)に対する近似解法を与える。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \|W\|_F^2 \\ & \text{Subject to} && W_{ii} = 1, XW = 0_{m,n}, x_{i,j} = x_{i,j}^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

$W_{ii} = 1$ の制約下で $\|W\|_F^2$ を最小化した場合、自明な解として単位行列が得られ、 $W$ のランクは最大化され

る. 故に, 上記問題は問題(3.1)の良い近似解を与えることが期待される. 問題(3.2)は制約 $XW = 0_{m,n}$ を含むため難しい問題である. そこで, 以下のようなラグランジュ緩和問題を考える.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f_\gamma(W, X) \\ & \text{Subject to} && W_{ii} = 1, x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega' \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし, 関数 $f_\gamma(W, X)$ は,

$$f_\gamma(W, X) = \gamma \|W\|_F^2 + \|XW\|_F^2$$

と定義され,  $\gamma > 0$ である. 上記問題は目的関数が凸関数でないため厳密に解くことは難しいが,  $X$ または $W$ を定数とすると凸最適化問題として解けるため,  $X$ と $W$ を交互に固定化することにより精度の高い近似解を得ることができる.

### 3.2 オートエンコーダ

本節では3.1項と4章に関連する技術として, ニューラルネットワークアーキテクチャの1つであるオートエンコーダについて述べる. オートエンコーダはデータの次元圧縮に用いられる技術として頻繁に用いられる技術である. オートエンコーダは図1のような構造をしており, 左から右の順にデータを写像することでデータの次元圧縮を行う手法である. オートエンコーダでは入力層でデータを受け取り, 重みを付けて隠れ層に移るまでの写像をエンコードと呼び, また, 隠れ層から出力層へと写像することをデコードと呼ぶ.

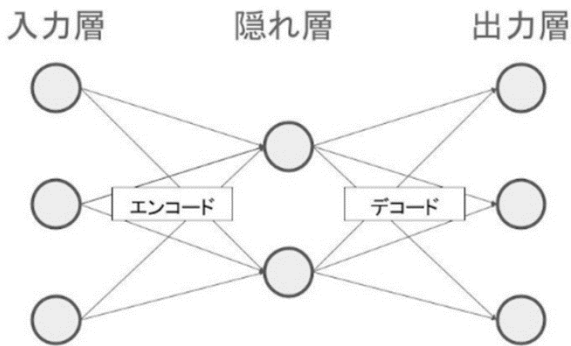


図1 オートエンコーダの構造

オートエンコーダの特殊例として, 活性化関数を用いない場合はデータを線形空間上で次元を縮退させる. 一方, 式(3.2)における制約条件である $XW = 0$ を考慮すれば $X(I - W) = X$ であるため,  $I - W = Z$ を満たす $Z$ について $XZ = X$ を満たす. 今,  $X$ がランク落ちしているとき,  $XZ = X$ を満たす最小ランクの $Z$ は,  $X$ の各行ベクトルを線形空間上において次元圧縮することのできる作用素であるとなさせる. ゆえに, NSAO はオートエンコーダの一種を用いた行列ランク最小化手法だと言える.

### 4. ニューラルネットワークによる局所低ランク近似

本章でははじめに, 文献[6]において論じられている式(2.6)の緩和問題について説明を行う. 同問題は各列に関する部分行列の行列ランク最小化に基づいたアルゴリズムによって近似解を得ることが可能だが, このアルゴリズムでは, 1回の反復で $N$ 個の特異値分解(SVD)が必要であり, 多大な計算時間がかかる. 部分行列補完問題の数を減らすために, [6]は, ユークリッド距離を用いた $x_i$ に $k$ -means クラスタリング法を適用し,  $k$ 個のクラスタの部分行列補完問題を与える新しいアルゴリズムを提案している. [6]では, 第 $j$ 番目の対角エントリ $D_{j,j}^{(i)}$ が次式で定義される対角行列 $D^{(i)}$ を定義している,

$$D_{j,j}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_j \text{ is a member of the } i\text{-th clustering} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.1)$$

