

ハイブリッド型ペナルティ法による浸透流問題の解析

TAKEDA, Hiroshi / 竹内, 則雄 / 石垣, 智昭 / KUSABUKA, Morito / 草深, 守人 / TAKEUCHI, Norio / ISHIGAKI, Chiaki / 武田, 洋

(出版者 / Publisher)

法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学計算科学研究センター研究報告 / Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University

(巻 / Volume)

14

(開始ページ / Start Page)

159

(終了ページ / End Page)

164

(発行年 / Year)

2001-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00024933>

ハイブリッド型ペナルティ法による浸透流問題の解析

石垣 智明

法政大学大学院工学研究科

竹内 則雄 草深 守人

法政大学工学部土木工学科

武田 洋

法政大学工学部システム制御工学科

ハイブリッド型モデルの考え方を浸透流問題に適用した新しい離散化手法として、ハイブリッド型ペナルティ法(HPM)を提案する。まず、水頭(ポテンシャル)の連続性を付帯条件として、これをペナルティにより一般的な重み付き残差法定式に導入した定式化を示す。続いて、水頭をテラー展開し、1次項までで水頭場を表現して離散化方程式を誘導する。本手法は、水頭場を部分領域毎に独立に設定するため、任意の部分領域形状を用いることができ、複雑な地盤領域も容易に細分割することができる。本論文において定式化とともに簡単な数値計算例により、本手法による解の特性を検討する。

1. はじめに

浸透流問題の解析を行う場合、有限要素法(FEM)や有限体積法(FVM)、差分法(FDM)などが用いられている。どの方法も領域を部分領域や格子により分割して解析を行う。しかしながら、部分領域形状は、FEMは水頭の内挿関数、FVMは水頭場に依存する。したがって、複雑な地層を有する3次元地盤の細分割は容易ではない。

また、浸透流問題の場合、自由水面を扱わなければならない場合も多い。FEMでは、飽和-不飽和の概念を用いてこれを表現する方法[1]、収束計算により要素を再分割する方法[2]などが用いられている。しかし、前者の方法では自由水面を判定するのに扱う定数が多くなり、後者の方法では複雑な地盤での要素の再分割が困難である。

著者ら[3]は、FVMによる浸透流問題の解析法を提案した。この方法では、Shi[4]が提案しているマニホール法(MM)と同様に、水頭場と物理領域を別々に考えることができるため、自由水面を物理領域と考えて取り扱うことが可能である。ただし、要素形状はポテンシャル場によって限定され、任意の形状を用いることはできない。

一方、著者ら[5]は、ハイブリッド型変位モデルの考え方に着目して、Lagrangeの未定乗数にバネの考え方を導入し、ばね定数としてペナルティを用いて、部分領域境界上での変位の連続性を近似的に導入した新しい離散化モデルを開発した。この方法では、部分領域毎に独立な変位場を仮定し、自由度として部分領域内の変位とひずみを用いている。したがって、部分領域の形状は任意であり、節点に自由度を設ける必要はなく、領域形状を認識するためだけに節点を用いられている。

そこで、本論文では、著者らが提案したハイブリッド型モデルの考え方を浸透流問題に適用した新しい離散化手法を提案する。はじめに、水頭(ポテンシャル)の連続性を付帯条件として、これをペナルティにより一般的な重み付き残差方程式に導入した定式化を示す。続いて、水頭をテラー展開し、1次項までで水頭場を表現して離散化方程式を誘導する。また、簡単な数値計算例により、本手法によって得られる解の特性について検討する。

2. 浸透流の基礎方程式と重み付き残差法定式

(1) 基礎方程式

定常浸透流の基礎方程式が次式で与えられる。

$$\text{(連続の方程)} \quad L^t v + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\text{(流速-動水勾配関係)} \quad v = -k d \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\text{(動水勾配-水頭関係)} \quad d = L h \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

ここで、 f は湧水率、 h は水頭であり、 v, d, k は、それぞれ流速、動水勾配、透水係数を表わしており、マトリックスで表すと以下の関係にある。

$$v = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}, d = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}, k = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

