多孔質体の弾塑性損傷進展解析

KUSABUKA, Morito / UCHIDA, Ryosuke / 石田, 則道 / 草深, 守人 / 内田, 亮介 / ISHIDA, Norimichi

(出版者 / Publisher)
法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学計算科学研究センター研究報告 / Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University

(巻 / Volume)
15

(開始ページ / Start Page)
99

(終了ページ / End Page)
105

(発行年 / Year)
2002-03-23

(URL)
https://doi.org/10.15002/00024960

多孔質体の弾塑性損傷進展解析

内田　亮介
法政大学大学院工学研究科建設工学専攻

草深　守人　　石田　則道
法政大学計算科学研究センター

ゴミ焼却灰の再資源化を目的として開発された焼成増粒物を建設材料として利用する用途技術の開発が進められている．本文では，リサイクル材として開発された比較的粒径の揃った粗粒な増粒物の集合体である多孔質固化体に対する損傷モデルの適用性について考察した．採用した損傷モデルは，熱力学的考察により定式化された進展型の等方損傷構成方程式に従った．このモデルによる解析結果は基本的な材料試験である３軸試験結果と比較された．その結果，粗粒子の集合体が，多孔質体としての構造を維持する限界ひずみを推定することが可能であることを示唆した．

１．はじめに

焼成増粒物の集合体である多孔質体の構成モデルとして損傷の進展を表現できる損傷構成方程式を採用する．ここで，損傷力学に基づく構成モデルを採用する基本的考え方は，比較的粗粒な粒子の集合体である材料の破壊過程が，粒子間の接点に存在する結合物の微視的な破壊の進展に左右されているものと予測したことにある．すなわち，粒子接触点に存在する結合物内の微視的亀裂の進展が，多孔質体としての巨視的な構造の応力－ひずみ関係を支配するものとした．

２．損傷構成方程式

（１）ひずみ等価仮説

本章で示す損傷構成方程式は，焼成増粒物の集合体である多孔質体の損傷が等方性であると仮定する．

物体内任意点における任意方向（法線ベクトル$\boldsymbol{n}$）の微小断面S内に均一に分布する微小空隙や微小欠陥の断面積をS_Dとすると損傷変数Dは次式で定義される．

$$D=\frac{S_D}{S} \tag{1}$$

この微小断面に作用する力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{n}F$が与えられたとし，微小な欠陥や空隙の面積である$S_D$が力を伝達しないとすると，損傷の存在しない実質部分の応力$\overset{*}{\sigma}$は通常の応力σを用いて次式のように表され，有効応力と呼ばれる．

$$\overset{*}{\sigma}=\frac{F}{S-S_D}=\frac{F}{S(1-\frac{S_D}{S})}=\frac{\sigma}{1-D} \tag{2}$$

構成方程式の定式化はひずみ等価仮説に従うものとし，損傷を受けた材料の構成方程式は，通常の応力σを有効応力$\bar{\sigma}$で置換える以外は，損傷を受けていない材料の構成方程式を導く手順と同じであると仮定する．

（２）Drucker-Prager の降伏関数

降伏関数が Drucker-Prager の降伏関数に従うものと仮定すると，等方損傷モデルにおける降伏関数fは，ひずみ等価仮説に基づき次式のように拡張される．

$$f(\sigma_{ij},\epsilon_{ij}^p)=\frac{1}{1-D}(\sqrt{J_{2D}}-\alpha J_1)-\Lambda(\bar{\epsilon}^p)=0 \tag{3}$$

ここで，σ_{ij}，ϵ_{ij}はそれぞれ Cauchy の応力テンソルとひずみテンソル，ϵ_{ij}^pは塑性ひずみ，αは材料定数，$\Lambda(\bar{\epsilon}^p)$はひずみ硬化を表現する項，$\bar{\epsilon}^p$は相当塑性ひずみ，$J_1$，$J_{2D}$は次式で定義される応力の不変量である．

$$J_1=\sigma_{mm},\quad J_{2D}=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij},\quad S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}J_1 \tag{4}$$

なお，Drucker-Prager の降伏関数に対して定義される相当応力と相当塑性ひずみはそれぞれ次式で与えられる．

$$\bar{\sigma}=\frac{\sqrt{3J_{2D}}-\sqrt{3}\alpha J_1}{1-\sqrt{3}\alpha} \tag{5}$$

$$d\bar{\epsilon}^p=\frac{1-\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{9\alpha^2+\frac{3}{2}}}\sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \tag{6}$$

