法政大学学術機関リポジトリ

HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-01-03

離散値系ウェーブレット変換のためのデータ 補間

松山, 佐和 / MATSUYAMA, Sawa

(出版者 / Publisher)法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University / 法 政大学計算科学研究センター研究報告

(巻 / Volume) 16 (開始ページ / Start Page) 179 (終了ページ / End Page) 182 (発行年 / Year) 2003-03-20 (URL)

https://doi.org/10.15002/00024995

松山 佐和 法政大学計算科学研究センター

離散値系ウェーブレット変換で扱えるデータの個数は2のべき乗個に制限されているため、貴重な観 測・計測データを十分に活かしきれない場合が多々ある。本論文では、データを十分に活用するための 方法として、不連続関数がフーリエ変換により正弦波・余弦波の和として厳密に表現できることを利用 して補間することを考えた。具体的には、データを実フーリエ級数で表して、その級数を用いてデータ を内挿または外挿し、任意の個数のデータを離散値系ウェーブレット変換で扱える2のべき乗個にあわ せる方法である。この方法をいくつかの例に適用し、満足される結果を得ることができた。

1. はじめに

離散値ウェーブレット変換は、不連続関数を周波数領 域でグルーピングした正弦波・余弦波を抽出する機能を 有している。採用する基底関数によって抽出されるグル ーピング周波数が異なるが、適切な基底関数を選択すれ ば必要とするスペクトラムの抽出が可能である。一方、 離散値系ウェーブレット変換では、扱えるデータ数が2 のべき乗個であるという制約があり^{[1],[2],[5]}、これまでは 扱うデータの範囲を縮小するか、または値がゼロのデー タを補う方法で、ある程度十分な成果を上げてきている ^{[3],[4]}。しかし、実際の測定や観測データの測定間隔や測 定数は空間的にも時間空間的にもウェーブレット変換を 意識して決められたものではないため、物理的な解析を 行うには、この方法では不十分である。補間の方法とし て線形補間や楕円関数による補間等が考えられるが、こ の方法ではもとのデータの周期性を考慮できていない。

本論文では、フーリエ変換により不連続関数が正弦 波・余弦波の和として厳密に表現できることを利用して データを内挿または外挿し、データ数をウェーブレット 変換で扱える個数に変更する方法について報告する。

- 2.1次元周期データの補間
- 2.1 サンプルデータ

フーリエ変換を利用したデータ補間の有効性を調べる ため、1次元周期関数で表されるサンプルデータを設定し、 データの補間を試みる。

まず、1次元周期データのサンプル関数として、正弦波 と余弦波の和で表される関数

$$f(t) = \cos(t) + \cos(3t) + \cos(9t) + \sin(2t) + \sin(6t) + \sin(18t)$$
(1)

10

を定義する。式(1)の $0 \le t \le 2\pi$ において、 *t*について等間隔にn個のデータを抽出すると、個々のデータは

$$x_{i} = \cos(\frac{2\pi}{n}i) + \cos(\frac{6\pi}{n}i) + \cos(\frac{18\pi}{n}i) + \sin(\frac{4\pi}{n}i) + \sin(\frac{12\pi}{n}i) + \sin(\frac{36\pi}{n}i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
(2)

である。ここでは、サンプルデータ数として *n*=128 を用 いる (Fig.1)。



Fig.1 サンプルデータ

2.2 サンプルデータのフーリエ変換 サンプルデータ (Fig.1)をフーリエ変換してみる。変 換後のフーリエスペクトラムを Fig.2 に示す。



(c) スペクトラムの実数部 (d) スペクトラムの虚数部 Fig.2 サンプルデータとフーリエスペクトラム

この図から、余弦波では周波数 1,3,6,9,18 のフーリ エスペクトラムが卓越しており、正弦波では周波数 2,3, 6,9,18 のフーリエスペクトラムが卓越しているのがわか る。

2.3 サンプルデータの補間

サンプルデータを実フーリエ級数展開すると、この実 フーリエ級数はサンプルデータを連続関数(ここでは正 弦波と余弦波)の和で表していることになる。サンプル データの任意の t におけるデータ値は、この実フーリエ 級数に展開された、それぞれの連続関数の t における値 の和であると考えられる。これにより、サンプルデータ を補間すれば、補間されたデータ値は、元のデータと同 じフーリエスペクトラムを持つ、すなわち同じ周期性を 持つといえる。

ここで、2.2 節で求めたサンプルデータのフーリエスペクトラムを係数とする実フーリエ級数関数を作成し、必要な t における関数値を求める。サンプルデータを補間してデータ数を 256 に増やしたものと式(2)より n=256 として求めたデータを比較してみる (Fig.3)。



(a) データ数 256 に補間
 (b) 元の関数から求めたデータ
 Fig.3 サンプルデータの補間 データ数 256

フーリエ変換スペクトラムを用いた補間法によりデー タ数を増やしたデータの有効性を評価する方法として、 元の関数(式(2))から求めたデータとの相関係数を用いる。 この場合の相関係数は 0.98 であり、元のデータと非常に よく一致しており、うまく補間できている。

また、同じように 128 個のサンプルデータを補間して データ数を 512 に増やしたものと式(2)より *n*=512 として 求めたデータを Fig.4 に示す。



(a) データ数 512 に補間
 (b) 元の関数から求めたデータ
 Fig.4 サンプルデータの補間 データ数 512

フーリエ変換スペクトラムを用いて補間したデータと 元の関数(式(2))から求めたデータとの相関係数は 0.95 で あり、このように、さらにデータ数を倍にしても、かな りよく補間できている。