また、 Ω は境界 $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_q$ で囲まれた領域、もしくは体積である。ただし、 Γ_h は水頭が与えられる境界、 Γ_q は境界を通して領域から流入出する流量が与えられる境界で、それぞれ、以下の条件を満たしている。

$$q = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (4)$$

$$h = \bar{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (5)$$

ここで、上付の $\bar{\quad}$ は既知量を表しており、 q は境界における単位面積あたりの法線方向に対する流量で、

$$q = n v \quad (6)$$

と表される。ただし、 n は境界における外向き法線ベクトルである。

(2) 重み付き残差法

式(1)に境界条件式(5)を満たす任意の重み δh を乗じて領域 Ω について積分すると以下の関係が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta h(L^t v + f) d\Omega = 0 \quad (7)$$

ただし、 $\delta h = 0$ on Γ_h

これにガウスの発散定理を用いると、次のような領域 Ω に関する重み付き残差方程式が得られる。

$$-\int_{\Omega} [L\delta h]^t \alpha d\Omega + \int_{\Omega} \delta h f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta h \nu \alpha d\Gamma = 0 \quad (8)$$

いま、図1に示すように、領域 Ω は閉境界 $\Gamma^{(e)}$ で囲まれた n 個の部分領域 $\Omega^{(e)}$ から構成されているものとする、

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (9)$$

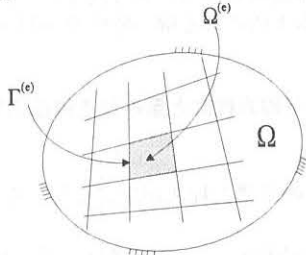


図1 領域 Ω と部分領域 $\Omega^{(e)}$

このとき、式(8)の重み付き残差方程式は、式(6)の関係をを用い、離散領域に対して以下のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left(-\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t \alpha d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega \right) + \int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma = 0 \quad (10)$$

(3) 付帯条件付きの重み付き残差法

鷲津[6]は、要素境界における変位の連続性を少し弱め、Lagrange の未定乗数を用いて付帯条件を変分原理に導入したモデルをハイブリッド型と呼んでいる。本論文においても、このハイブリッド型の考え方をを用いて、部分領域境界において水頭の連続性を弱め、この付帯条件をペナルティを用いて重み付き残差方程式に導入する。

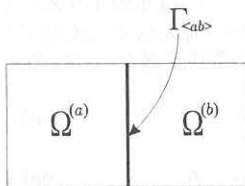


図2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

いま、図2に示すような隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ を考える。このとき、2つの部分領域における共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 、すなわち、

$$\Gamma_{<ab>} = \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (11)$$

において、付帯条件

$$\hat{h}^{(a)} = \hat{h}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (12)$$

を隣接する部分領域の境界で共通な Lagrange の未定乗数 λ を用いて、

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) d\Gamma \quad (13)$$

と表し、重み付き残差方程式(10)に導入する。ここで、 $\hat{h}^{(a)}$ ならびに $\hat{h}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の水頭を表している。ただし、

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta \lambda (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (\delta \hat{h}^{(a)} - \delta \hat{h}^{(b)}) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

いま、隣接する2つの部分領域境界辺の数を N とすると、重み付き残差方程式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left(-\int_{\Omega} [L\delta h]^t \alpha d\Omega + \int_{\Omega} \delta h f d\Omega \right) \\ &+ \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma^{(s)}} \lambda (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) d\Gamma \right) + \int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ところで、式(15)を式(7)から式(8)への展開を考慮して書き直すと以下の関係がある。

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega^{(a)}} L^t \delta h \nu \alpha d\Omega + \dots - \int_{\Omega^{(b)}} L^t \delta h \nu \alpha d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left[(q^{(a)} - \lambda) \delta \hat{h}^{(a)} + (q^{(b)} + \lambda) \delta \hat{h}^{(b)} \right. \\ & \left. + (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) \delta \lambda d\Gamma \right] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