また，式(3)のひずみ硬化項は次式のように表すことができる．

$$\Lambda(\bar{\epsilon}^p)=\kappa+\frac{1-\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3}}H'\int d\bar{\epsilon}^p \tag{7}$$

ここで，κは材料定数，H'はひずみ硬化率である．

（３）散逸ポテンシャル

損傷の進展は，塑性論における塑性ひずみ速度の決定に塑性ポテンシャルの存在を仮定したと同様に，損傷の進展速度を支配する損傷ポテンシャルの存在を仮定する．すなわち，塑性ひずみ増分と損傷の進展速度を規定する散逸ポテンシャル$\bar{F}$を次式で仮定する．

$$\bar{F}=F+F_D \tag{8}$$

ここで，Fは塑性ポテンシャル関数であり，F_Dは損傷

ポテンシャル関数である．

塑性論では，塑性ひずみ増分をFのみに依存すると仮定し，次式で定義している．

$$d\epsilon_{ij}^{p}=\lambda_{F}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \tag{9}$$

ここで，λ_Fは係数である．同様に，損傷の進展速度はF_Dのみに依存すると仮定することにより次式で定義する．

$$dD=\lambda_{D}\frac{\partial F_{D}}{\partial Y} \tag{10}$$

ここで，λ_Dは係数であり，Yは損傷の進展に伴って開放される弾性ひずみエネルギーの密度であり，ひずみエネルギー開放率と呼ばれる．現在の損傷をDとすると，ひずみエネルギー開放率は，弾性ひずみエネルギー密度w^eを用いて次式で与えられる．

$$Y=\frac{w^{e}}{1-D} \tag{11}$$

$$w^{e}=\int E_{ijkl}\epsilon_{kl}^{e}(1-D)d\epsilon_{ij}^{e}=\frac{1}{2}E_{ijkl}\epsilon_{kl}^{e}\epsilon_{ij}^{e}(1-D) \tag{12}$$

次に，損傷の進展速度はひずみエネルギー密度開放率と比例関係にあると仮定する．

$$dD\sim\frac{Y}{1-D} \tag{13}$$

式(10)と式(13)の関係より，任意の係数S'を用いて次式が成立する．

$$\frac{1}{S'}\cdot\frac{Y}{1-D}=\lambda_{D}\frac{\partial F_{D}}{\partial Y} \tag{14}$$

したがって，

$$F_{D}=\frac{1}{2S'\lambda_{D}}\frac{Y^{2}}{1-D} \tag{15}$$

さらに，上式右辺の係数を一つにまとめることにより，次式のように表す．

$$F_{D}=\frac{Y^{2}}{2S(1-D)}\qquad(S'\lambda_{D}=S) \tag{16}$$

ここで，上式中の係数Sは損傷のエネルギー強度と呼ばれる材料定数である．

式(13)によると，損傷速度はYに比例して増加し，損傷$(0\le D\le 1)$の増加に伴って$0\sim\infty$まで変化するが，損傷の発生はひずみがあるレベルに達した時点から生じ，それ以前には損傷の進展がないものとすることにより，式(16)は次式のように表現できる．

$$F_{D}=\frac{Y^{2}}{2S(1-D)}H(\bar{\epsilon}^{p}-\bar{\epsilon}_{D}^{p}) \tag{17}$$

ここで，Hは次式で定義されるステップ関数である．

$$H=\begin{cases}1 & \bar{\epsilon}^{p}-\bar{\epsilon}_{D}^{p}\ge 0\\ 0 & \bar{\epsilon}^{p}-\bar{\epsilon}_{D}^{p}<0\end{cases} \tag{18}$$

ここで，$\bar{\epsilon}_D^p$は損傷の進展が始まる時点の相当塑性ひずみである．散逸ポテンシャル$\bar{F}$は，塑性ポテンシャルFが降伏関数fに等しいと仮定する関連流れ則を用いるとすると，式(8)に式(17)を代入して次式で与えられる．

$$\bar{F}=f+\frac{Y^{2}}{2S(1-D)}H(\bar{\epsilon}^{p}-\bar{\epsilon}_{D}^{p}) \tag{19}$$

