積分発火ニューロン回路の量子化機能について

斉藤, 利通 / 川崎, 祥史 / 鳥飼, 弘幸 / TORIKAI, Hiroyuki / KAWASAKI, Yoshinobu / SAITO, Toshimichi

(出版者 / Publisher)
法政大学計算科学研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学計算科学研究センター研究報告 / Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University
(巻 / Volume)
13
(開始ページ / Start Page)
97
(終了ページ / End Page)
102
(発行年 / Year)
2000-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00024881

積分発火ニューロン回路の量子化機能について

川崎 祥史　　鳥飼 弘幸　　斉藤 利通
法政大学工学部電気電子工学科

2 つの周期入力が印加できる積分発火ニューロン回路を考察する。同回路は入力に依存して多様な発火パルス列を出力するが、本論文では、典型的な現象を紹介する。まず、正弦波状の第１入力を印加し、その振幅を変化させると、パルス列は周期的なものからカオス的なものへ分岐していくことを示す。次に、パルス列の第 2 入力を加え、その周波数を調節すると、系の状態が量子化され、カオス的パルス列が、多様な超安定周期パルス系列の共存状態へ変化することを示す。この場合のダイナミクスは、計算機を用いて厳密に解析でき、これは、次世代の連続時間系の数値解析法に重要な示唆を与えると思われる。

1.はじめに

積分発火ニューロン回路(以後 IFC と略す)等の簡素化されたニューロンモデルは、脳の優れた機能に学んだ情報処理システム構築の基礎を固めること等を動機として、さかんに研究されている[1]-[5]。IFC の基本動作の概要は以下のようである：外部からの刺激入力によってその状態が積分され、しきい値に達すると発火して状態がベースにリセットされ、これを繰り返して発火パルス列を出力する[1]。IFC の入出力特性を調べることは、ニューロンの基本動作と機能を知る上で非常に重要であり、刺激、ベース、しきい値、いずれかの周期入力が印加された１入力系が、様々な興味ある周期的あるいは非周期的な発火パルス列を出力する事は従来から知られている[1]-[3]。これに対して我々は、複数の周期入力が印加できる場合の重要性を指摘し、その基本ダイナミクスを解析するとともに､その応用の可能性を探ってきた[4]-[6]。本論文はこのような我々の研究流れの 1 部を紹介するものである。

対象とする IFC では、ベースとしきい値に周期入力が印加できる。IFC は入力に依存して多様な発火パルス列を出力するが、本論文では、典型的な現象を紹介する。まず、正弦波状の第１入力を印加し、その振幅を変化させると、パルス列は周期的なものからカオス的なものへ分岐していく。その様子は、１次元リターンマップによって厳密に解析できる。次に、パルス列の第 2 入力を加え、その周波数を調節すると、系の状態が量子化され、カオス的パルス列が、多様な超安定周期パルス系列の共存状態へ変化することを示す。系の状態が量子化されると、リターンマップは整数値マップと同値になり、IFC の複雑で多様なダイナミクスは、計算機を用いて厳密に解析できることになる。これは、次世代の連続時間系の数値解析法に重要な示唆を与えると思われる。

最近、IFC をパルスで結合したネットワークが大きな注目を集めている[6]-[8]。従来のニューラルネットモデルでは、重要な機能が十分説明できず、所望の情報処理能力が十分発揮できなかったのは、結合法のモデリングに大きな問題があったのではないか、というのがその発端である。我々の IFC は、このようなパルス結合ネットワークの研究にも貢献していくと思われる[6]