3. 画像データの補間

3.1 サンプル画像データ

1次元周期データのフーリエ変換によるデータの補間 法を2次元データである画像データに応用する。

ここではサンプル画像データとして Lena 画像を使用す る。サイズ 512×512 の Lena 画像データから、データを 間引いてサイズ 256×256 と 128×128 の画像データを作 成しておく。ここで、サイズ 128×128 の画像データをサ ンプル画像データとして、1 次元周期関数の場合と同じよ うにフーリエ変換を用いてデータを補間し、サイズ 256 ×256 および 512×512 の画像データと比較してみる。サ ンプル画像データ(128×128)をFig.5に示す。



Fig.5 サンプル画像データ 128×128

3.2 サンプル画像データのフーリエ変換 サンプル画像データである 2 次元マトリックスの各行 をフーリエ変換する。Fig.6 に第1行目のデータと変換後

のフーリエスペクトラムを示す。



(c) スペッドラムの実数部 (d) スペッドラムの虚数部 Fig.61行目の画像データとフーリエスペクトラム

この図ではスペクトラムの実数部と虚数部のスケール が異なっているため見にくいが、このスペクトラムから、 この画像の1行目のデータは余弦波も、正弦波もいろい ろな周期に分布していることがわかる。

3.3 モデル画像データの補間

まず、サンプル画像データの各行についてフーリエ変換しデータのフーリエスペクトラムを係数とする、実フ ーリエ級数を作成し、1次元データの場合と同様にデータ 間を補間する。次に、画像データの各列についてフーリ エ変換し、同様にデータ間を補間する。

この方法により、サンプル画像データを補間してデー タ数を 256 × 256 にした画像の 1 行目のデータと元の 256 × 256 の Lena 画像の 1 行目を比較したものが Fig.7 である。

補間したデータの1行目と元のLena 画像の1行目の相 関係数は0.91である。



(a) データ数256×256に補間 (b) 元のLena 画像 256 × 256 Fig.7 サンプル画像データの補間 256×256の1行目

サイズ 256×256 に補間された画像データと元の Lena 画像を Fig.8 に示す。



(a) データ数256×256に補間 (b) 元のLena 画像 256 × 256 Fig.8 サンプル画像データの補間 256×256

2 つの画像データの相関係数は 0.93 であり、十分に補 間できているといえる。

また、同じように128×128のサンプル画像データを補 間してサイズを512×512にしたものの1行目のデータと 画像をそれぞれ Fig.9 と Fig.10 に示す。



(a) データ数 512 × 512 に補間 (b) 元の Lena 画像 512 × 512 Fig.9 サンプル画像データの補間 512×512の1 行目





100 200 300 400 500

0

300 100 200 400

(a) データ数 512 × 512 に補間 (b) 元の Lena 画像 512 × 512 Fig.10 サンプル画像データの補間 512×512

補間したデータの1行目と元のLena 画像の1行目の相 関係数は0.86である。2つの画像データの相関係数は0.89 であり、データの解析目的によっては十分補間できてい るといえる。画像全体の相関係数よりも 1 行目の相関係 数の方が小さいのは、1行目のデータには細かい髪の毛や 濃淡の鋭い変化が存在するためと思われる。

元のLena 画像(512×512)を間引いて作成したサイズ 256×256のLena 画像をフーリエ変換して、512×512に 補間したものと元の Lena 画像とを比較(Fig.11)すると、 相関係数は 0.97 である。この場合の相関係数の値が高い のは、元の Lena 画像をサイズ 256 × 256 に間引いた場合 には、細かい濃淡の変化が間引いたデータに残され、周 波数特性が保たれているためである。





100 200 300 400 500

(a) データ数 256 × 256 を

200 300 400

500

(b) 元のLena 画像 512×512

512×512 に補間 Fig.11 サンプル画像データ(256×256)の補間 512×512

4. おわりに

本稿では、離散値系ウェーブレット変換の前処理とし て、任意の個数のデータを、離散値系ウェーブレット変 換で扱えるデータ数(2のべき乗個)に減少あるいは増 加させる方法について述べた。

フーリエ変換は、不連続関数を正弦波・余弦波の和と して厳密に表現できるため、フーリエ変換を用いて補間 されたデータは、元のデータの周波数特性を保持してい るためデータの物理的特徴を損なわない。このデータを 用いてウェーブレット変換することで、データの特徴を より有効に抽出できる。

参考文献

- [1]榊原進,"ウェーブレットビギナーズガイド",東京電機 大学出版局,1995.
- [2]斉藤兆古、"Mathematica によるウェーブレット変換"、 朝倉書店, 1996.
- [3]松山佐和,小口雄康,斉藤兆古,"ウェーブレット変換の 気象データへの応用",計算工学講演会論文集, Vol.2(1997), No.2, 359-362.
- [4]松山佐和,小口雄康,松山志保,斉藤兆古,國井利泰,"ウェ ーブレット変換によるベクトル動画像の生成",可視 化情報, Vol.20, Suppl., No.1,145-148, 2000.
- [5]新井康平,"ウェーブレット解析の基礎理論", 森北出版 株式会社,2000.

<u>キーワード.</u>

離散値系ウェーブレット変換、フーリエ変換、データ補間

<u>Summary.</u>

Data Interpolation for the Discrete Wavelet Transform

Sawa Matsuyama Computational Science Research Center, Hosei University

A number of data for a discrete wavelets transform is required to be a power of 2, and therefore, part of the data obtained by field observations or laboratory experiments are not frequently applied for the analyses. We propose that Fourier transform is useful to interpolate and extrapolate the data for increasing the number of data for the discrete wavelets analysis. The raw data is firstly transformed to the Fourier coefficients by Fourier transform. Then the inverse Fourier transform is carried out to obtain the number of the data, i.e., the number of a power of 2.

Keywords.

Discrete wavelet transform, Fourier transform, Data interpolation