法政大学学術機関リポジトリ

HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-01-03

画像データ圧縮モデルの選択

松山, 佐和 / MATSUYAMA, Sawa

(出版者 / Publisher)法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title) Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University / 法 政大学計算科学研究センター研究報告

(巻 / Volume)
17
(開始ページ / Start Page)
121
(終了ページ / End Page)
126
(発行年 / Year)
2004-03-22
(URL)
https://doi.org/10.15002/00025018

松山 佐和 法政大学計算科学研究センター

統計モデルでは、複数のモデルの中から最適なモデルを選択する方法として、モデルの AIC (Akaike Information Criterion) が最小のモデルを最適モデルとする手法が用いられている。本論文では、離散値系ウェーブレット変換を用いたデータ圧縮の最適モデルの選択に AIC の導入を提案する。画像データに応用する前に、2次元のモデルデータを設定しウェーブレット変換によるデータ圧縮モデルにおいて AIC の値が最小となる最適モデルを選択できることを示す。次に画像データに同様の手法を適用し画像データ圧縮の圧縮率の評価に有用であることを示す。

1. はじめに

ウェーブレット変換は周波数解析の手法として注目さ れている比較的新しいデータ解析法である。従来の主要 な周波数解析法であるフーリエ変換はデータに含まれる 卓越周波数を抽出するがその周波数の存在する位置を特 定できない。一方、ウェーブレット変換では卓越周波数 とその周波数の空間的位置を示すことができる回。また、 離散値系ウェーブレット変換は、ウェーブレットスペク トラムのマザーウェーブレット近傍要素にデータの特性 を集約する特徴を持ち、これを利用したデータ圧縮、お よび、多重解像度解析による時間・周波数領域にまたが った解析が可能である^[2]。しかし、ウェーブレット変換は 採用する基底関数によって抽出されるグルーピング周波 数が異なるため、解析対象のデータの特性に適した基底 関数の選択が難しく、現時点では、基底関数の選択は試 行錯誤の段階であることは否めない。基底関数の選択法 としては、斉藤らがデータ圧縮の圧縮率の評価法として、 データ圧縮後のデータと圧縮前の元のデータとの相関係 数を用いることを提案し、相関係数により最適な基底関 数および圧縮率を決定している[2],[3]。

ウェーブレット変換によるデータの圧縮は、データの 特徴がウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレ ット近傍に集中することを利用して、その近傍のスペク トラムの要素のみ残し、他をゼロとすることで行われる^[4]。 本論文では、データ圧縮の最適モデルの選択法として AIC (Akaike Information Criterion)の導入を提案する。デー タ圧縮のモデルを統計モデルと考え、AIC が最小となる モデルを最適モデルとする。ウェーブレット変換による データ圧縮においても AIC の値が最小となるモデルを示 すことができ、データ圧縮の圧縮率の評価に有用である ことを示す。ここでは、選択したある基底関数における AIC モデルを示しているが、今後、基底関数の次数と AIC による最適モデルとの関連を示すことにより、データの 特徴をより顕著に抽出する最適な基底関数の選択法の確 立に役だてると考えている。

2. 赤池情報量規準(AIC)

AIC(Akaike Information Criterion)とはデータを説明する 統計モデルが複数あれば、それらのどのモデルが最適な モデルであるかを選択する規準として赤池により導入さ れた統計量である。Eをモデルの最大対数尤度、*m*を モデルの自由パラメータ数として、

$$AIC = -2E + 2m \tag{1}$$

で与えられる。データをxとし、パラメータ θ を持つ確 率密度関数が $f(x | \theta)$ で与えられたときの最尤推定値 を $\hat{\theta}(x)$ であらわす。パラメータ θ の次元がm次元とす ると、

$$AIC = -2\log f(x \mid \theta(x)) + 2m \qquad (2)$$

となる。これは、「平均2 乗誤差」、「尤度」の延長線上に ある評価基準で、モデルの真の分布に対する期待平均対 数尤度の推定量にあたる。したがって、AIC の値が小さ いほど良いモデルであると考えられる^[5]。