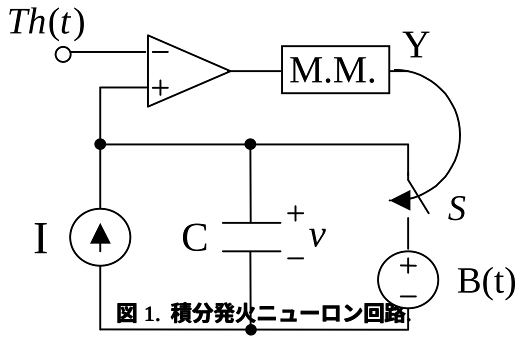


図 1. 積分発火ニューロン回路

2.積分発火ニューロン回路

積分発火ニューロン回路 (IFC)を図１に示す。この回路で、キャパシタ電圧 v はニューロンの膜電位、定電流源 I は直流刺激入力に各々対応している。まず、スイッチ S が開放された状態では、キャパシタ電圧は次式に従って積分される。

$$C\frac{d}{dt}v = I,\ \text{for}\ v(t) < Th(t) \qquad (1)$$

そして、キャパシタ電圧がしきい値 $Th(t)$ に達すると、コンパレータを経由してモノマルチバイブレータ MM がパルスを出力し、これによってスイッチが閉じられる。この瞬間に、キャパシタ電圧はベース電圧 $B(t)$ にリセットされ、これを繰り返すことによって IFC はパルス列 Y を出力する：

$$v(t^+) = B(t^+),\ \ \text{if}\ \ v(t) = Th(t)$$
$$Y(t^+) = \begin{cases} V_L, & \text{for}\ \ v(t) < Th(t), \\ V_H, & \text{if}\ \ \ v(t) = Th(t). \end{cases} \qquad (2)$$

本論文では、以下のように、ベースに正弦波入力、しきい値にパルス列入力が印加できる場合を考える。

$$B(t) = -K\sin(\frac{2\pi t}{T}),\ \ |K+A| < Th_0,$$

$$Th(t) = Th_0 + \begin{cases} -A, & \text{if } \ t = \dfrac{n}{p}T, \\ A, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

ただし、n は非負の整数、p は正の整数である。$Th(t)$ は $B(t)$ の p 倍の周波数を持ち、それらは同期している。また、キャパシタ電圧の初期値はしきい値以下にとることにする。ここで以下の変数変換により無次元化を行う。

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad x = \frac{v}{Th_0}, \quad y = \frac{Y - V_L}{V_H - V_L}, \quad k = \frac{K}{Th_0}, \quad \lambda = \frac{IT}{CTh_0}, \quad a = \frac{A}{Th_0}. \tag{3}$$

その結果、回路方程式は以下のようになる

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \lambda, & \text{for} \quad x < th(\tau), \\ x(\tau^+) = b(\tau^+), & \text{if} \quad x(\tau) = th(\tau), \end{cases}$$
$$y(\tau^+) = \begin{cases} 0, & \text{for} \quad x < th(\tau), \\ 1, & \text{if} \quad x(\tau) = th(\tau), \end{cases} \tag{4}$$
$$b(\tau) = -k\sin 2\pi\tau, \ \ |k+a| < 1,$$
$$th(\tau) = 1 + \begin{cases} -a, & \text{if} \quad \tau = \dfrac{n}{p}, \\ a, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

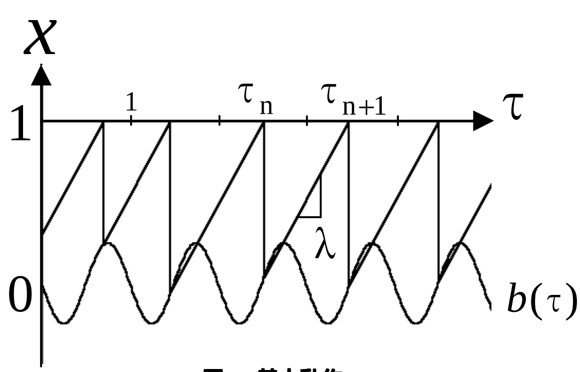


図 2. 基本動作.