(4) ひずみエネルギー密度開放率Y

弾性ひずみエネルギー密度w^eは偏差成分と静水圧成分に分けて次のように表すことができる．

$$w^{e}=\int\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}^{e}=\int S_{ij}dE_{ij}^{e}+\int\sigma_{H}d\epsilon_{H}^{e} \tag{20}$$

ここで，E_{ij}^eは偏差ひずみ，ϵ_H^eは体積ひずみでありそれぞれ次式で定義される．

$$E_{ij}^{e}=\epsilon_{ij}^{e}-\epsilon_{H}^{e},\qquad\epsilon_{H}^{e}=\epsilon_{mm}^{e} \tag{21}$$

また，弾性体の構成方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}E_{ij}^{e}&=\frac{1+\nu}{E}\frac{S_{ij}}{1-D}\\ \epsilon_{H}^{e}&=\frac{1-2\nu}{E}\frac{\sigma_{H}}{1-D}\end{aligned} \tag{22}$$

ここで，νはポアソン比であり，Eは弾性係数である．

式(22)を式(21)に代入して整理することにより次式を得る．

$$w^{e}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu}{E}\frac{S_{ij}S_{ij}}{1-D}+\frac{1-2\nu}{E}\frac{\sigma_{H}^{2}}{1-D}\right) \tag{23}$$

最後に，式(23)を式(11)に代入することにより，ひずみエネルギー開放率は次式のように表される．

$$Y=\frac{1}{2E(1-D)^{2}}\left\{(1+\nu)S_{ij}S_{ij}+(1-2\nu)\sigma_{H}^{2}\right\} \tag{24}$$

(5) 等方硬化弾塑性損傷構成方程式

塑性の発生と損傷の進展がそれぞれ独立に塑性ポテンシャルと損傷ポテンシャルに支配されるとし，かつ両者に流れ則を仮定することにより，通常の塑性論における構成方程式の誘導過程と全く同様にして損傷材料の構成方程式を次式のように導くことができる．

$$d\sigma_{ij}=\left\{E_{ijkl}^{e}(1-D)-E_{ijkl}^{p}\right\}d\epsilon_{kl}-E_{ijkl}^{e}\epsilon_{kl}^{e}dD \tag{25}$$

ここで，E_{ijkl}^eは弾性コンプライアンスであり，E_{ijkl}^pは次式で定義される塑性を表す4階の対称テンソルである．

$$E^p_{ijkl} = \frac{E^e_{ijpq}(1-D)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E^e_{mnkl}(1-D)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E^e_{mnpq}(1-D)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \quad (26)$$

さらに，プログラムの作成を容易にするために，上式中の微分を具体的に示しておくこととする.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{1-D}\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\alpha}\left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha\delta_{ij}\right) \quad (27)$$

$$h = \frac{\partial F_D}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E^e_{ijkl}\epsilon^e_{kl} - \frac{\partial f}{\partial D}\right) - \frac{\partial f}{\partial \Lambda}\frac{d\Lambda}{d\bar{\epsilon}^p} C\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial F_D}{\partial Y} = \frac{Y}{S(1-D)} H(\bar{\epsilon}^p - \bar{\epsilon}^p_D) \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\alpha}\frac{\sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1}{(1-D)^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \quad (31)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{1-\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3}} H' \quad (32)$$

$$C = \frac{1-\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{9\alpha^2 + \frac{3}{2}}} \quad (33)$$

3．三軸圧縮試験と損傷変数

ここでは，材料の三軸圧縮試験データからひずみの進行に伴って進展する損傷変数Dの評価手法を示す.

（1）初期損傷量

式(17)および式(18)に示したように，損傷の進展は塑性ひずみがあるレベルに達した時点から生じ，それ以前には損傷の進展がないものと仮定した．この仮定に従うと，相当塑性ひずみ$\bar{\epsilon}^p$が$\bar{\epsilon}^p_D$以下である場合の損傷量は初期損傷量D_0として材料内部にすでに存在する量であり，材料定数として位置づけられる．この初期損傷量D_0は，材料の任意断面における全断面積Aと空隙が占める断面積A_Dの比によって次式で与えられる.

