ハイブリッド型ペナルティ法による進行型破壊の解析

武田, 洋 / TAKEDA, Hiroshi / TAKEUCHI, Norio / OHKI, Hirohisa / 竹内, 則雄 / KUSABUKA, Morito / 大木, 裕久 / 草深, 守人

(出版者 / Publisher)
法政大学計算科学研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学計算科学研究センター研究報告 / Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University
(巻 / Volume)
14
(開始ページ / Start Page)
153
(終了ページ / End Page)
158
(発行年 / Year)
2001-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00024932

ハイブリッド型ペナルティ法による進行型破壊の解析

大木　裕久
法政大学大学院工学研究科

竹内　則雄　　草深　守人
法政大学工学部土木工学科

武田　洋
法政大学工学部システム制御工学科

本論文では進行型破壊の解析法を開発することを目的に，ハイブリッド型仮想仕事の原理を基礎とする，引張破壊を考慮した材料非線形解析法について述べる．この方法では，Lagrangeの未定乗数にRBSMのばねぼ概念を導入し，このばねをペナルティと考えることで，近似的に部分領域境界面上の変位の連続性を導入する．初めに，本手法の定式化を示し，続いて，簡単な例により，本手法によって得られる解の特性について検討する．

1. はじめに

進行型破壊の解析では，２重節点の処理などが不要な境界面上の物理量を取り扱った方が，簡便なアルゴリズムになる．FEMによる要素境界面の物理量を取り扱う方法として，ハイブリッド型の変分原理がある[1]．この方法では，変位の連続性を若干緩め，付帯条件をLagrangeの未定乗数によって変分表示に導入している．この未定乗数は要素境界面上の表面力という物理的な意味を有しており，変位場は適合条件に束縛されることなく要素毎に独立に仮定することができる[2]．

本論文では，このハイブリッド型変位モデルの考え方に着目して，Lagrangeの未定乗数にばねの考え方を導入し，ばね定数としてペナルティを用いる新しい解析法を展開する．本論文では，以降，この方法をハイブリッド型ペナルティ法（HPM : Hybrid-type Penalty Method）と呼ぶ．HPMでは，解析領域を小さな部分領域に分割し，部分領域毎に独立な変位場を仮定して境界上での変位の連続性をペナルティにより近似的に導入する．このとき，部分領域間の境界において，表面力が求められる．この表面力を利用して，RBSMと同様なすべりや引張破壊などの進行型破壊を導入すれば，２重節点による自由度の増加を伴わずに解析を進めることが可能である．

はじめに，剛体変位と部分領域内で一定のひずみによる線形変位場を用いて定式化を行う．このような変位場を用いると，高次項を加えることで変位関数の次数を上げることができる．さらに，進行型破壊に対する非線形解析法を展開し，本手法によって得られる崩壊荷重の精度や破壊の進展について検討を加える．

2. 基礎方程式とハイブリッド型仮想仕事の原理

弾性問題の基礎方程式は次式で与えられる．

(釣り合い方程式)　$\boldsymbol{L}^t\boldsymbol{\sigma}+\overline{\boldsymbol{f}}=0$　inΩ　(1)

(応力－ひずみ関係)　$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$　inΩ　(2)

(ひずみ－変位関係)　$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}$　inΩ　(3)

ここで，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$は，それぞれ，変位，ひずみ，応力ベクトルであり，$\boldsymbol{D}$は構成行列，$\overline{\boldsymbol{f}}$は物体力を表している．また，$\boldsymbol{L}$は微分作用素であり，$\Omega$は境界$\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_\sigma$で囲まれた領域，もしくは体積である．ただし，$\Gamma_u$は変位が与えられる境界，$\Gamma_\sigma$は表面力が与えられる境界で，以下の条件を満たしている．

(力学的境界条件)　$\boldsymbol{T}=\overline{\boldsymbol{T}}$　on Γ_σ　(4)

(幾何学的境界条件)　$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$　on Γ_u　(5)

