離散値系ウェーブレット変換のためのデータ補間

松山, 佐和 / MATSUYAMA, Sawa

(出版者 / Publisher)
法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University / 法政大学計算科学研究センター研究報告

(巻 / Volume)
16

(開始ページ / Start Page)
179

(終了ページ / End Page)
182

(発行年 / Year)
2003-03-20

(URL)
https://doi.org/10.15002/00024995

離散値系ウェーブレット変換のためのデータ補間

松山　佐和
法政大学計算科学研究センター

離散値系ウェーブレット変換で扱えるデータの個数は２のべき乗個に制限されているため、貴重な観測・計測データを十分に活かしきれない場合が多々ある。本論文では、データを十分に活用するための方法として、不連続関数がフーリエ変換により正弦波・余弦波の和として厳密に表現できることを利用して補間することを考えた。具体的には、データを実フーリエ級数で表して、その級数を用いてデータを内挿または外挿し、任意の個数のデータを離散値系ウェーブレット変換で扱える２のべき乗個にあわせる方法である。この方法をいくつかの例に適用し、満足される結果を得ることができた。

1．はじめに

離散値ウェーブレット変換は、不連続関数を周波数領域でグルーピングした正弦波・余弦波を抽出する機能を有している。採用する基底関数によって抽出されるグルーピング周波数が異なるが、適切な基底関数を選択すれば必要とするスペクトラムの抽出が可能である。一方、離散値系ウェーブレット変換では、扱えるデータ数が２のべき乗個であるという制約があり[1],[2],[5]、これまでは扱うデータの範囲を縮小するか、または値がゼロのデータを補う方法で、ある程度十分な成果を上げてきている[3],[4]。しかし、実際の測定や観測データの測定間隔や測定数は空間的にも時間空間的にもウェーブレット変換を意識して決められたものではないため、物理的な解析を行うには、この方法では不十分である。補間の方法として線形補間や楕円関数による補間等が考えられるが、この方法ではもとのデータの周期性を考慮できていない。

本論文では、フーリエ変換により不連続関数が正弦波・余弦波の和として厳密に表現できることを利用してデータを内挿または外挿し、データ数をウェーブレット変換で扱える個数に変更する方法について報告する。

2．1 次元周期データの補間

2.1 サンプルデータ

フーリエ変換を利用したデータ補間の有効性を調べるため、1 次元周期関数で表されるサンプルデータを設定し、データの補間を試みる。

まず、1 次元周期データのサンプル関数として、正弦波と余弦波の和で表される関数

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(t) + \cos(3t) + \cos(9t) \\ &\quad + \sin(2t) + \sin(6t) + \sin(18t) \end{aligned} \tag{1}$$

を定義する。式(1)の $0 \le t \le 2\pi$ において、 t について等間隔に n 個のデータを抽出すると、個々のデータは

$$\begin{aligned} x_i &= \cos(\frac{2\pi}{n}i) + \cos(\frac{6\pi}{n}i) + \cos(\frac{18\pi}{n}i) \\ &\quad + \sin(\frac{4\pi}{n}i) + \sin(\frac{12\pi}{n}i) + \sin(\frac{36\pi}{n}i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{2}$$

である。ここでは、サンプルデータ数として n=128 を用いる（Fig.1）。

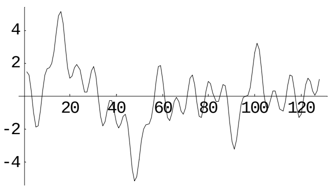
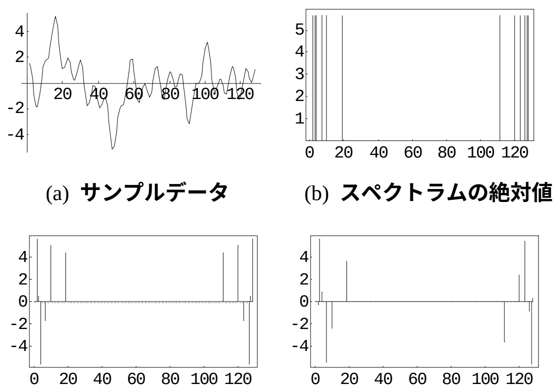