3.ベース入力とリターンマップ

ここでまず図 2 の様に、しきい値入力一定の場合 $(a=0)$ の IFC の動作を考える。ここで n 回目の発火時刻を τ_n とすると $n+1$ 回目の発火時刻 τ_{n+1} は次式に示すような差分方程式で記述される。

$$\tau_{n+1} = f(\tau_n) \equiv \tau_n + \frac{k\sin(2\pi\tau)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}, \quad f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}. \tag{5}$$

また、ベース電圧 $b(\tau)$ は周期 1 の周期関数であるので、次式が成り立つ。

$$f(\tau_n + 1) = f(\tau_n) + 1.$$

よって τ_n を法を 1 として考えることができ、次のリターンマップを得る[1]。

$$\tau_{n+1} = F(\tau_n) \equiv \tau_n + \frac{k\sin(2\pi\tau)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \pmod 1, \quad F: [0,1) \to [0,1). \tag{6}$$

ここでリターンマップ F が呈するいくつかの現象の定義を導入する。

- $x_p = F(x_p)$ を満たす点 x_p を 1 周期点と呼ぶ。また F^m を F の m 回合成写像とする。$x_p = F^m(x_p)$ かつ $x_p \neq F^l(x_p)$、$1 \le l < m$ を満たす点 x_p を m 周期点と呼ぶ。
- ある m 周期点 x_p は $\left|\dfrac{dF^m(x_p)}{dx}\right| < 1$ のとき安定、$\left|\dfrac{dF^m(x_p)}{dx}\right| = 0$ のとき超安定、$\left|\dfrac{dF^m(x_p)}{dx}\right| > 1$ のとき不安定、$\left|\dfrac{dF^m(x_p)}{dx}\right| = 1$ のとき臨界的であるという。
- ある安定(不安定)周期点 x_p から出発する系列 $(x_p, F(x_p), \cdots F^{m-1}(x_p))$ を安定(不安定)周期解と呼ぶ。

図 3 にベース入力 $b(\tau)$ の振幅 k を変化させた場合のリターンマップの例を示す。図 3 より(a)の場合は発火時刻 τ_n は安定 1 周期解に収束する。(b)の場合には安定 2 周期解に収束し、更に(c)の場合には安定せずにカオス的に振る舞うことが判る。図 4 に振幅 k を変化をさせた場合の分岐図を示す。この図より振幅 k を変化させていくにつれて周期倍分岐を呈し、パルス列が周期的なものからカオス的なものに変化していくことがわかる。

---

[1] ベース入力 $b(\tau)$ を他の周期入力に変更することにより式(6)以外の様々なリターンマップを得られる。

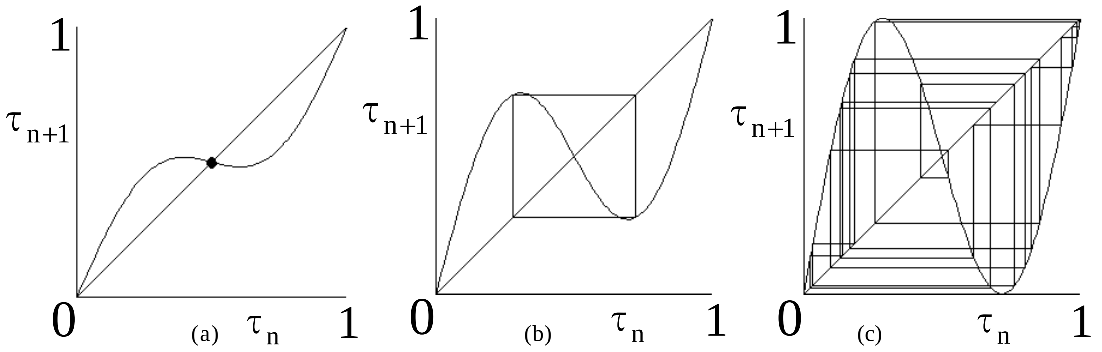


図 3. リターンマップ F の例. $\lambda=1, a=0$ (a) $k=0.2$. (b) $k=0.45$. (c) $k=0.73$.