ここで，$\boldsymbol{T}$は単位面積あたりの表面力で，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}$であり，$\boldsymbol{n}$は境界上の外向き法線ベクトルの成分を並べた行列である．また，上付の$\overline{}$は既知量を表している．

式(1)に幾何学的境界条件を満たす仮想変位$\delta\boldsymbol{u}$を乗じて領域Ωについて積分し，ガウスの発散定理を用いると，次のような領域Ωに関する仮想仕事式が得られる．

$$\int_\Omega [\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{\sigma}d\Omega-\int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^t\overline{\boldsymbol{f}}d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}\delta\boldsymbol{u}^t\,\overline{\boldsymbol{T}}d\Gamma=0 \qquad (6)$$

ただし，Γ_u上で，$\delta\boldsymbol{u}=0$である．

いま，図1に示すように，領域Ωは閉境界$\Gamma^{(e)}$で囲まれたM個の部分領域$\Omega^{(e)}$から構成されているものとする．

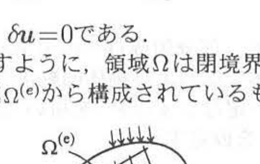

図1　部分領域$\Omega^{(e)}$とその境界$\Gamma^{(e)}$

このとき，式(6)の仮想仕事式は各部分領域の和として以下のように表すことができる．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}[\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{\sigma}d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\delta\boldsymbol{u}^t\overline{\boldsymbol{f}}d\Omega\right)-\int_{\Gamma_\sigma}\delta\boldsymbol{u}^t\overline{\boldsymbol{T}}d\Gamma=0 \qquad (7)$$

いま，図2に示すように，隣接する２つの部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の共通の境界を$\Gamma_{<ab>}$とする．

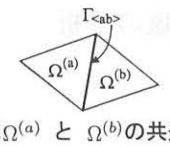

図2　部分領域$\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

この境界において付帯条件

$$\boldsymbol{u}^{(a)}_{<ab>}=\boldsymbol{u}^{(b)}_{<ab>} \qquad \text{on } \Gamma_{<ab>} \tag{8}$$

をLagrangeの未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を用いて，

$$H_{ab}=\delta\int_{\Gamma_{<ab>}}\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{u}^{(a)}_{<ab>}-\boldsymbol{u}^{(b)}_{<ab>})\,d\Gamma \tag{9}$$

と表し，仮想仕事式(7)に導入する．ただし，$\boldsymbol{u}^{(a)}_{<ab>}$ならびに$\boldsymbol{u}^{(b)}_{<ab>}$は，それぞれ，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の変位を表している．

いま，隣接する２つの要素境界面の数をNとすると，ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}[\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{\sigma}d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\delta\boldsymbol{u}^t\overline{\boldsymbol{f}}d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}\delta\boldsymbol{u}^t\overline{\boldsymbol{T}}d\Gamma\right)-\sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}}\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{u}^{(s_a)}_{<s>}-\boldsymbol{u}^{(s_b)}_{<s>})\,d\Gamma\right)=0 \tag{10}$$

ただし，上付きの(s_a)，(s_b) は境界$\Gamma_{<s>}$に隣接する二つの部分領域$\Omega^{(s_a)}$と$\Omega^{(s_b)}$に関する量を示しており，したがって，$\boldsymbol{u}^{(s_a)}_{<s>}$ならびに$\boldsymbol{u}^{(s_b)}_{<s>}$は，境界$\Gamma_{<s>}$に接する部分領域$\Omega^{(s_a)}$と$\Omega^{(s_b)}$の境界$\Gamma_{<s>}$上の変位を意味する．また，左辺第３項は文献(2)の書き方にしたがい，便宜上，領域の和の () 内に入れておく．

なお，Lagrangeの未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$は，次式のように，$\Gamma_{<ab>}$上の表面力を意味している[2]．