Fig.1 **サンプルデータ**

2.2 サンプルデータのフーリエ変換

サンプルデータ（Fig.1）をフーリエ変換してみる。変換後のフーリエスペクトラムを Fig.2 に示す。



(a) **サンプルデータ**　(b) **スペクトラムの絶対値**

(c) **スペクトラムの実数部**　(d) **スペクトラムの虚数部**

Fig.2 **サンプルデータとフーリエスペクトラム**

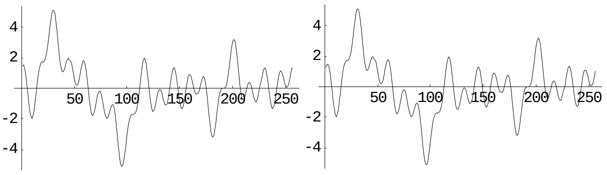
この図から、余弦波では周波数 1, 3, 6, 9, 18 のフーリエスペクトラムが卓越しており、正弦波では周波数 2, 3, 6, 9, 18 のフーリエスペクトラムが卓越しているのがわかる。

2.3 サンプルデータの補間

サンプルデータを実フーリエ級数展開すると、この実フーリエ級数はサンプルデータを連続関数（ここでは正弦波と余弦波）の和で表していることになる。サンプル

データの任意の t におけるデータ値は、この実フーリエ級数に展開された、それぞれの連続関数の t における値の和であると考えられる。これにより、サンプルデータを補間すれば、補間されたデータ値は、元のデータと同じフーリエスペクトラムを持つ、すなわち同じ周期性を持つといえる。

ここで、2.2 節で求めたサンプルデータのフーリエスペクトラムを係数とする実フーリエ級数関数を作成し、必要な t における関数値を求める。サンプルデータを補間してデータ数を 256 に増やしたものと式(2)より n=256 として求めたデータを比較してみる（Fig.3）。

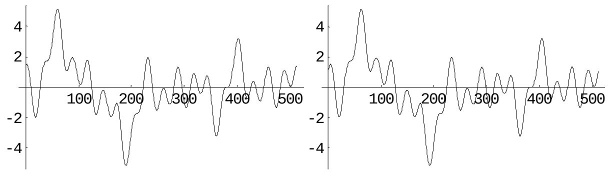


(a) **データ数 256 に補間**　　(b) **元の関数から求めたデータ**

Fig.3 **サンプルデータの補間 データ数 256**

フーリエ変換スペクトラムを用いた補間法によりデータ数を増やしたデータの有効性を評価する方法として、元の関数(式(2))から求めたデータとの相関係数を用いる。この場合の相関係数は 0.98 であり、元のデータと非常によく一致しており、うまく補間できている。

また、同じように 128 個のサンプルデータを補間してデータ数を 512 に増やしたものと式(2)より n=512 として求めたデータを Fig.4 に示す。



(a) **データ数 512 に補間**　　(b) **元の関数から求めたデータ**

Fig.4 **サンプルデータの補間 データ数 512**

フーリエ変換スペクトラムを用いて補間したデータと元の関数(式(2))から求めたデータとの相関係数は 0.95 であり、このように、さらにデータ数を倍にしても、かなりよく補間できている。

3．画像データの補間

3.1 サンプル画像データ

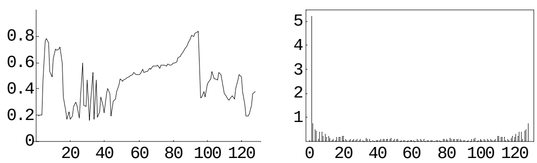
１次元周期データのフーリエ変換によるデータの補間法を 2 次元データである画像データに応用する。

ここではサンプル画像データとして Lena 画像を使用する。サイズ 512×512 の Lena 画像データから、データを間引いてサイズ 256×256 と 128×128 の画像データを作成しておく。ここで、サイズ 128×128 の画像データをサンプル画像データとして、1 次元周期関数の場合と同じようにフーリエ変換を用いてデータを補間し、サイズ 256×256 および 512×512 の画像データと比較してみる。サンプル画像データ（128×128）を Fig.5 に示す。