$$D_0 = \frac{A_D}{A} \quad (34)$$

供試体の断面積と高さをA, L，固体部分の乾燥質量と体積をM_s, V_s，固体粒子の単位体積質量をρ_sとすると，供試体中で空隙部分が占める全体積V_vは次式で与えられる.

$$V_v = LA - V_s = LA - \frac{M_s}{\rho_s} \quad (35)$$

したがって，3軸試験供試体任意断面における空隙部分の断面積A_Dは式(35)から次式で与えられる.

$$A_D = \frac{V_v}{L} = A - \frac{M_s}{\rho_s L} \quad (36)$$

式(34)に式(36)を代入することにより初期損傷量D_0が次式で与えられる.

$$D_0 = 1 - \frac{M_s}{\rho_s AL} \quad (\bar{\epsilon}^p \le \bar{\epsilon}^p_D) \quad (37)$$

（2）進展過程の損傷量

損傷の進展は相当塑性ひずみ$\bar{\epsilon}^p$が$\bar{\epsilon}^p_D$を越えた時点から開始するが，応力状態が塑性負荷状態にあるときは常に式(3)の降伏条件を満足しなければならない．このことから，損傷進展開始以降の損傷変数は式(3)から次式で計算することができる.

$$D(\sigma_{ij}, \epsilon^p_{ij}) = 1 - \frac{\sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1}{\Lambda(\bar{\epsilon}^p)} \quad (\bar{\epsilon}^p \ge \bar{\epsilon}^p_D) \quad (38)$$

（3）降伏関数の材料定数

相当塑性ひずみが$0 \le \bar{\epsilon}^p \le \bar{\epsilon}^p_D$の範囲においては損傷の進展がないことから，異なる拘束圧に対する三軸試験から得られる降伏点での応力状態は式(3)を満足していなければならない.

$$\sqrt{J_{2D}} = \alpha J_1 + (1-D_0)\kappa \quad (39)$$

すなわち，$(\alpha,\ \kappa)$は幾つかの異なる拘束圧に対する三軸試験から得られる降伏点での応力から通常の手順に従って決定することができる.

一方，材料定数H'は，三軸試験から得られた降伏後の初期段階（$0 \le \bar{\epsilon}^p \le \bar{\epsilon}^p_D$）における応力とひずみデータから，式(5)および式(6)に従って相当応力$\bar{\sigma}$-相当塑性ひずみ$\bar{\epsilon}^p$曲線を作成する．例えば，$\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^p$ 関係を直線関係と仮定すると，H'は次式の直線式の勾配として決定することができる.

$$\bar{\sigma} = \kappa + H'\bar{\epsilon}^p \quad (40)$$

4．三軸圧縮試験と材料定数

三軸試験はJST-T524に基づき，完全排水条件で実施した．使用材料は，ゴミ焼却灰を焼成増粒することによって生産された人工砂（セメントWc/焼成灰Wa=50%）および固化材(Wc/Wa=50%)を使用し，人工砂の質量Wsに対する固化材の質量Wacの配合率(Wac/Ws)を7, 10, 13%とした．拘束圧σ_3は0.050, 0.075, 0.100, 0.125(MPa)として三軸圧縮試験を行った．試験条件を表1に，試験結果から推定された材料定数を表2および表3に示す.

5．試験結果と解析値の比較

式(25)の弾塑性損傷構成方程式に基づいて，表2および表3に示した材料条件を用いた三軸試験の数値解析を実施した．解析値と試験値を応力－ひずみ関係で比較したものを図1～図12に示す．これらの比較は，全般的には試験値と解析値の間に良好な対応を示している．しかしながら，一部の解析値は試験値と大きく異なる結果と

表 1　試験条件

三軸圧縮試験[CD]				
試験方法	締固めた土	ランマー質量(N)		60.0
試験条件	水浸	落下高さ(cm)		20.0
ひずみ速度(%/min)	0.083	突き固め回数		10
試料準備	非乾燥	突き固め層数		3
養生条件	3 日空気中	モールド	内径(cm)	5.0
	22 日水浸		高さ(cm)	10.0
土質名称		人工砂（焼却灰焼成増粒物）		
自然含水比(%)		16.0		
最適含水比(%)		28.0		