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{T}^{(a)}(\boldsymbol{u}^{(a)}_{<ab>})=-\boldsymbol{T}^{(b)}(\boldsymbol{u}^{(b)}_{<ab>}) \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{T}^{(a)}$と$\boldsymbol{T}^{(b)}$は，それぞれ，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の表面力を表している．

3.　変位場とペナルティ

本論文では，部分領域$\Omega^{(e)}$内のある１点$\boldsymbol{P}=(x_P,y_P)$における剛体変位および剛体回転$\boldsymbol{d}^{(e)}$に加え，直接，部分領域内で一定なひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$を用いて，以下のように線形変位場$\boldsymbol{u}^{(e)}$を仮定する．

$$\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{N}^{(e)}_d\boldsymbol{d}^{(e)}+\boldsymbol{N}^{(e)}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \tag{12}$$

ここで，上付きの(e)は部分領域$\Omega^{(e)}$に関するものであること意味する．

このように，本論文で用いる変位場は，部分領域内における１点の剛体変位と回転に加え，直接，ひずみを自由度として扱う．また，各部分領域内の１点におけるパラメータを用いて部分領域内の変位場を表しているため，従来の変位型FEMとは異なり，節点において変位を共有しない．すなわち，本論文における節点は領域形状を認識するために用いるのであって，従来の変位型FEMのように自由度を設けるための節点ではない．

２章の終わりで述べたように，Lagrangeの未定乗数は，物理的には表面力を意味している．RBSMでは，表面力と相対変位の間にばねの概念を導入し，ばねによる表面力の仕事を用いて全体のエネルギーを評価してる[3]．

そこで，Lagrangeの未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$にこのRBSMの考え方を適用し，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の表面力$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}$を次のように表すことにする．

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{<ab>} \tag{13}$$

ここで，　$\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$は部分領域境界面$\Gamma_{<ab>}$上の相対変位を表しており，$\boldsymbol{k}$はばね定数に対応する係数行列である．

RBSMでは，ばね定数を近似的に１軸状態の応力―ひずみ関係から求めている[4]．これは，要素を剛体と仮定しているため，要素の変形をばね定数に代表させる必要があるためである．しかし，式(10)で示されたハイブリッド型の仮想仕事式には，部分領域内応力，すなわち，内力による仕事が考慮されているため，RBSMのような，要素の変形を考慮するためのばね定数を用いる必要はない．むしろ，近似的に部分領域境界面上で変位の連続性を確保するため，極めて堅いばねを設ける必要がある．そこで，式(13)におけるばね定数を，ペナルティと考え，

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p} \tag{14}$$

とする．ここで，$\boldsymbol{p}$はペナルティ行列である．

式(13)で用いられている部分領域境界面上の相対変位は，次のように求められる．

$$\boldsymbol{\delta}_{<ab>}=\boldsymbol{R}^{(a)}_{<ab>}\boldsymbol{u}^{(a)}_{<ab>}+\boldsymbol{R}^{(b)}_{<ab>}\boldsymbol{u}^{(b)}_{<ab>}=\sum_{l=1}^{2}\boldsymbol{R}^{(l)}_{<ab>}\boldsymbol{u}^{(l)}_{<ab>} \tag{15}$$

式(20)において，$\boldsymbol{R}^{(a)}_{<ab>}$，$\boldsymbol{R}^{(b)}_{<ab>}$は，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$に対するそれぞれの部分領域境界から見た座標変換行列であり，以下の関係にある．

$$\boldsymbol{R}^{(a)}_{<ab>}=-\boldsymbol{R}^{(b)}_{<ab>} \tag{16}$$

4.　離散化方程式の誘導

離散化方程式は，式(10)に対して，式(12)で示す線形変位場の関係を代入することによって得られる．ただし，仮想変位$\delta\boldsymbol{u}$は，次のように表されるものとする．

$$\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}_d\delta\boldsymbol{d}+\boldsymbol{N}_\varepsilon\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{17}$$