そして, (2.6)の緩和された部分行列補完問題を以下のように考える,

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{i=1}^k \|XD^{(i)}\|_{*,r} \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2)のアルゴリズムは1回の反復で $k$ 回のSVDが必要なので,  $k \ll N$ の時, 計算時間は大幅に短縮される. しかし, このアルゴリズムは, 列ベクトルが複数の低次元線形部分空間に属するという仮定に基づく低ランクアプローチであり, つまり, 多様体が断片的な線形部分空間で近似される場合に対して, 復元精度が低下する. 高い復元精度を実現するために, [6]は多重 $k$ -means クラスタリ

ングを用いたアルゴリズムを提案した．ここで， $k \in \{k_1, k_2, \dots, k_K\}$ ， $k_i$ は第 $i$ 番目のクラスタのメンバー数とし，文献[6]は以下のような部分行列のランク総和最小化問題を定式化した．

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{l=1}^K \sum_{i=1}^{k_l} \|XD^{(l,i)}\|_{*,r} \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで， $D^{(l,i)}$ は以下のように定義される，

$$D_{j,j}^{(l,i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_j \text{ is a member of the } i\text{-th cluster} \\ & \text{of the } l\text{-th clustering } (k = k_l) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.4)$$

この問題の解は，(4.1)と同じ更新方式で， $D^{(i)}$ を $D^{(l,i)}$ に置き換えることで得られる．

さらに，文献[4]は，式(4.3)の行列ランク総和最小化問題を NSAO の原理に基づき，補助変数行列 $W$ と $X$ に関する二次形式により行列ランク最小化問題を再定式化することを考えた．もし， $X$ はランクであれば， $X = WX$ を満足する低ランク行列 $W \in \mathbb{R}^{M \times M}$ が存在する．したがって，低ランク行列補完問題は以下のように定式化できる，

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \|W\|_F^2 \\ & \text{Subject to} && X = WX, x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega' \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで， $\|\cdot\|_F$ はフロベニウス・ノルムを表す．更新するために，式は以下のように緩和される，

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \|(I - W)X\|_F^2 + \gamma \|W\|_F^2 \\ & \text{Subject to} && x_{i,j} = x_{i,j}^* \text{ for } (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで， $\gamma > 0$ は定数として提供される．この考えに基づき，文献[3]は問題(4.3)を以下のように再定式化した．

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{l=1}^K \sum_{i=1}^{k_l} f_\gamma(W^{(l,i)}, XD^{(l,i)}) \\ & \text{Subject to} && x_{m,n} = x_{m,n}^* \text{ for } (m,n) \in \Omega' \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで， $f_\gamma$ は以下のように定義される，

$$f_\gamma(W^{(l,i)}, XD^{(l,i)}) = \|(I - W^{(l,i)})XD^{(l,i)}\|_F^2 + \gamma \|W^{(l,i)}\|_F^2$$

式(4.7)は以下のように書き換えできる，

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{l=1}^K \sum_{i=1}^{k_l} \|(I - W^{(l,i)})XD^{(l,i)}\|_F^2 + \gamma \|W^{(l,i)}\|_F^2, \\ & \text{Subject to} && x_{m,n} = x_{m,n}^* \text{ for } (m,n) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.8)$$

式(4.8)は式(4.4)が与えられている場合には $X$ と $W^{(l,i)}$ により双凸の二次最小化問題であり，各変数に関して交互に勾配法を用いることで準最適解を得ることが可能である．