表 2　降伏関数の材料定数の推定値

Wac/Ws (%)	拘束圧 (Mpa)	α	κ	H' (Mpa)
7	0.050	0.338	0.009	390
	0.075			159
	0.100			132
	0.125			89
10	0.050	0.327	0.042	227
	0.075			144
	0.100			147
	0.125			65
13	0.050	0.269	0.054	938
	0.075			468
	0.100			239
	0.125			104

表 3　損傷構成式の材料定数の推定値

Wac/Ws (%)	拘束圧 (Mpa)	E (Mpa)	D。	$\bar{\epsilon}_D^p$ (%)
7	0.050	257	0.70	0.84
	0.075	350	0.70	0.65
	0.100	267	0.65	0.99
	0.125	271	0.60	1.10
10	0.050	300	0.65	1.00
	0.075	119	0.30	0.88
	0.100	250	0.30	0.97
	0.125	745	0.51	0.91
13	0.050	507	0.55	0.41
	0.075	523	0.55	0.60
	0.100	440	0.45	0.51
	0.125	400	0.35	0.98

なった．

表 2 と表 3 に示したように，三軸試験から評価された材料定数は，固化材の配合率 Wac/Ws と拘束圧に対してある程度の関連性があるものの，部分的に特異なデータが含まれている．このことが，解析値と試験値の応カーひずみ関係の不一致に大きく影響しているものと考えられる．

図 13～図 15 は，解析から得られた供試体内部の損傷軸ひずみとの関係で示したものである．損傷は，ほぼ降伏点から進展を開始し，損傷の進展速度が最大応力を越えた時点から急速に上昇するようである．

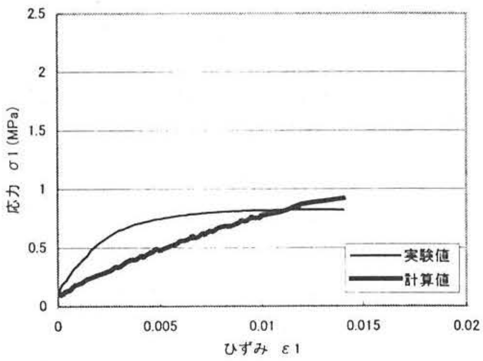

図 1 応力－ひずみ関係（Wac/Ws=7%, σ_3=0.050Mpa）

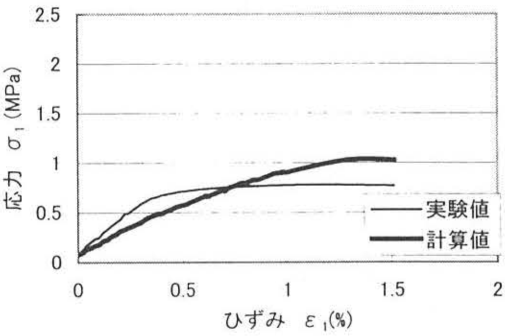

図 2 応力－ひずみ関係（Wac/Ws=7%, σ_3=0.075Mpa）

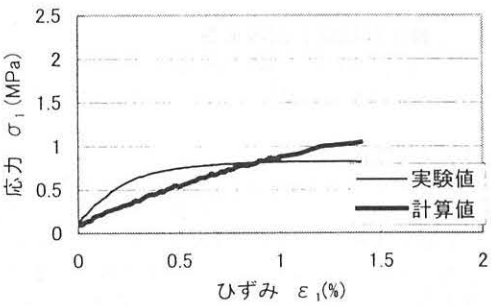

図 3 応力－ひずみ関係（Wac/Ws=7%, σ_3=0.100Mpa）

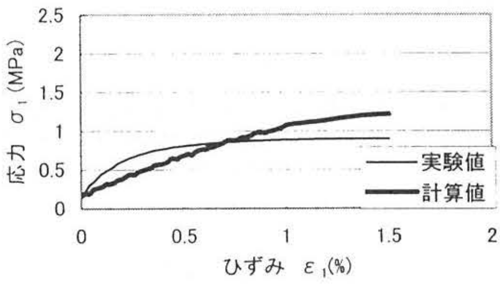

図 4 応力－ひずみ関係（Wac/Ws=7%, σ_3=0.125Mpa）

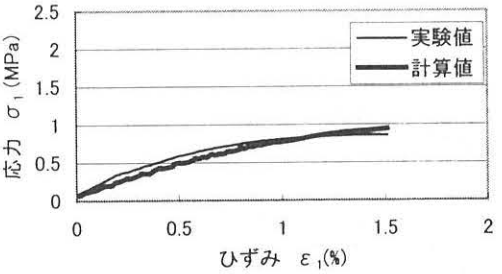

図 5 応力－ひずみ関係(Wac/Ws=10%, σ_3=0.050Mpa)