離散化方程式の誘導に先立ち，式(12)(17)を次のように整理する．

$$\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{U}^{(e)}\ ,\ \delta\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{N}^{(e)}\delta\boldsymbol{U}^{(e)} \tag{18}$$

ここで，それぞれの係数は以下のとおりである．

$$\boldsymbol{U}^{(e)}=\lfloor\boldsymbol{d}^{(e)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\rfloor^t\ ,\ \delta\boldsymbol{U}^{(e)}=\lfloor\delta\boldsymbol{d}^{(e)},\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\rfloor^t$$

$$\boldsymbol{N}^{(e)}=\lfloor\boldsymbol{N}^{(e)}_d,\boldsymbol{N}^{(e)}_\varepsilon\rfloor$$

これより，以下の関係が得られる．

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{U}^{(e)}=\boldsymbol{B}^{(e)}\boldsymbol{U}^{(e)} \tag{19}$$

以上の関係と式(2)(3)の関係を用いると，式(10)における左辺第１項は次のように表すことができる．

$$\int_{\Omega^{(e)}}[\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}d\Omega=(\delta\boldsymbol{U}^{(e)})^t\int_{\Omega^{(e)}}(\boldsymbol{B}^{(e)})^t\boldsymbol{D}^{(e)}\boldsymbol{B}^{(e)}\,d\Omega\,\boldsymbol{U}^{(e)} \tag{20}$$

いま，全部分領域における自由度を並べた１次元配列を$\boldsymbol{U}$とすると，部分領域$\Omega^{(e)}$に関する自由度$\boldsymbol{U}^{(e)}$は，以下

のように関係付けられる．

$$U^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} U \tag{21}$$

ここで，$\mathcal{A}^{(e)}$は，全部分領域における自由度と着目部分領域における自由度を関係付ける行列である．同様にして，仮想変位についても，

$$\delta U^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta U \tag{22}$$

とすると，式(20)は次のように整理することができる．

$$\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t DLu d\Omega = \delta U^t K^{(e)} U \tag{23}$$

ここで，$K^{(e)}$は以下のとおりである．

$$K^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t D^{(e)} B^{(e)} \, d\Omega \, \mathcal{A}^{(e)} \tag{24}$$

また，式(10)の左辺第２項および第３項は，についても同様に以下のように表すことができる．

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t \overline{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t \overline{T} \, d\Gamma = \delta U^t P^{(e)} \tag{25}$$

ここで，$P^{(e)}$は以下の関係にある．

$$P^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t \overline{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (N^{(e)})^t \overline{T} \, d\Gamma \right) \tag{26}$$

最後に，式(10)の左辺第４項の離散化を行うにあたり，式(9)で示した付帯条件を部分領域境界面に沿った局所座標系の成分に変換する．

$$R_{<ab>} u^{(a)}_{<ab>} = R_{<ab>} u^{(b)}_{<ab>} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \tag{27}$$

ここで，$R_{<ab>}$は全体座標系から局所座標系への座標変換行列で，式(16)との間に次の関係がある．

$$R_{<ab>} = -R^{(a)}_{<ab>} = R^{(b)}_{<ab>} \tag{28}$$

このとき，式(9)は次のように書くことができる．

$$H_{ab} = -\sum_{l=1}^{2} \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda^t_{<ab>} R^{(l)}_{<ab>} u^{(l)}_{<ab>} \, d\Gamma \tag{29}$$

式(29)において，式(15)の関係を用い，さらに，式(13)の関係を代入すると以下のようになる．

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta^t_{<ab>} \cdot k \cdot \delta_{<ab>} \, d\Gamma \tag{30}$$