我々が本論文で扱うモデルはいわゆる回帰モデルであ る。以下に回帰モデルにおいて AIC が一般にどのように 計算されるかを述べる。

等間隔で観測されたデータ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が与えられたとする。このデータを $x(i) = x_i$ のように離散格子点で値を取る関数 x と考える。関数 φ_j を関数 x と同じ範囲の離散格子点で値を取る関数とする。この関数 φ_j の族を基底関数とし、関数 x をそれらの一次結合で最小2 乗近似することを考える。

$$x \sim \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_m \varphi_m \tag{3}$$

もちろん、各格子点では誤差が生じるので

$$x(i) = \alpha_1 \varphi_1(i) + \alpha_2 \varphi_2(i) + \dots + \alpha_m \varphi_m(i) + \varepsilon_i$$

(i = 1,2,...,n) (4)

の関係が得られる。このとき \mathcal{E}_i は独立に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数と考えるモデルが、我々の統計モデルである。各係数 α_j は最小2乗推定により求められる、いわゆる線型回帰係数である。 $\hat{\alpha}_j$ を回帰係数 α_j の最小2乗推定値とする。このときの2乗誤差平均

$$\hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \{ x(i) - (\hat{\alpha}_{1} \varphi_{1}(i) + \hat{\alpha}_{2} \varphi_{2}(i) + \dots + \hat{\alpha}_{m} \varphi_{m}(i)) \}^{2}$$
(5)

は、誤差の分布が正規分布なので、誤差分散 σ^2 の最尤 推定値となる。正規分布の確率密度関数より、このモデ ルの最大対数尤度は

$$E = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log \hat{\sigma}^{2} - \frac{n}{2}$$
(6)

となる。またモデルの自由パラメータ数はm 個の回帰係数と誤差の分散 σ^2 でm+1 個になる。したがってこのモデルの AIC は

AIC =
$$n \log 2\pi + n \log \hat{\sigma}^2 + n + 2(m+1)$$
 (7)

で与えられる。

さらに,モデルの違いは基底関数達の選び方で与えられることになる。AICの式に含まれる $n\log 2\pi + n + 2$ はモデルの違いに依存しないので、結果的にAICが最小になるモデル、すなわち最適なモデルは

$$n\log\hat{\sigma}^2 + 2m \tag{8}$$

が最小となるモデルを選択することになる。

一般に,1次元の離散ウェーブレット変換は、1次変換

$$s = Wx \tag{9}$$

で表される。ここで、 $x \operatorname{tl} n \chi \operatorname{copt} \sqrt{n}$ 、 $s \operatorname{tl} v = - \mathcal{I} U \operatorname{sp} \sqrt{n}$ 、 $y \operatorname{tl} n \times n \operatorname{copt} \sqrt{n}$ 、 $W \operatorname{tl} n \times n \operatorname{copt} \sqrt{n}$ 、 $v + \mathcal{I}$ 、 $y + \mathcal{I}$ 、y

$$x = W^T s \tag{10}$$

となる。ここでは直交基底関数を用いているため、

$$\boldsymbol{W}^{T} = \boldsymbol{W}^{-1} \tag{11}$$

である。ここで、ウェーブレット変換マトリックスを

$$W = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^T \tag{12}$$

すなわち、

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_{1}(1) & \varphi_{2}(1) & \varphi_{3}(1) & \cdots & \varphi_{n}(1) \\ \varphi_{1}(2) & \varphi_{2}(2) & \varphi_{3}(2) & \cdots & \varphi_{n}(2) \\ \varphi_{1}(3) & \varphi_{2}(3) & \varphi_{3}(3) & \cdots & \varphi_{n}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1}(n) & \varphi_{2}(n) & \varphi_{4}(n) & \cdots & \varphi_{n}(n) \end{pmatrix}^{T}$$
(13)

と書き直すと、ウェーブレット逆変換の式(10)は、

$$x = s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2 + \dots + s_n \varphi_n \tag{14}$$

となる。ただし、 s_i はベクトル $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ の 各成分である。ここで、我々は基底関数 φ_j の数を減らす ことでデータ圧縮を行うことにする。したがって、最小 2 乗近似モデル

$$x \sim s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2 + \dots + s_m \varphi_m \tag{15}$$