る．

続いて，式(4.8)の最小化方法について考える．文献[4]では各行列変数において交互に勾配法を適用することで，この近似解を得ていた．ここで，本稿ではニューラルネットワークに基づいた最適化方法を提案する．まず，式(4.8)の目的関数において，ある $j$ 列目のベクトル $x_j$ が $(l,i)$ 番目のクラスタに属している場合，その目的関数の総和 $(l,i)$ の $x_j$ に関わる損失は， $W^{(l,i)}x_j$ と $x_j$ の誤差を表している．このことから，式(4.8)において最適な $W^{(l,i)}$ を求めることは，与えられたベクトル $x_j$ を用いて線形写像に基づくオートエンコーダのカーネルを学習するのと同じに考えることができる．これを第 $l$ クラスタリングパターンに関してまとめると，図2のようなアーキテクチャが考えられる．本稿ではこのアーキテクチャを $K$ 個用意し，各オートエンコーダのカーネル $W^{(l,i)}$ と行列の未知の要素 $\{x_{m,n}\}_{(m,n) \in \Omega}$ を変数とし，式(4.8)の目的関数を損失関数として学習を行う手法を提案する．提案手法では繰り返し法による学習を用い，各スキームにおいて，すべてのクラスタリングパターンに対して各 $x_j$ がどのクラスタに属するかを求め，その後 Adam を用いて各カーネルと行列の未知要素を更新することでネットワークの最適化と行列の未知要素の推定を同時に行う．

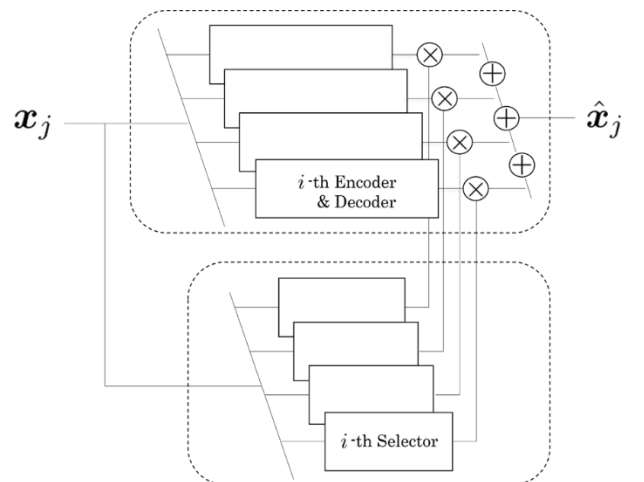


図2 提案手法のアーキテクチャ(上段：オートエンコーダ，下段：クラスター選択器)

さらに、推定精度を向上させるために、オートエンコーダに活性化関数と複数のカーネル $W^{(l,i)}$ を適用した複数層のオートエンコーダを用いる手法を提案する。本論文のモデルに対して、 $\tanh$  関数(図 3)は上下限があるため、向いていない。そこで本稿では昨今の機械学習においてよく用いられる ReLU(図 4)を活性化関数として採用し、非線形な構造を持つオートエンコーダを用いた行列補間手法を提案する。図 5 に、提案手法で使ったオートエンコーダの概略図を示す。