任意の重みについて式(16)が成立することより、

$$\lambda = q^{(a)} = -q^{(b)} \quad (17)$$

なる関係が成立する。すなわち、Lagrange の未定乗数 λ は、物理的に $\Gamma_{<ab>}$ 上の流量を意味していることになる。

3. 水頭場と Lagrange の未定乗数

(1) 部分領域毎に独立な線形の水頭場

いま、2次元状態の場合、水頭 $h(x, y)$ が点 (x_p, y_p) を含む部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内で n 回連続微分可能であれば、テーラー展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} h(x, y) &= h(x_p, y_p) \\ &+ \frac{1}{1!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\} h(x_p, y_p) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 h(x_p, y_p) + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^{(n-1)} h(x_p, y_p) \\ &+ R_n \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, R_n は剰余項である. h が C^1 級の関数であるとして, 式(18)における1回の微分までを考慮すると, 水頭 $h(x, y)$ は次のように表すことができる.

$$h^{(e)} = h_p + (x - x_p) \frac{\partial h_p}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial h_p}{\partial y} \quad (19)$$

ただし, $h^{(e)}$ は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の水頭 $h(x, y)$ を, h_p は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の点 (x_p, y_p) における水頭を表している. 式(19)の右辺第2項, 第3項の偏微分は動水勾配を表しており, 式(3)の関係をを用いて次のように表すことができる.

$$h^{(e)} = h_p + (x - x_p)d_x + (y - y_p)d_y \quad (20)$$

式(20)は線形の水頭場を表しており, これを各部分領域毎に独立に設定する. いま, 部分領域 $\Omega^{(e)}$ について, 水頭の式(20)を, 簡単に

$$h^{(e)} = N^{(e)} H^{(e)} \quad (21)$$

と表す. 式(21)におけるそれぞれの係数は, 2次元平面問題の場合, 次のとおりである.

$$H^{(e)} = [h_p, d_x, d_y]^t$$

$$N^{(e)} = [1, (x - x_p), (y - y_p)]$$

このように, 本論文で用いる水頭場は, 部分領域内における任意点の水頭に加え, 直接, 動水勾配を自由度として扱う. したがって, 従来のFEMや著者らが展開したFVM[3]とは異なり節点において水頭を共有しない. すなわち, 節点は領域形状を認識するために用いるのであって, 従来のFEMのように自由度を設けるためのものではないため, 部分領域の形状は特に限定されず, 任意の形状を部分領域として用いることが可能になる.

(2) Lagrange の未定乗数とペナルティ

2章の終わりで述べたように, Lagrange の未定乗数は, 物理的には部分領域境界面における流量を意味している. 著者ら[5]は, 構造の問題において, Lagrange の未定乗数をその物理的意味を考慮して, ペナルティと相対変位の積で表した. 本論文においてもこれと同様, λ が流量に対応するという点を考慮し, 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における, 境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の流量を次のように表すこととする.

$$\lambda_{<ab>} = P\phi_{<ab>} \quad (22)$$

ここで, P はペナルティを表している. また $\phi_{<ab>}$ は境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対的な水頭を表しており, 次の関係がある.

$$\phi_{<ab>} = \hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)} \quad (23)$$

4. 離散化方程式の誘導

離散化方程式を誘導するにあたり, 式(13)を式(23)を用いて次のように書く.

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>} (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) d\Gamma = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>} \phi_{<ab>} d\Gamma \quad (24)$$

さらに, 式(22)の関係を代入すると, 以下のようになる.

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \phi_{<ab>} P\phi_{<ab>} d\Gamma \quad (25)$$

したがって, 式(15)は次のように書くことができる.

$$\sum_{e=1}^M \left(- \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma \right) + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \phi_{<s>} P\phi_{<s>} d\Gamma \right) = 0 \quad (26)$$

この式に, 式(2), 式(3)の関係を代入すれば, 最終的に以下の関係が得られる.

$$\sum_{e=1}^M \left(- \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t \mathbf{k} L h d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma \right) + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \phi_{<s>} P\phi_{<s>} d\Gamma \right) = 0 \quad (27)$$

離散化方程式は, 式(27)に対して, 式(21)で示す線形の水頭場の関係を代入することによって得られる. ただし, 重み $\delta h^{(e)}$ は次のように表されるものとする.

$$\delta h^{(e)} = N^{(e)} \delta H^{(e)} \quad (28)$$

いま, 式(3)で表されている動水勾配は, 式(21)より次のように表される.

$$Lh^{(e)} = LN^{(e)} H^{(e)} = B^{(e)} H^{(e)} \quad (29)$$

ここで, $B^{(e)}$ は,

$$B^{(e)} = LN^{(e)} \quad (30)$$

であり, 2次元問題の場合,

$$B^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

である. 同様に, 重みについても以下のように表す.