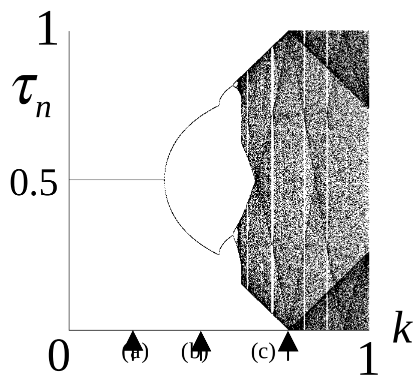


図 4. 分岐図.

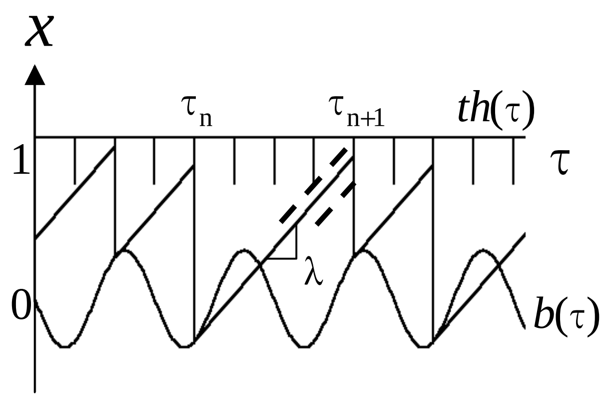


図 5. しきい値入力がある場合の動作. $p=3$.

4.しきい値入力による量子化

式(4)で $a=\dfrac{\lambda}{2p}$ とした場合のインパルス列をしきい値に入力した場合を考える。この時の基本動作を図 5 に示す。ここで $a=\dfrac{\lambda}{2p}$ であるので IFC は必ず $\tau_n=\dfrac{n}{p}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ で発火する。ここで n 回目の発火時刻 τ_n で発火した後に、状態 x が $1-\dfrac{\lambda}{2p}$ を通過する点を τ_n' とするとこれは以下の式で与えられる。

$$\tau_n' = f(\tau_n)-\frac{1}{2p}. \qquad (7)$$

また $n+1$ 回目の発火時刻 τ_{n+1} は τ_n' を用いて以下の式で与えられる。

$$\tau_{n+1}=Q(\tau_n')\equiv\frac{i}{p},\quad \text{for}\quad \frac{i-1}{p}<\tau_n'\le\frac{i}{p},\quad i=1,2,\cdots \qquad (8)$$

しかがって、発火時刻 τ_n は次の差分方程式で記述される。

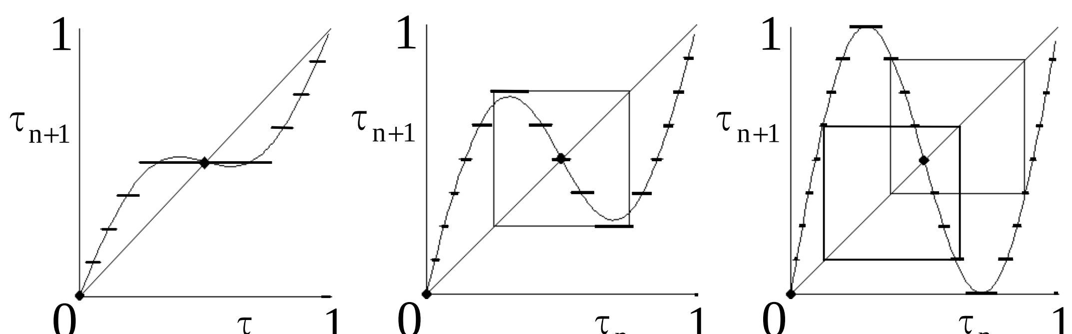
$$\tau_{n+1}=g(\tau_n)\equiv Q(f(\tau_n)-\frac{1}{2p}). \qquad (9)$$