いま，相対変位$\delta_{<ab>}$を次のように表す．

$$\delta_{<ab>} = B_{<ab>} U_{<ab>} \tag{31}$$

ここで，$B_{<ab>}$，$U_{<ab>}$は，以下の通りである．

$$B_{<ab>} = \lfloor R^{(a)}_{<ab>} N^{(a)} \, , \, R^{(b)}_{<ab>} N^{(b)} \rfloor \tag{32}$$

$$U_{<ab>} = \lfloor U^{(a)} \, , \, U^{(b)} \rfloor^t \tag{33}$$

ただし，上付の(a)，(b)は，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$に関する量を表している．これらの関係を用いると，式(30)は次のように表すことができる．

$$H_{ab} = -\delta U^t_{<ab>} \int_{\Gamma_{<ab>}} B^t_{<ab>} k B_{<ab>} \, d\Gamma \, U_{<ab>} \tag{34}$$

いま，式(21)と同様に，部分領域境界面$\Gamma_{<ab>}$に関する自由度$U_{<ab>}$，ならびに仮想変位$\delta U_{<ab>}$は，以下のように関係付けられる．

$$U_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} U \tag{35}$$

$$\delta U_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} \delta U \tag{36}$$

ここで，$\mathcal{M}_{<ab>}$は，全部分領域における自由度と着目境界面に関係する自由度を関係付ける行列である．

これらの関係を用いると，式(34)は次のように書くことができる．

$$H_{ab} = -\delta U^t K_{<ab>} U \tag{37}$$

ここで，$K_{<ab>}$は以下のとおりである．

$$K_{<ab>} = \mathcal{M}^t_{<ab>} \int_{\Gamma_{<ab>}} B^t_{<ab>} k B_{<ab>} \, d\Gamma \, \mathcal{M}_{<ab>} \tag{38}$$

以上より，式(13)は以下のように表すことができる．

$$\delta U^t \left(\sum_{e=1}^{M} K^{(e)} + \sum_{s=1}^{N} K_{<s>} \right) U - \delta U^t \left(\sum_{e=1}^{M} P^{(e)} \right) = 0 \tag{39}$$

ここで，仮想変位δUは任意であるため，最終的に以下の離散化方程式が得られる．

$$KU=P \tag{40}$$

ただし，KおよびPは以下のとおりである．

$$K = \sum_{e=1}^{M} K^{(e)} + \sum_{s=1}^{N} K_{<s>} \tag{41}$$

$$P = \sum_{e=1}^{M} P^{(e)} \tag{42}$$

このように，本モデルの離散化方程式は，式(40)に示す連立１次方程式に帰着し，左辺の係数行列Kは，各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる．

ここで，付帯条件から求められる係数行列$K_{<s>}$の非積分項に含まれる$B_{<s>}$は座標の関数となっているため，部分領域の境界に沿った積分を実行しなければならない．線形変位場の場合，容易に解析解を求められるが，本論文では，高次の変位場に対しても対応できるよう，一般性を考慮し，３積分点による数値積分を利用する．

一方，部分領域境界面上の表面力は，FEMでよく用いられている１積分点で表面力を評価した．

5．引張破壊を考慮した非線形解析法

本論文では，式(13)に導入したペナルティにすべりや引張破壊などの条件を考慮して，進行型破壊の解析を行う．この場合，表面力を取り扱うことになるため，構成則や非線形解析法の考え方は，RBSMの場合とほとんど変わらない[4]．

いま，境界面上の降伏関数を次のように表す．

$$f(\lambda) = 0 \tag{43}$$

ここで，λは表面力である．

一方，塑性ポテンシャルQについても同様に

$$Q(\lambda) = 0 \tag{44}$$

とする．一般的な塑性流れ則は応力とひずみの関係で表されているが，本論文では，ひずみの代わりに相対変位δを用いている．そこで，塑性化後の相対変位の増分

$\Delta\delta^p$を以下のように考える．

$$\Delta\delta^p = \mu\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \tag{45}$$

ここで，Δは増分量であることを，また，上付のpは塑性状態の量を示している．塑性化する前の量を上付のeで表せば，全相対変位$\Delta\boldsymbol{\delta}$は以下のようになる．

$$\Delta\boldsymbol{\delta}^e = \Delta\boldsymbol{\delta} - \Delta\boldsymbol{\delta}^p \tag{46}$$