$$L\delta h^{(e)} = LN^{(e)} \delta H^{(e)} = B^{(e)} \delta H^{(e)} \quad (32)$$

以上の関係を用いると, 式(27)における左辺第1項は次のように表すことができる.

$$\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t \mathbf{k} L h d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)} \delta H^{(e)})^t K^{(e)} (B^{(e)} H^{(e)}) d\Omega = \delta H^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t K^{(e)} B^{(e)} d\Omega H^{(e)} \quad (33)$$

ここで, 全部分領域における自由度を並べた1次元配列を \mathbf{H} とすると, 部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $H^{(e)}$ は以下のように関係付けられる.

$$H^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{H} \quad (34)$$

ここで $\mathcal{A}^{(e)}$ は, 全部分領域の自由度と着目部分領域の自由度を関係付ける行列である. 重みについても同様に,

$$\delta H^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta H \quad (35)$$

とすると、式(33)は次のように整理することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t k L h d\Omega = \delta H^t K^{(e)} H \quad (36)$$

ここで、 $K^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$K^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t k^{(e)} B^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \quad (37)$$

また、式(27)の左辺第2項および第3項は、以下のように表示することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma = (\delta H^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t f d\Omega + \int_{\Gamma_q} (N^{(e)})^t q d\Gamma \right) \quad (38)$$

式(38)は式(35)の関係を用いてと次のようになる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma = -\delta H^t Q^{(e)} \quad (39)$$

ここで、 $Q^{(e)}$ は以下のように表示。

$$Q^{(e)} = -(\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t f d\Omega + \int_{\Gamma_q} (N^{(e)})^t q d\Gamma \right) \quad (40)$$

一方、部分領域境界面に関する項を整理するにあたり、相対水頭 $\phi_{\langle ab \rangle}$ を次のように表示。

$$\phi_{\langle ab \rangle} = \hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)} = B_{\langle ab \rangle} H_{\langle ab \rangle} \quad (41)$$

ここで、 $B_{\langle ab \rangle}$ 、 $H_{\langle ab \rangle}$ は以下のとおりである。

$$B_{\langle ab \rangle} = [N^{(a)}, N^{(b)}] \quad (42)$$

$$H_{\langle ab \rangle} = [H^{(a)}, H^{(b)}]^t \quad (43)$$

ただし、上記の(a),(b)は、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ に関する量を表している。これらの関係を用いると、式(27)の左辺第4項は次のように表示することができる。

$$\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \phi P \phi d\Gamma = \delta H^t_{\langle ab \rangle} \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} B^t_{\langle ab \rangle} P B_{\langle ab \rangle} d\Gamma H_{\langle ab \rangle} \quad (44)$$

いま、式(34)と同様に、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を H とすると、部分領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に関する自由度 $H_{\langle ab \rangle}$ は、以下のように関係付けられる。

$$H_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} H \quad (45)$$

ここで、 $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$ は、全部分領域における自由度と着目している部分領域境界面に関する自由度を関係付ける行列である。同様に重みについても次の関係が成り立つ。

$$\delta H_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \delta H \quad (46)$$

これらの関係より、式(44)は次のように書くことができる。

$$\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \phi P \phi d\Gamma = \delta H^t K_{\langle s \rangle} H \quad (47)$$

ここで、 $K_{\langle s \rangle}$ は以下のとおりである。

$$K_{\langle s \rangle} = \mathcal{M}^t_{\langle s \rangle} \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} B^t_{\langle s \rangle} P B_{\langle s \rangle} d\Gamma \mathcal{M}_{\langle s \rangle} \quad (48)$$

以上のようにして求めた式(36)、式(39)、式(48)より、式(27)は以下のように表示することができる。

$$\delta H^t \left(\sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{\langle s \rangle} \right) H - \delta H^t \left(\sum_{e=1}^M Q^{(e)} \right) = 0 \quad (49)$$

ここで、重み δH は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$KH = Q \quad (50)$$