すなわち、発火時刻 τ_n は量子化される。また、 f と同様に g についても次式が成り立つ。

$$g(\tau_n+1)=g(\tau_n)+1.$$

よって次のリターンマップを得る。

$$\tau_{n+1}=G(\tau_n)\equiv Q(f(\tau_n)-\frac{1}{2p})\quad (\text{mod}\,1), \qquad (10)$$



(a) (b) (c)

図 6. 量子化されたリターンマップ G .　$\lambda=1,\ p=8$. (a) $k=0.2$. (b) $k=0.45$. (c) $k=0.73$.

$$G:[0,1)\to\{0,\frac{1}{p},\cdots,\frac{p-1}{p}\}.$$

G は階段状の関数であり、不連続点の数はしきい値インパルスの周波数 p が高くなるほど多くなる。また G によってすべての初期値 $\tau_1\in[0,1)$ が p ケの離散値 $\tau_2\in\{0,\frac{1}{p},\cdots,\frac{p-1}{p}\}$ に写される。図 6 にしきい値にインパルス列を入力した場合の図 3 に対応したリターンマップ G の例を示す。図 3(c)では、しきい値が一定の場合は IFC はカオス的なパルス列を出力する。しきい値にインパルス列を入力することにより、図 6(c)の様にリターンマップの状態が量子化される。その結果 G は様々な超安定周期解を呈し、IFC は様々な周期パルス列を呈する。

次に,量子化リターンマップが呈する安定周期解を解析する。リターンマップ G は、初期値 τ_1 を除いて、離散値を状態にもつ。その結果、G が呈する周期解は、以下の整数値写像 G_I を用いて解析できる。

$$G_I(i)=j,\quad \text{for}\quad G(\frac{i}{p})=\frac{j}{p}, \qquad (11)$$
$$G_I:\mathbf{Z_I}\to\mathbf{Z_I},\quad \mathbf{Z_I}\equiv\{0,1,\cdots,p-1\}.$$

G_I が呈する周期解は G が呈するものと対応する。ここで、G_I が呈する周期解の解析アルゴリズムのアウトラインを以下に示す。

1. 初期値を G_I に与えて周期解が得られるまで、写像を繰り返し、通った軌道にチェックをつける。
2. チェックがされていない初期値がなくなるまで 1 を繰り返す。

表 1. 量子化リターンマップが呈する安定周期解
$(k=0.73,\lambda=1)$　パラメータは図 3(c)、図 6(c)に対応している。周期の種類の欄で大文字は周期を小文字はその周期の数を表している。

量子化状態の数 p	周期の種類	全周期解数 N	最大周期 M
6	$1_2,2_1$	3	2
8	$1_2,2_2$	4	2
19	$1_1,6_1$	2	6

詳しいアルゴリズムは文献[4]に記述されている。このアルゴリズムを用いて、全周期解数 N 、最大周期 M を計算した結果を表 1 に示す。ここでベースのパラメータは図 3(c)、図 6(c)に対応している。
図 7 にインパルス列の周波数 p を変化させていった時の全周期数 N と最大周期 M を示す。図 7 から p を変化させていくと様々な種類の安定周期パルス列が出力されることがわかる。また図 3(a)、(b)の様にベースの振幅 k が小さく、IFC の動作が安定な 1 周期解や安定な 2 周期解の場合には量子化後も図 6(a)、(b)の様に安定な 1 周期解や 2 周期解になる。この様に、ベースの振幅 k が小さい時には、p に対して周期数 N , 最大周期 M の変化は小さく、IFC はインパルス列を入力しない時とほぼ類似のパルス列を出力する。

5.むすび

ベースに正弦波信号、しきい値にインパルス列を入力した IFC の動作を考察した。しきい値が一定の場合はベース入力の振幅の大きさによって IFC は周期的、カオス的なパルス列を出力する。またしきい値にパルス信号を入力した場合はそれらのパルス列が様々な周期的パルス列に変わる事がわかった。集積化に適した簡素な回路による IFC の実装、量子化リターンマップの詳細な解析、IFC のパルスコーディング機能の考察、等が今後の課題である。