一方，塑性化前の表面力と相対変位の関係，式(13)を改めて以下のように書いておく．

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{k}^e \cdot \boldsymbol{\delta}^e \tag{47}$$

式(47)は，式(45)(46)の関係を用いて次のように表せる．

$$\Delta\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{k}^e\left(\Delta\boldsymbol{\delta} - \mu\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right) \tag{48}$$

さらに，塑性条件

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\Delta\boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{49}$$

に代入し，μについて解いた後，式(49)を整理すれば，塑性化後の増分表面力と増分相対変位の関係が以下のように得られる．

$$\Delta\boldsymbol{\lambda} = \left(\boldsymbol{k}^e - \frac{\boldsymbol{k}^e\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{k}^e}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{k}^e\dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\lambda}}}\right)\Delta\boldsymbol{\delta} \tag{50}$$

上式において，$f \equiv Q$であれば，関連流れ則に従うことになる．

一方，引張破壊については，引張表面力が許容引張力を越えた時点で，その境界面が保持していた表面力を解放し，以後，ペナルティを0として表面力の伝達が行われないようにする．表面力の解放を，クラック幅に応じて順次行うこともできるが[5]，本論文では，単純に全解放とした．

FEMの非線形解析法として，荷重増分法における$r_{\min}$法[6]がある．この方法は，引張破壊などのように，応力解放の伴う破壊の場合，その解放力によってさらに破壊が進展し，計算が収束しにくくなるという問題点がある．本論文では，この方法を応力解放が伴う問題に対しても適用できるように拡張し，HPMの非線形解析に適用する．

いま，降伏関数をf，現在の表面力を$\boldsymbol{\lambda}$，増分表面力を$\Delta\boldsymbol{\lambda}$とするとき，次式を満たすような$r$が存在する．

$$f(\boldsymbol{\lambda} + r \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda}) \leq 0 \tag{51}$$

このrを荷重増分率と呼ぶ．このrを，考えている様々な破壊条件に基づき，全ての表面力に対して求める．本論文では，せん断破壊，引張破壊および引張破壊後の再接触について，この荷重増分率を求める．

このようにして求めた増分率のうち，最小のものを今回の荷重増分率とする．このとき，現在の値と増分後の値を，それぞれ，nとn+1を付けて表すと，

$$\boldsymbol{\lambda}^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}^n + r \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda} \tag{52}$$

として増分後の値を求めることができる．変位や要素内応力についても式(52)と同様にして求める．この結果，増分後の表面力は，降伏曲面を越えることはなく，降伏曲面上もしくはその内側に必ずあることになる．

非線形解析にあたり，荷重$\boldsymbol{P}$を幾つかの荷重$\Delta\boldsymbol{P}$に分割する．この荷重$\Delta\boldsymbol{P}$を作用させ，$r_{\min}$法にしたがってi-1ステップ目までの荷重増分率を求め，その合計を$r_{\min}$とすると，i-1ステップ目までに作用した荷重は，$r_{\min}\Delta\boldsymbol{P}$となる．このとき，$i$ステップに載荷すべき未載荷分の荷重は次のようになる．

$$\Delta\boldsymbol{P}^{(i)} = (1 - r_{\min})\Delta\boldsymbol{P} \tag{53}$$

次に，この荷重$\Delta\boldsymbol{P}^{(i)}$を作用させて求めた荷重増分率を$r_i$とすれば，($i$+1)ステップで作用する荷重$\Delta\boldsymbol{P}^{(i+1)}$は次式によって与えられる．

$$\Delta\boldsymbol{P}^{(i+1)} = (1 - r_i)\Delta\boldsymbol{P}^{(i)} \tag{54}$$

したがって，第nステップ目に作用させる荷重は，初めに与えた荷重を$\Delta\boldsymbol{P}$として以下のようになる．

$$\Delta\boldsymbol{P}^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1}(1 - r_i)\Delta\boldsymbol{P} \quad (r_0 = 0) \tag{55}$$