ただし、 K および Q は次のとおりである。

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{\langle s \rangle} \quad (51)$$

$$Q = \sum_{e=1}^M Q^{(e)} \quad (52)$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(50)に示す連立1次方程式に帰着し、左辺の係数行列 K は、各部分領域の係数行列と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。なお、係数行列 K において、部分領域境界面に関する積分が含まれるが、本論文では、積分点を境界面の1点(平面問題の場合は中点)にとり解析をする。このようにした理由は、部分領域内動水勾配が一定でかつ、流量の連続性を保持しながら境界面のいたるところの水頭の連続性を要求すると拘束が強くなりすぎる懸念されたためである。

5. 数値計算例

本手法の精度を検討するため、図3に示す不透水矢板壁下の定常浸透流問題の解析を行う。地盤は均質であり、透水係数は1m/sである。また、解析領域は左右対称性を考慮して左側半分とし、矢板壁下で全損失水頭を50mとした。また、底部および左側面は不透水境界である。

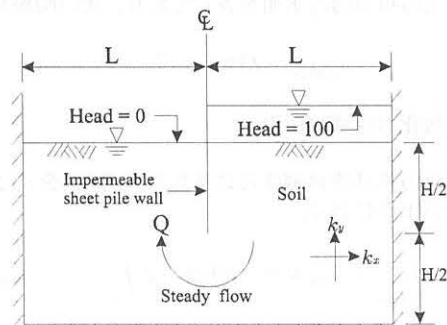


図3 解析モデル

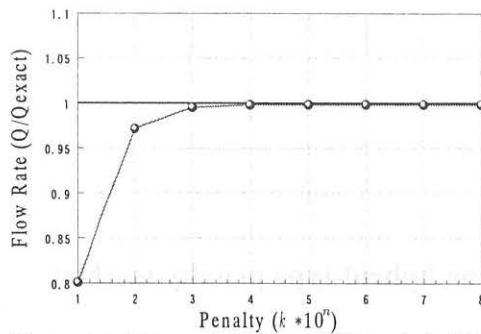


図5 ペナルティの相異による流量の収束状況

はじめに、ペナルティが解に与える影響を検討するため、ペナルティの大きさを変えて、水平方向に対して無限の地盤における解析解[2]と比較した。この解析では、領域深さを $H=6\text{m}$ とし、領域幅は十分な距離を考慮 $L=30\text{m}$ とした。また、部分領域への分割は、1辺が 0.5m の正方形領域を用いた

図5は横軸にペナルティの大きさを透水係数の 10 の n 乗倍で表したものを、縦軸に計算された流量を解析解で除したものを示している。図のように、透水係数に対して 10^5 倍以上のペナルティを用いると、解析解に対して 0.2% 以下の誤差になる。この誤差には、領域幅の影響と部分領域の分割幅の影響が含まれているが、 10^5 以上では、誤差の変動が見られなかったため、以後の解析では透水係数の 10^6 倍のペナルティを用いた。

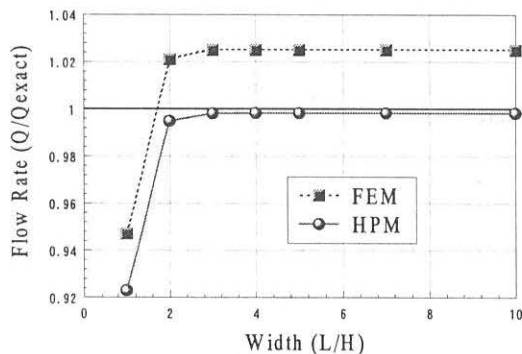


図6 領域幅と流量の関係

次に、領域幅の影響について、FEM および解析解と比較検討した。領域深さを $H=6\text{m}$ に固定し、領域幅を $L=6, 12, 18, 24, 30, 60\text{m}$ とした。図6は、横軸に領域幅を領域深さで無次元化した値、縦軸に流量を解析解で除した値をとった図である。●印の実線が本手法による解を、■印の点線がFEMによる解を表している。本手法およびFEMとも、一辺 0.5m の正方形領域を用いている。両手法とも、縦横比が $1:3$ 以上になると、ほぼ同じ解が得られている。しかし、流量に関する解析解との誤差は、本手法が 0.2% 以下であるのに対して、FEMは 2.5% であった。