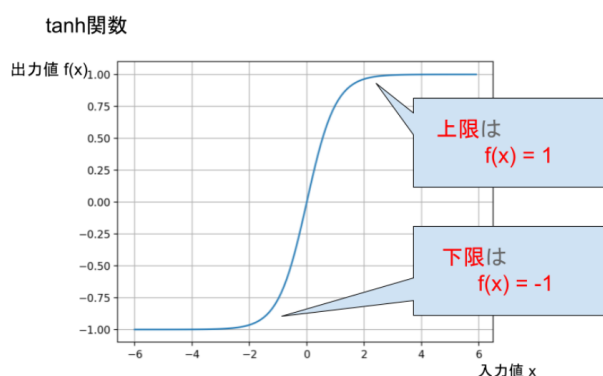


図 3  $\tanh$  関数

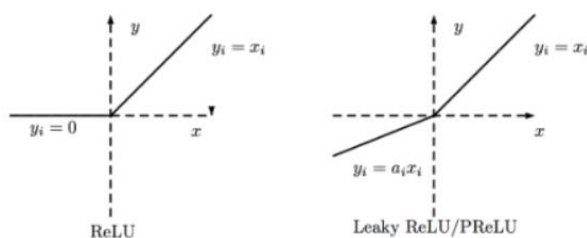


図 4 ReLU 関数

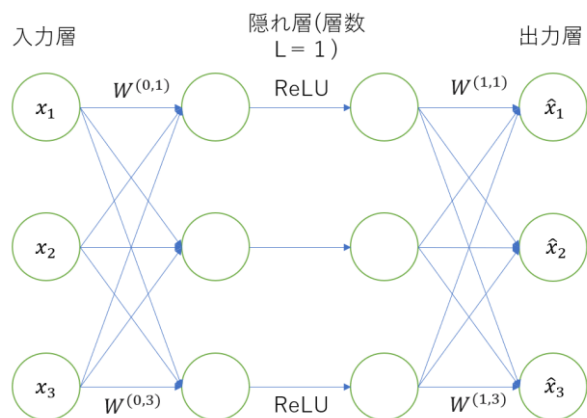


図 5 オートエンコーダの概略図

## 5. 数値シミュレーション

本章では提案手法の有効性を示すために、古典的な行列ランク最小化手法である IPMS[1]、GAN に基づく行列補完手法である GAIN[3]、局所的行列ランク最小化手法である LLRA [4]、提案手法の行列補完精度を比較した。本実験では文献[4]と同様に、次元 $r$ のベクトルを $M = 100$ 個の $p$ 次多項式により写像したベクトルを $N = 4000$ サンプル並べた行列を用い、欠損率 0.7 でランダム欠損させた。各推定精度比較には、定量評価として未知要素に関する RMSE を用いた。各手法において 10 回施行した場合の平均 RMSE を表 1 に示す。

表 1：実験結果 1

| p | r | IPMS   | GAIN   | LLRA   | Propose (tanh) | Propose (ReLU) |
|---|---|--------|--------|--------|----------------|----------------|
| 3 | 2 | 0.0001 | 0.0155 | 0.0001 | 0.0001         | 0.0001         |
|   | 3 | 0.0036 | 0.0272 | 0.0004 | 0.0004         | 0.0006         |
|   | 4 | 0.0390 | 0.0450 | 0.0025 | 0.0022         | 0.0014         |
|   | 5 | 0.0645 | 0.0641 | 0.0187 | 0.0191         | 0.0066         |
| 5 | 2 | 0.0015 | 0.0163 | 0.0001 | 0.0001         | 0.0001         |
|   | 3 | 0.0272 | 0.0335 | 0.0009 | 0.0009         | 0.0010         |
|   | 4 | 0.0445 | 0.0489 | 0.0063 | 0.0097         | 0.0049         |
|   | 5 | 0.0669 | 0.0633 | 0.0341 | 0.0401         | 0.0198         |
| 7 | 2 | 0.0050 | 0.0175 | 0.0001 | 0.0001         | 0.0002         |
|   | 3 | 0.0287 | 0.0339 | 0.0010 | 0.0030         | 0.0034         |
|   | 4 | 0.0457 | 0.0502 | 0.0144 | 0.0195         | 0.0117         |
|   | 5 | 0.0545 | 0.0580 | 0.0399 | 0.0386         | 0.0242         |

実験結果 1 に示したように、提案手法のオートエンコーダに使われている活性化関数が  $\tanh$  関数の時、LLRA と比較して $r$ が低い場合は精度が高いが、 $r$ が高い時は精度が低い結果である。逆に、活性化関数は ReLU の時、 $r$ が低い場合は精度が低い、 $r$ が高い時は精度が明らかに優れている。

さらに、提案手法の推定精度の限界を示す。オートエンコーダの層数  $L$  を増加させた場合について実験を行った。実験結果 2 に示したように  $L=2$  の推定精度は  $L=1$  の時より高いが、 $L=3$  の推定精度は  $L=2$  の時より低い場合も

ある。ただし、ほとんどの場合において  $L=3$  は  $L=2$  よりも優れた推定精度を持ち、特に、次数  $p$  が高いとき ( $p=7$ ) においては有効な手法であることが確認できる。また、提案手法は  $r \leq 5$  において他手法と比べて十分な推定精度を持つことが確認できた。