いま，(k-1)ステップ目で，ある境界に引張破壊が発生した場合，その境界におけるペナルティの値を0として力の伝達を遮断し，その境界において所有していた表面力を解放力$\Delta\boldsymbol{F}^{(k-1)}$として，関連部分領域に分配する．$S$番目の境界における解放力は以下の式によって求める．

$$\boldsymbol{F}_{<s>} = -\int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{B}_{<s>}\boldsymbol{\lambda}_{<s>} d\Gamma \tag{56}$$

分配された解放力は，次式のように，次のステップに作用させる荷重に加え，次のステップにおける増分計算を行う．

$$\Delta\boldsymbol{P}^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1}(1 - r_i)\Delta\boldsymbol{P} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\prod_{i=k}^{n-1}(1 - r_i)\Delta\boldsymbol{F}^{(k-1)}\right\} \tag{57}$$

このようにして，初めに与えた荷重と解放力を全て使い切るまで繰り返し計算を行う．このとき，荷重増分率の合計r_{total}を

$$r_{total} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\prod_{i=0}^{k-1}(1 - r_i)r_k\right\} \tag{58}$$

とし，$r_{total} = 1$で収束したものと考えることができる．

以上示したように，本アルゴリズムは，解放力を与えること以外は従来の荷重増分法における$r_{\min}$法と同様なアルゴリズムとなっている．

6. 数値計算例

(1) すべり解析

すべり解析の例として，図3に示すポンチの押し込み問題の解析を行った．要素分割は図に示すとおりで，極限荷重を効率よく求めることを主眼として，比較的粗い要素で分割した．なお，実際の解析では，左右対称性を考慮し，1/2の領域で行っている．境界条件として，対称面では，水平方向固定，鉛直方向自由とした．寸法は2h=0.05m，2b=0.025mであり，このときの解析解による極限荷重は，$p_m/2c = 1.22$である．ここで，p_mは，載荷面上の単位面積あたりの極限荷重で，cはせん断強さである．材料定数は，弾性係数E=210 GN/m^2，ポアソン比，ν=0.3，せん断強さc=3 MN/m^2，内部摩擦角を0とした．ただし，

自重は無視している．また，載荷は下部載荷面を鉛直方向固定とし，上部載荷面に対して変位制御で行った．

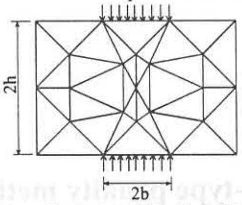

図3　ポンチの押し込み問題

図4は，本手法とRBSMによる離散化極限解析の荷重—変位曲線を示した図である．横軸は，載荷板の変位δを載荷幅で除した値，縦軸は，単位面積あたりの載荷重をせん断強さで除した値である．実線が本手法による結果，破線がRBSMによる結果で，１点破線は解析解を示している．本手法とRBSMの極限荷重は，1.23で同じ値となっている．ただし，RBSMの要素分割は図3と全く同じ分割を行っている．しかし，要素のひずみを考慮している本手法と，要素境界辺のばねに剛性を持たせたRBSMとでは，極限荷重に至る変位量は異なっている．

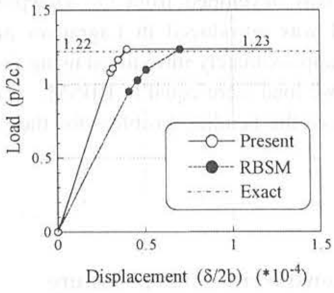

図4　荷重－変位曲線

(2) 引張破壊解析

引張破壊の解析例として図5に示す高さ200mmの無筋コンクリートばりの曲げ解析を行った．解析に用いた材料定数は，弾性係数E=27.5Gpa，ポアソン比ν=0.2，引張強度σ_t=2.9Mpaである．