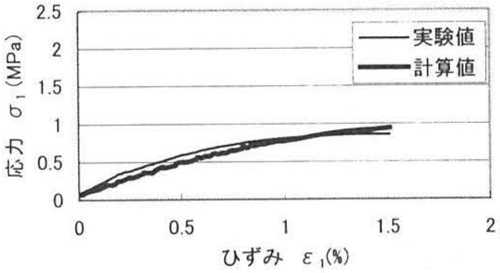

図 6 応力－ひずみ関係(Wac/Ws=10%, σ_3=0.075Mpa)

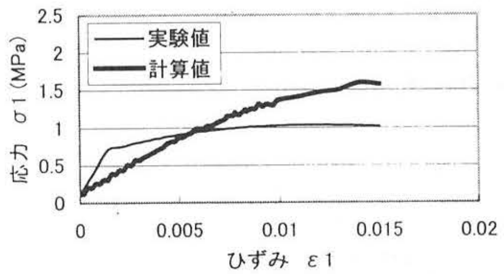

図 7 応力－ひずみ関係(Wac/Ws=10%, σ_3=0.100Mpa)

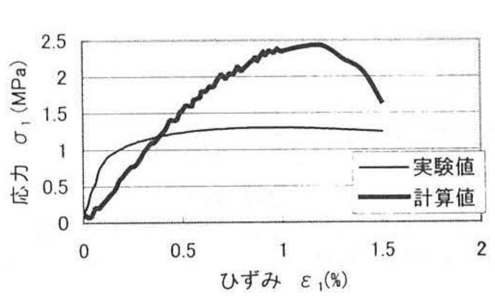

図 8 応力－ひずみ関係(Wac/Ws=10%, σ_3=0.125Mpa)

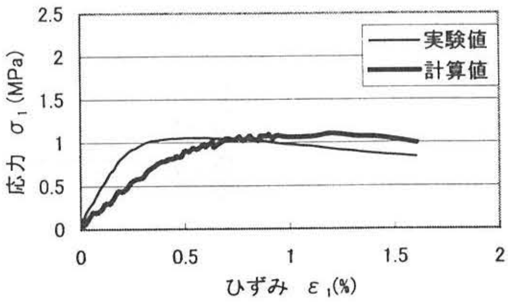

図 9 応力－ひずみ関係(Wac/Ws=13%, σ_3=0.050Mpa)

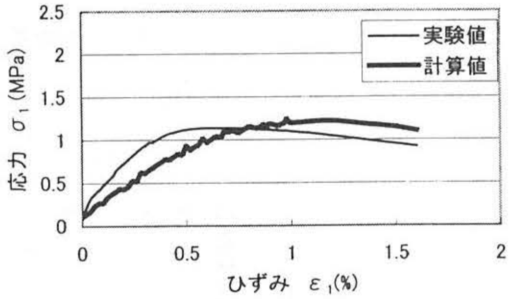

図 10 応力－ひずみ関係
(Wac/Ws=13%, σ_3=0.075Mpa)

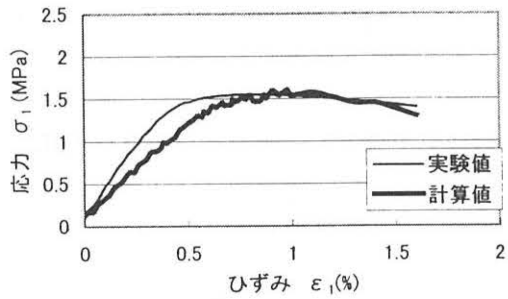

図 11 応力－ひずみ関係
(Wac/Ws=13%, σ_3=0.100Mpa)

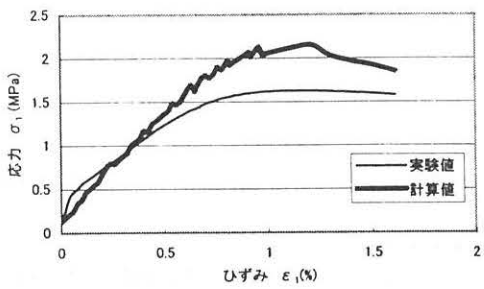

図 12 応力－ひずみ関係
(Wac/Ws=13%, σ_3=0.125Mpa)