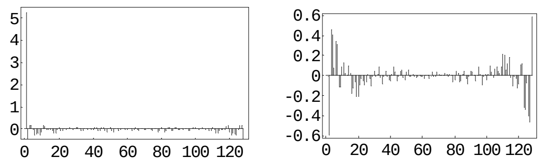
Fig.5 **サンプル画像データ 128×128**

3.2 サンプル画像データのフーリエ変換

サンプル画像データである 2 次元マトリックスの各行をフーリエ変換する。Fig.6 に第 1 行目のデータと変換後のフーリエスペクトラムを示す。



(a) **1 行目の画像データ**　　(b) **スペクトラムの絶対値**



(c) **スペクトラムの実数部**　　(d) **スペクトラムの虚数部**

Fig.6 **1 行目の画像データとフーリエスペクトラム**

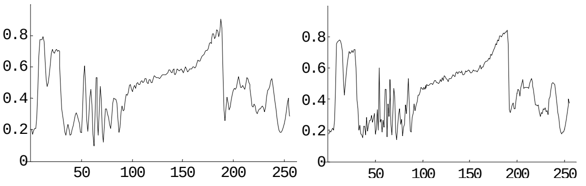
この図ではスペクトラムの実数部と虚数部のスケールが異なっているため見にくいが、このスペクトラムから、この画像の 1 行目のデータは余弦波も、正弦波もいろいろな周期に分布していることがわかる。

3.3 モデル画像データの補間

まず、サンプル画像データの各行についてフーリエ変換しデータのフーリエスペクトラムを係数とする、実フーリエ級数を作成し、1 次元データの場合と同様にデータ間を補間する。次に、画像データの各列についてフーリエ変換し、同様にデータ間を補間する。

この方法により、サンプル画像データを補間してデータ数を 256×256 にした画像の 1 行目のデータと元の 256×256 の Lena 画像の 1 行目を比較したものが Fig.7 である。

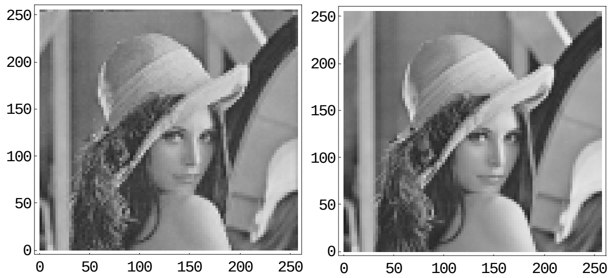
補間したデータの 1 行目と元の Lena 画像の 1 行目の相関係数は 0.91 である。



(a) **データ数 256×256 に補間**　(b) **元の Lena 画像 256×256**

Fig.7 **サンプル画像データの補間 256×256 の 1 行目**

サイズ 256×256 に補間された画像データと元の Lena 画像を Fig.8 に示す。

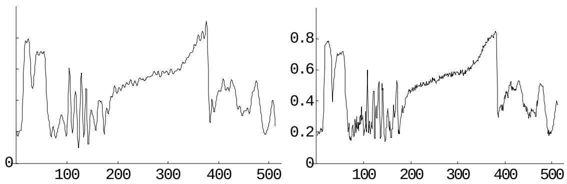


(a) **データ数 256×256 に補間**　(b) **元の Lena 画像 256×256**

Fig.8 **サンプル画像データの補間 256×256**

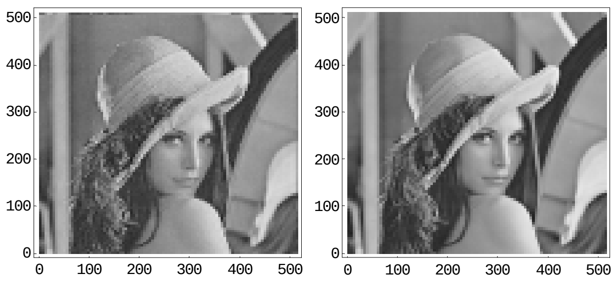
2 つの画像データの相関係数は 0.93 であり、十分に補間できているといえる。