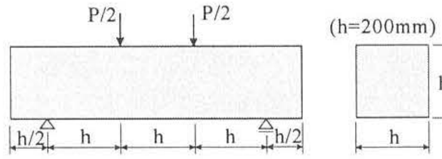

図5　無筋コンクリート梁の解析モデル

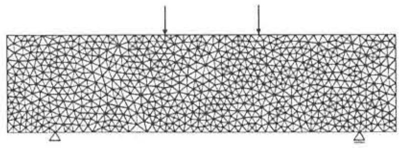

図6　領域分割

図6は，解析に用いた領域分割で，デロニー三角形を用いた．

P=30kN（弾性）における，はり下端中央部における変位は，本手法が，0.0422mm，FEMが0.0424mmで，両者による解はほぼ同じ値であった．

一方，最大耐力は，本手法が39.8kN，FEMが39.2kNで，約1.5%の相違であった．図7は本モデルによる破壊直前（P=39.6kN）の変形状況を示した図である．中央部のひび割れが卓越し，クラックの開口が生じている様子が伺える．

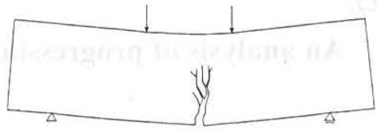

図7　破壊時近傍のおける変形状況

7. まとめ

本論文では，進行型破壊の解析を行うため，剛体回転の影響を考慮したHPMの定式化を展開し，引張破壊を考慮した非線形解析法を提案した．

はじめに，ポンチの押し込み問題に対する離散化極限解析を行ったところ，RBSMと同じ極限荷重が得られた．本論文では，領域内降伏を無視し，領域境界面上でのすべりを考慮しているため，すべり線が同じであればRBSMと同じ極限荷重が得られる．

次に，無筋コンクリートばりの引張破壊解析を行いFEMによる結果と比較した．その結果，弾性変位および崩壊荷重は，FEMに近い値が得られた．また，変位モード図より引張クラックに伴う開口などの破壊状況や破壊の進展状況の把握が可能である．

このように，本手法は，FEMの定ひずみ要素の性質と，RBSMの非線形解析の特徴を兼ね備えた解析法となっている．このため，FEMと同程度の弾性解の精度を確保しつつ，２重節点などの煩わしいアルゴリズムを用いずにRBSMと同程度の簡便さで進行型破壊の解析が可能であると考える．

本論文の解析例は，手法の精度を検証するためのものであり，今後，３次元問題を含め，様々な問題に適用して実用性を検証する必要がある．

参考文献

1)K.Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975

2)鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会編，培風館，1972

3)) T.Kawai : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977

4))竹内則雄：地盤力学における離散化極限解析，培風館，1991

5))上田眞稔，竹内則雄，樋口晴紀，鬼頭宏明，川井忠彦，引張・圧縮破壊を考慮したRC構造物の離散化極限解析，土木学会構造工学論文集，Vol.36A, pp315-323, 1990

6)Y.Yamada, N.Yoshimura and T.Sakurai : Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol.10, pp323-354, 1968

キーワード.

固体力学、材料非線形解析、ハイブリッド型ペナルティ法、引張破壊、せん断破壊

Summary.

An analysis of progressing crack by using hybrid-type penalty method

Hirohisa Ohki
Civil Engineering Major, Division of Engineering, Graduate School, Hosei University

Norio Takeuchi Morito Kusabuka
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Hosei University

Hiroshi Takeda
Department of System and Control Engineering,, Faculty of Engineering, Hosei University

In this paper, material non-linear analysis considering tensile fracture was developed from the viewpoint of hybrid displacement model. In this model, the concept of the spring of RBSM was introduced in Lagragian multiplier. In addition, compatibility of the displacement on the intersection boundary was approximately introduced using the penalty as a spring constant. As a result of the slip analysis, the slip lines and the collapse load were equal to RBSM. The equivalent tensile collapsing load with FEM was obtained when it carried out analysis of the bending problem for the plain concrete . beam.

Keywords.

Solid mechanics, Material non-linear analysis, Hybrid-type Penalty Method, tensile crack, shear failure