表 2：実験結果 2

| p | r | IPMS   | GAIN   | LLRA   | Propose<br>(L=1) | Propose<br>(L=2) | Propose<br>(L=3) |
|---|---|--------|--------|--------|------------------|------------------|------------------|
| 3 | 2 | 0.0001 | 0.0155 | 0.0001 | 0.0001           | 0.0001           | 0.0001           |
|   | 3 | 0.0036 | 0.0272 | 0.0004 | 0.0006           | 0.0006           | 0.0006           |
|   | 4 | 0.0390 | 0.0450 | 0.0025 | 0.0014           | 0.0015           | 0.0016           |
|   | 5 | 0.0645 | 0.0641 | 0.0187 | 0.0066           | 0.0057           | 0.0063           |
|   | 6 | 0.0797 | 0.0781 | 0.0413 | 0.0149           | 0.0147           | 0.0155           |
|   | 7 | 0.0908 | 0.0886 | 0.0757 | 0.0403           | 0.0351           | 0.0351           |
| 5 | 2 | 0.0015 | 0.0163 | 0.0001 | 0.0001           | 0.0001           | 0.0001           |
|   | 3 | 0.0272 | 0.0335 | 0.0009 | 0.0010           | 0.0009           | 0.0010           |
|   | 4 | 0.0445 | 0.0489 | 0.0063 | 0.0049           | 0.0039           | 0.0035           |
|   | 5 | 0.0669 | 0.0633 | 0.0341 | 0.0198           | 0.0170           | 0.0175           |
|   | 6 | 0.0694 | 0.0684 | 0.0618 | 0.0365           | 0.0355           | 0.0343           |
|   | 7 | 0.0805 | 0.0901 | 0.0984 | 0.0736           | 0.0605           | 0.0651           |
| 7 | 2 | 0.0050 | 0.0175 | 0.0001 | 0.0002           | 0.0001           | 0.0001           |
|   | 3 | 0.0287 | 0.0339 | 0.0010 | 0.0034           | 0.0024           | 0.0015           |
|   | 4 | 0.0457 | 0.0502 | 0.0144 | 0.0117           | 0.0092           | 0.0061           |
|   | 5 | 0.0545 | 0.0580 | 0.0399 | 0.0242           | 0.0210           | 0.0192           |
|   | 6 | 0.0572 | 0.0664 | 0.0677 | 0.0454           | 0.0406           | 0.0419           |
|   | 7 | 0.0655 | 0.0742 | 0.0963 | 0.0732           | 0.0627           | 0.0677           |

## 6. おわりに

本稿では、行列の各列ベクトルが低次元多様体に属する場合の行列補完問題を扱った。同問題の解法として、近年ではニューラルネットワークに基づく手法が提案されているが、そのアーキテクチャは単純なモデルを用いているため、対象とする多様体が複雑、または、次元が高い場合の行列補完問題に対しては高い推定精度を期待できない。そこで本稿では推定精度を向上させるために、局所的に射影を行う新しいアーキテクチャを提案した。

さらに、オートエンコーダに活性化関数を適用することで精度を一層向上させた。提案手法の有効性は数値シミュレーションにより示された。

## 参考文献

- [1] K. Konishi, K. Uruma, T. Takahashi, T. Furukawa, “Iterative partial matrix shrinkage algorithm for matrix rank minimization,” *Signal Process.*, vol 100, pp. 124–131, 2014.
- [2] K. Konishi, “Parallel GPU implementation of null space based alternating optimization algorithm for large-scale matrix rank minimization,” *IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Process. (ICASSP)*, pp.3689-3692, 2012.
- [3] J. Yoon, et. al., “GAIN: Missing Data Imputation using Generative Adversarial Nets,” *Proc. The 35th Int. Conf. on Machine Learning*, pp.5689–5698, Jul., 2018.
- [4] R. Sasaki, et. al., “Acceleration Technique for Multiple k-means Clustering based Locally Low-rank Approach to Nonlinear Matrix Completion,” *Proc. European Signal Processing Conference*, Aug., 2021.
- [5] R. Sasaki, K. Konishi, T. Takahashi, and T. Furukawa, “Local low-rank approach to nonlinear-matrix completion,” *EURASIP J. on Advances in Signal Processing*, Feb., 2021
- [6] K. Konishi, T. Shise, R. Sasaki and T. Furukawa, “Multiple k-Means Clustering Based Locally Low-Rank Approach to Nonlinear Matrix Completion,” *2019 27th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pp. 1–5, 2019.