また、同じように 128×128 のサンプル画像データを補間してサイズを 512×512 にしたものの 1 行目のデータと画像をそれぞれ Fig.9 と Fig.10 に示す。



(a) **データ数 512×512 に補間**　(b) **元の Lena 画像 512×512**

Fig.9 **サンプル画像データの補間 512×512 の 1 行目**

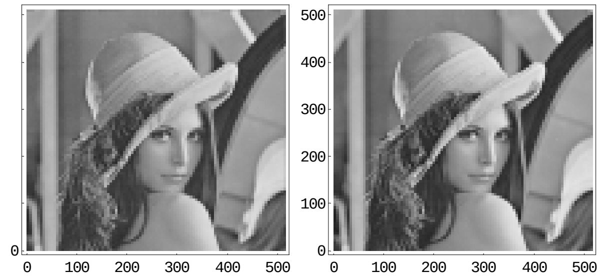


(a) **データ数 512×512 に補間**　(b) **元の Lena 画像 512×512**

Fig.10 **サンプル画像データの補間 512×512**

補間したデータの 1 行目と元の Lena 画像の 1 行目の相関係数は 0.86 である。2 つの画像データの相関係数は 0.89 であり、データの解析目的によっては十分補間できているといえる。画像全体の相関係数よりも 1 行目の相関係数の方が小さいのは、1 行目のデータには細かい髪の毛や濃淡の鋭い変化が存在するためと思われる。

元の Lena 画像（512×512）を間引いて作成したサイズ 256×256 の Lena 画像をフーリエ変換して、512×512 に補間したものと元の Lena 画像とを比較（Fig.11）すると、相関係数は 0.97 である。この場合の相関係数の値が高いのは、元の Lena 画像をサイズ 256×256 に間引いた場合には、細かい濃淡の変化が間引いたデータに残され、周波数特性が保たれているためである。



(a) **データ数 256×256 を 512×512 に補間**　(b) **元の Lena 画像 512×512**

Fig.11 **サンプル画像データ(256×256)の補間 512×512**

4．おわりに

本稿では、離散値系ウェーブレット変換の前処理として、任意の個数のデータを、離散値系ウェーブレット変換で扱えるデータ数（２のべき乗個）に減少あるいは増加させる方法について述べた。

フーリエ変換は、不連続関数を正弦波・余弦波の和として厳密に表現できるため、フーリエ変換を用いて補間されたデータは、元のデータの周波数特性を保持しているためデータの物理的特徴を損なわない。このデータを用いてウェーブレット変換することで、データの特徴をより有効に抽出できる。

参考文献

[1]榊原進,"ウェーブレットビギナーズガイド",東京電機大学出版局,1995.

[2]斉藤兆古, ”Mathematica によるウェーブレット変換”, 朝倉書店, 1996.

[3]松山佐和,小口雄康,斉藤兆古,”ウェーブレット変換の気象データへの応用”, 計算工学講演会論文集, Vol.2(1997), No.2, 359-362.

[4]松山佐和,小口雄康,松山志保,斉藤兆古,國井利泰, ”ウェーブレット変換によるベクトル動画像の生成”,可視化情報, Vol.20, Suppl., No.1,145-148, 2000.

[5]新井康平, ”ウェーブレット解析の基礎理論”, 森北出版株式会社, 2000.

キーワード.

離散値系ウェーブレット変換、フーリエ変換、データ補間

Summary.

Data Interpolation for the Discrete Wavelet Transform

Sawa Matsuyama
Computational Science Research Center, Hosei University

A number of data for a discrete wavelets transform is required to be a power of 2, and therefore, part of the data obtained by field observations or laboratory experiments are not frequently applied for the analyses. We propose that Fourier transform is useful to interpolate and extrapolate the data for increasing the number of data for the discrete wavelets analysis. The raw data is firstly transformed to the Fourier coefficients by Fourier transform. Then the inverse Fourier transform is carried out to obtain the number of the data, i.e., the number of a power of 2.

Keywords.

Discrete wavelet transform, Fourier transform, Data interpolation