すなわち、

$$x(i) = s_1 \varphi_1(i) + s_2 \varphi_2(i) + \dots + s_m \varphi_m(i) + \varepsilon_i$$

(*i* = 1,2,...,*n*) (16)

がデータ圧縮の統計モデルとなる。

ウェーブレット変換の基底関数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ は、多 重解像度解析のレベルにグルーピングされているため、 AIC はスペクトラム数 m をレベルごとに増加させて求 める。AIC を最小とするスペクトラム数がウェーブレッ ト変換によるデータ圧縮の最適な圧縮率を与える。

3. 2次元モデルデータのウェーブレット変換

2次元のモデルデータをウェーブレット変換し、逆変 換してデータを復元する。復元時に使用する多重解像度 解析のレベル数(スペクトラム数)による AIC の変化を 求め、データの復元時に最適なレベル数を調べる。モデ ルデータには sin 関数の和で表わされるデータを使用す る。

ここでは 2 次元 (平面) データの各要素が 2 個の要素 を持つベクトルであるとし、データマトリックスの大き さを $m \times n$ としたときの i 行 j 列のベクトル要素を

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{6\pi}{m}i\right) + 2\sin\left(\frac{14\pi}{n}j\right), \\ \cos\left(\frac{6\pi}{m}i\right) + 2\cos\left(\frac{14\pi}{n}j\right) \\ i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad (17) \end{cases}$$

とする。また、 $m \times n$ 個の ノイズデータを正規分布 N(0, 1) にしたがう乱数でベクトルの各成分用に 2 組 作成し、式(17)との和をノイズを含むモデルデータとする。 Fig.1 に平面 2 次元ベクトルのモデルデータを示す。ここ ではデータ数をm = 64、n = 128とする。(a)は式(17)によ るモデルデータ、(b)は正規分布乱数で作られたノイズデ ータ、(c)は(a)と(b)の和でノイズを含むモデルデータであ る。この場合の S/N 比はベクトルの各成分についてそれ ぞれ 2.39、2.51 である。



Fig.1(a) 式(17)により計算されたモデルデータ



Fig.1(c) ノイズを含む平面ベクトルモデルデータ Fig.1 平面ベクトルモデルデータ

Fig.1(c)のノイズを含むモデルデータを2次元ウェーブ レット変換する。ここでは、各ペクトル成分についてそ れぞれウェーブレット変換する。ウェーブレットスペク トラムをウェーブレット変換による多重解像度解析の各 レベルまでに圧縮し逆変換してそのときのAICを求める。 Fig.2に基底関数にDaubechiesの4次基底を使用した場合 のAICの変化を示す。



Fig.2 Daubechies の4次基底関数による AIC (Fig.1(c) の平面ベクトルモデルデータ)

各レベル0から5までの逆変換で使用されたスペクト ラム数は4×2,8×2,32×2,8×16×2,16×32×2,32×64 ×2である。Fig.2に示されるようにAICの最小値はレベ ル4である。すなわち全体の16分の1のスペクトラムを 逆変換して得られたデータでモデルデータを十分に復元 できることを示している。

レベル0からレベル4で復元されるデータを Fig.3 に、 レベル0からレベル5で復元されるデータを Fig.4 に示す。





Fig.4 レベル0から5を用いたノイズを含む 平面ベクトルモデルの復元データ

Fig.2 に示される AIC の値によれば、Fig.1(c)のモデル データは Fig.3 に示されるデータで十分に表されており、 Fig.4 ではノイズが含まれ冗長であることを示している。

4. 画像データへの応用

ここでは Lena 画像データに AIC モデルを応用する。 Lena のモノクロ画像とカラー画像について 3 章と同様の 手順を示し、画像データにおいても AIC による最適モデ ルの選択が有用であることを示す。

4.1 lena モノクロ画像データ

Fig.5 に lena のモノクロ画像を示す。画像のサイズは 512 × 512 である。

この画像データは、3章のモデルデータのベクトル要 素が1成分の場合に相当する。これを2次元ウェーブレ ット変換し、多重解像度解析の各レベルまでに圧縮して データを復元し、AICを求める。実際の画像データでは、 モデルデータの場合とは異なり、AICの値の最小値をレ ベル0からスペクトル数4分の1のレベルまでに見つけ られないため、データ数を16²分の9²に圧縮した場合の AICを計算し、4分の1のレベルが最小値であることを確 かめている。基底関数にDaubechiesの4次基底を使用し た場合のAICの値をFig.6に示す。データ数16²分の9² のときのAICの値をレベル8として示している。