最後に、領域分割数の影響を検討した結果を図7に示す。領域深さを $H=6\text{m}$ 、領域幅を $L=48\text{m}$ とした。図の横軸は深さ方向の分割数、縦軸は流量を解析解で除した値を示している。図中、●印の実線が本手法による解を、■印の点線がFEMによる解を表している。両手法とも、領域を細分することで正解に近づく。ただし、本手法が、12分割で約 0.2% の誤差となり、60分割では正解と一致するのに対し、FEMでは、12分割で 2.5% 、60分割で 0.5% の

誤差であった。これは、本手法が部分領域境界において流量が連続であるのに対して、FEMでは節点で流量のバランスをとっていることに起因するものと思われる。

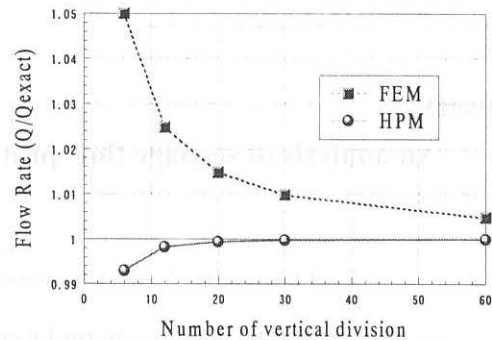


図7 領域分割数の相異による収束状況

6. 結び

本論文では、水頭の連続性を付帯条件としてペナルティにより一般的な重み付き残差方程式に導入し、水頭のテーラー展開の1次項までで水頭場を表現して離散化方程式を誘導する新しい離散化モデルを開発した。

本手法の特徴は、部分領域間の水頭の連続性をペナルティにより導入し、線形水頭場を部分領域内の任意点における水頭と動水勾配により表現していること、水頭場を部分領域毎に独立に設定していることである。したがって、部分領域の形状は、従来のFEMのように内挿関数に依存せず、任意の形状を用いることが可能である。

本手法による解の精度を検討するため、簡単なモデルで定常浸透流問題の解析を行った。その結果、ペナルティは透水係数の 10^5 倍以上にすると精度の高い解が得られることがわかった。また、FEMと比較しても、本手法は領域分割サイズにあまり影響されず、最大でも 1% 以下、細分すれば、正解とほぼ一致する結果が得られた。これは、従来のFEMが節点で流量のバランスを考えていたのに対し、本手法は部分領域における境界において流量の連続性を導入しているため、領域分割にあまり影響されない流量解が得られたものと思われる。

また、本手法は3次元化が容易であり、今後、3次元問題を含め実用的問題を解析することによって、さらに精度の検証をする必要がある。

参考文献

- 1) 赤井浩一, 大西有三, 西垣誠: 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, 土木学会論文報告集, No.264, pp171-180, 1977
- 2) I.M.Smith and D.V.Griffiths: Programming the Finite Element Method(3rd ed.), John Wiley & Sons, 1998
- 3) 石垣智明・竹内則雄・草深守人・武田洋: 線形ポテンシャル場を用いた有限体積法による地下水浸透問題の解析法, 法政大学計算科学研究センター研究報告第13巻, pp213-218, 2000
- 4) G.H.Shi: Manifold method of material analysis, Transactions of 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing, Report No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991
- 5) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, 2000
- 6) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972

キーワード.

浸透流、ハイブリッド型ペナルティ法、重み付き残差法

Summary.**An analysis of seepage flow problem by using hybrid-type penalty method**

Chiaki Ishigaki

Civil Engineering Major, Division of Engineering, Graduate School, Hosei University

Norio Takeuchi Morito Kusabuka

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Hosei University

Hiroshi Takeda

Department of System and Control Engineering,, Faculty of Engineering, Hosei University

In this paper, new discrete method which applied the approach of the hybrid model to the seepage flow problems are developed. First, the formulation which introduced the potential continuity by penalty in general weighting residual procedure is shown. Compatibility of the potential on the sub-domain boundary edge is approximately introduced using the penalty. Next, the Taylor's series expansion is used for potential function. It is possible that this model uses the sub-domain of the arbitrary shape, because independent potential field is assumed for each sub-domain. The equivalent solution with the analytical solution when it examined the accuracy of numerical solution using this model is obtained.

Keywords.

Seepage flow, Hybrid-type Penalty Method, Weighted residual procedure