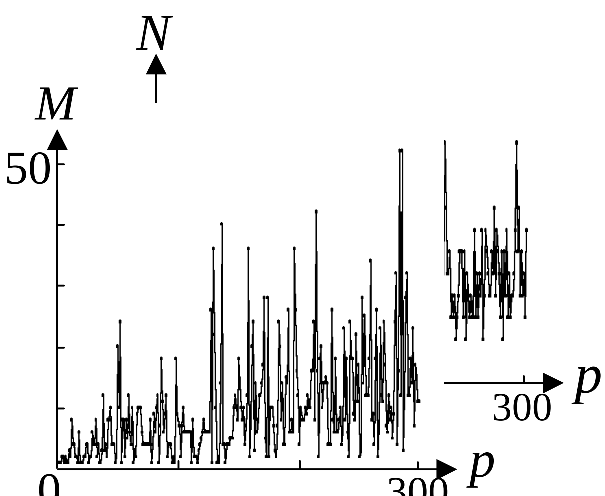


図 7. 周期解数 N **、最大周期** M **.** $(k=0.73, \lambda=1)$ パラメータは図 3(c)、図 6(c)に対応している。

参考文献

[1] J.P.Keener, F.C.Hoppensteadt & J.Rinzel "Integrate and-Fire Models of Nerve Membrane Response to Oscillatory Input," SIAM J. Appl. Math. vol.41. No.3. pp.503-517 1981

[2] L.Glass & M.C.Mackey "A Simple Model for Phase Locking of Biological Oscillators," J. Math. Biol., 7, pp.339-352. 1979

[3] M.Kistler, W.Gerstner & J.L.Hemmen "Reduction of the Hodgkin-Huxley Equations to a Single-Variable Threshold Model," Neural Computation, 9, pp.1015-1045. 1997

[4] H.Torikai & T.Saito, "Return Map Quantization from an Integerate-and-Fire Model with Two Periodic Inputs," IEICE Trans. Fundamentals, E82-A, No.7, pp.1336-1343, 1999.

[5] T.Saito & H.Torikai, "Return map modulation in nonautonomous relaxation oscillator," Controlling chaos and bifurcations in engineering systems, Chapter 27, CRC press, FL, USA, ed. G.Chen, 1999

[6] H.Torikai & T.Saito, A multiplex communication system using chaotic pulse-train with sawtooth control, Proc. of IEEE/ISCAS, Hong Kong, pp.1065-1068, 1997

[7] M.Watanabe & K.Aihara, "What Functional Connectivity Can Do," Proc. ICONIP, pp.1370-1373, 1998

[8] J.J.Hopfield & A.V.M.Herz "Rapid local synchronization of action potentials: Toward computation with coupled integrate-and-fire neurons," Proc. Natl. Acad. Sci. USA. vol.92 pp.6655-6662. 19

キーワード.

積分発火ニューロン回路、量子化、カオス、分岐、リターンマップ、整数マップ、数値解析

Summary.

Quantization function from an integrate-and-fire neuron circuit

Yoshinobu Kawasaki , Hiroyuki Torikai and Toshimichi Saito
Department of Electrical and Electronic Engineering, Hosei University

This paper considers an integrate-and-fire neuron circuit to which two periodic inputs are applicable. Depending on the inputs, the circuit can output a variety of pulse-trains, and this paper introduces some typical phenomena. First, applying the sinusoidal first input and varying its amplitude, the pulse-train bifurcates from periodic one to chaotic one. Next, adding the pulse-train second input and adjusting the frequency, the system state is quantized and the chaotic pulse-train is changed into co-existence state of a variety of super-stable periodic pulse-trains. In this case, the dynamics can be analyzed by an integer map: it might give an important suggestion for numerical analysis of continuous-time systems in the next generation.

Keywords.

Integrate-and-fire neuron model, Quantization, chaos, bifurcation, Return map, Integer map, Numerical analysis