Fig.5 Lena モノクロ画像



Fig.6 Daubechies の4次基底関数による AIC (Lena モノクロ画像データ)

選択された最適モデルのレベル0からレベル7で復元 されるデータを Fig.7 に示す。



Fig.7 レベル0から7を用いて復元された Lena モノクロ画像

Fig.5 に示す元の Lena モノクロ画像と比較すると、細かな変動がノイズとして削減されていることがわかる。

4.2 lena カラー画像データ

Fig.8 に lena のカラー画像を示す。カラー画像のサイズ は 512×512 で、各要素は RGB (Red、Green、Blue)の3 成分を持つベクトルである。3 章のモデルデータのベクト ル要素が3 成分の場合に相当する。

この画像データを3成分についてそれぞれ2次元ウェ ーブレット変換し、多重解像度解析の各レベルまでに圧 縮してデータを復元し、AICを求める。4.1節のモノクロ 画像の場合と同様に、AICの値の最小値をレベル0から スペクトル数4分の1のレベルまでに見つけられないた め、データ数を16²分の9²に圧縮した場合のAICを計算 し、4分の1のレベルが最小値であることを確かめている。 基底関数にDaubechiesの4次基底を使用した場合のAIC の値をFig.9に示す。データ数16²分の9²のときのAICの 値をレベル8として示している。



Fig.8 Lena カラー画像



Fig.9 Daubechies の4次基底関数による AIC (Lena カラー画像データ)

選択された最適モデルのレベル0からレベル7で復元 されるデータを Fig.10 に示す。Fig.8 示す元の Lena カラ ー画像と比較してもほとんど差がなくよく復元されてい ることがわかる。



Fig.10 レベル0から7を用いて復元された Lena カラー画像

5. おわりに

ウェーブレット変換によるデータ圧縮の最適モデルの 選択法として AIC を導入した。2次元のモデルデータを ウェーブレット変換し AIC の値が最小となる最適モデル を選択できることを示した。また、画像データにも同様 の手法を適用しデータ圧縮の圧縮率の評価に有用である ことを示した。本論文では、選択したある基底関数にお いて AIC モデルが有効であることを示したが、今後、基 底関数の次数と AIC による最適モデルとの関連を示すこ とにより、データの特徴をより顕著に抽出する最適な基 底関数の選択法を確立できると考えている。

参考文献

- [1] 榊原進,"ウェーブレットビギナーズガイド",東京電 機大学出版局,1995.
- [2] 斉藤兆古, "Mathematica によるウェーブレット変換", 朝倉書店, 1996.
- [3] S.Matsuyama, Y.Oguchi and Y.Saito: Applications of the Wavelet Transform to the Meteorological Vector Data, 1998 ASME FEDSM, June 21-25, 1998, Washington, D.C.
- [4] 松山佐和,小口雄康,松山志保,斉藤兆古,國井利泰, "ウ ェーブレット変換によるベクトル動画像の生成",可 視化情報, Vol.20, Suppl., No.1,145-148, 2000.
- [5] 坂元慶行,石黒真木夫,北川源四郎,"情報量統計学", 共立出版株式会社,情報科学講座 (1993)

<u>キーワード.</u>

赤池情報量規準、ウェーブレット変換、多重解像度解析

<u>Summary.</u>

Selection of Image Data Compression Model

Sawa Matsuyama

Computational Science Research Center, Hosei University

On the selection of the most suitable model from several statistical models, the model of which AIC (Akaike Information Criterion) is minimum, is selected as the suitable model. In this study, we propose the application of the AIC as the methodology for selecting the most suitable model for data compression on discrete wavelets transform, that is, the compressions of two dimensional data are made by wavelets transform, and we select the minimum AIC model as the suitable one. The same method is applied to the analysis of a couple of images, and we see that it can be also valid for an evaluation of the efficiency of data compression.

Keywords.

Akaike information criterion, Wavelets transform, Multi resolution analysis