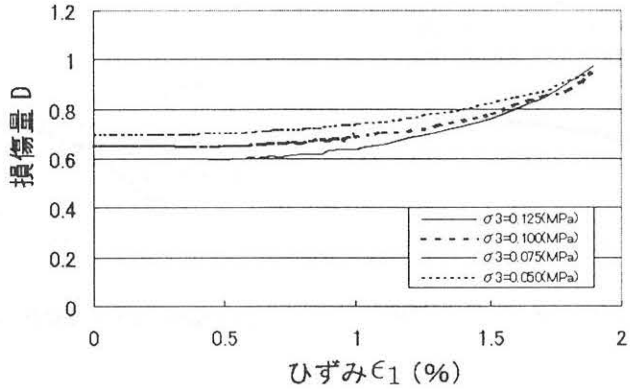

図 13 損傷量－ひずみ関係 (Wac/Ws=7 %)

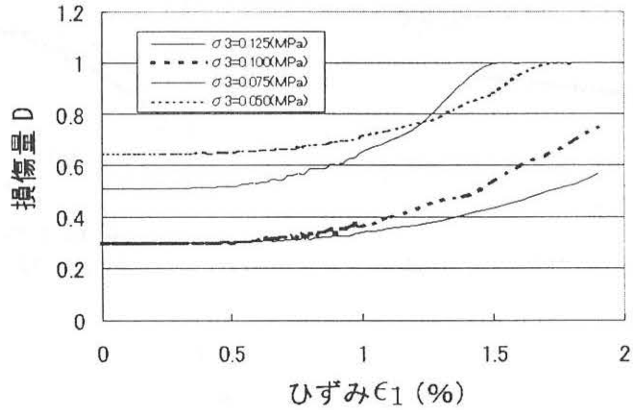

図 14 損傷量－ひずみ関係 (Wac/Ws=10 %)

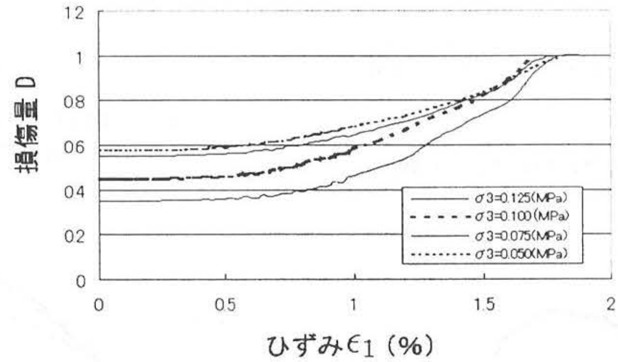

図 15 損傷量－ひずみ関係 (Wac/Ws=13 %)

6．あとがき

リサイクル材として開発された比較的粒径の揃った粗粒な増粒物の集合体である多孔質固化体に対する損傷モデルの適用性について考察した．採用した損傷モデルは，進展型の等方損傷構成方程式である．このモデルによる解析結果は，多孔質体の三軸試験結果をほぼ表現可能であることを示した．

参考文献

[1] 白石保律：損傷力学の熱力学的考察と岩盤の損傷進展解析に関する基礎的研究，法政大学大学院修士論文，1997.

[2] Jean Lemaitre：A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag Berlin, 1996.

キーワード

損傷力学, 構成方程式, 等方損傷, 多孔質体, 連続体力学

Summary.

Elasto-Plastic Damage Growth Analysis of Porous Media

Ryousuke Uchida
Department of Civil Faculty of Engineering, Hosei University

Morito Kusabuka　　Norimichi Ishida
Computational Science Research Center, Hosei University

Constitutive relation of porous media is considered from the viewpoint of damage mechanics. For the isotropic damage porous media, the constitutive equation was developed within the framework of the thermodynamic theory. In consequence, it is confirmed that isotropic damage concept is a valid method for describing a mechanical behavior of discontinuous porous media within the framework of the continuum mechanics.

Keywords.

Damage Mechanics, Constitutive Equation, Isotropic Damage, Porous Media, Continuum Mechanics