法政大学学術機関リポジトリ

HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-01-29

ベクトル場へのウェーブレット変換の適用

石田, 則道 / ISHIDA, Norimichi / 斎藤, 兆古 / OGUCHI, Yuko / 松山, 佐和 / SAITO, Yoshifuru / 小口, 雄康 / MATSUYAMA, Sawa

(出版者 / Publisher)法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title) 法政大学計算科学研究センター研究報告 / Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University

(巻 / Volume) 12 (開始ページ / Start Page) 137 (終了ページ / End Page) 140 (発行年 / Year) 1999-03-31

(URL)

https://doi.org/10.15002/00024840

石田 則道 小口 雄康 松山 佐和 法政大学計算科学研究センター

斎藤 兆古 法政大学工学部電気電子工学科

ベクトルデータにウェーブレット変換を適用するとベクトルデータに含まれるノイズが削減されるこ とが知られている。そこで、ヘルムホルツの定理に基づき、任意のベクトルをベクトルポテンシャル (回転成分)とスカラーポテンシャル(発散成分)の和に表現する。二次元ベクトル場でのポテンシ ャルは長方システム行列となる。いわゆる不適切問題であり、その逆問題の解を最小ノルム法によっ て一意的に計算できることを述べ、最小ノルム法で得られたポテンシャルへウェーブレット変換を適 用し、ベクトルデータに含まれるノイズがどの程度軽減できるかを述べる。具体的な例として、気流 データにこの手法を適用し、その実際を検証する。

1. はじめに

近年、離散値系ウエーブレット変換は波形解析、イメ ージデータの処理[1]などに広く利用されている。また、 線形システムの解法にも応用[2]されている。さらに、ウ エーブレット変換をベクトルデータのノイズの削減に応 用された報告もある[3] [4] 。本論文では、ノイズを含む 2次元ベクトルデータをウエーブレット変換することで ノイズ成分を軽減する新しい方法を提案する。本稿で提 案する解析法は大まかに2段階からなり、第1段階はへ ルムホルツの定理と最小ノルム法を用いて、ベクトルデ ータをスカラーとベクトルポテンシャルへ分離する。第 2 段階は離散値系ウエーブレット変換のデータ圧縮機能 を利用してポテンシャルに含まれるノイズを削減する。 離散値系で与えられるベクトルデータからスカラーおよ びベクトルポテンシャルを求める問題は不適切な線形シ ステムを解くことに帰し、本稿では最小ノルムを用いて この不適切な線形システムを解く。

ヘルムホルツの定理によれば、任意のベクトル場はベ クトルポテンシャルの回転演算で得られる回転成分とス カラーポテンシャルの勾配演算で得られる発散成分の和 で与えられる。この処理結果はベクトルの回転成分がベ クトルポテンシャル、発散成分がスカラーポテンシャル で表現されることを意味する。次に、最小ノルム法で得 たれたスカラーおよびベクトポテンシャル、それぞれに 離散値系ウエーブレット変換を適用する。その結果、ベ クトルデータのノイズ成分が軽減された本質的なベクト ル成分を抽出することが可能になる。

2. ノイズ軽減への解析

2.1 ポテンシャルの評価

ヘルムホルツの定理によれば、任意のベクトル場Uは 回転成分と発散成分からなる。回転成分はベクトルVの 回転演算、発散成分はスカラーポテンシャルの勾配演 算によりそれぞれ与えられる。すなわち、次式で表され る。

$$\mathbf{U} = rot \ \mathbf{V} - grad \qquad (1)$$



具体的な例として、図1に示す2次元ベクトル場∪に ついて考察する。与えられたベクトル∪はx、y成分で あるから、求めるべきベクトルポテンシャルVはz成分 である。すなわち、回転成分は次式となる。

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{x} & \mathbf{i}_{y} & \mathbf{i}_{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & V_{z} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$
$$= \mathbf{i}_{x} \frac{\partial V_{z}}{\partial y} - \mathbf{i}_{y} \frac{\partial V_{z}}{\partial x}.$$

同様にして、ベクトルUの発散成分は(3)式となる。

$$\nabla \phi = \mathbf{i}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$
 (3)

(2)式と(3)式を加えて、(4)式を得る。

$$\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{V} - \nabla \phi$$

= $\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \mathbf{i}_x - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \mathbf{i}_y.$ (4)

(4)式の偏微分を中心差分で近似して、ベクトルの和で

表現すると、次の方程式が成り立つ。

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{v} + \mathbf{U}_{s},$$

= $D_{v}\mathbf{V} + D_{s}\Phi,$
= $(D_{v} \quad D_{s})\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\\Phi\end{bmatrix},$
= $A\mathbf{f},$ (5)

ここで、ベクトル U は回転成分 U v と発散成分 U s の 和で構成され、Dv、Ds はそれぞれ回転演算子、勾配演算 子である。A は、回転成分システム行列 Dv と発散成分シ ステム行列 Ds を要素とする長方システム行列である。 既知ベクトルからベクトルおよびスカラーポテンシャル を求める問題は、式の数よりも未知数が多い不適切な線 形を解くことに帰する。本解析法では(5)式の不適切問 題を解く方法として最小ノルム法を適用する。(5)式の 最小ノルム解は

$$\mathbf{f} = A^{\mathrm{T}} \left(A A^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \mathbf{U}.$$
 (6)

となり、ベクトルポテンシャル V とスカラーポテンシャル が得られる。具体的な例として、ノイズを含んだ回転的ベクトル場の例を示す。図2のベクトル分布へ(6) 式を適用して得られたポテンシャルの分布を図3に示す。



図2 ノイズを含むモデルベクトルの分布。



図 3 ノイズを含むベクトルから導いたベクトルポテンシャ ルとスカラーポテンシャル。

2.2 ウエーブレット変換

ウエーブレット変換行列を W_wとすれば、(5)式のベクトル V と は (7)式のように変換される。

$$V' = W_m V W_m^T,$$

$$\Phi' = W_m \Phi W_m^T,$$
(7)

ここで、V'と 'は2次元ウエーブレットスペクトラ ムベクトルである。また、上付き文字Tは転置行列を示 す。図3のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャ ルのウエーブレットスペクトラムを図4に示す。



図4 ベクトル(V')とスカラー(')ポテンシャルのウエー プレットスペクトラム。

データの圧縮はスペクトラムの特定部分のみを残し、 他のゼロとすることで行う。ここでは、図4のスペクト ラム行列の第1行ベクトルと第1列ベクトルの要素を残 し、他の要素をゼロとして圧縮した。図5は図4のそれ ぞれを圧縮したスペクトラムを示す。



図5 圧縮ウエーブレットスペクトラム。

圧縮ウエーブレットスペクトラム V"と "に対してウエ ープレット逆変換は(8)式で行われる。

$$V_{recovered} = W_m^T V'' W_m, \tag{8}$$

 $\phi_{recovered} = W_m^T \Phi'' W_m.$

図6に(8)式で得られたベクトルポテンシャル V_{recovered}と スカラーポテンシャル _{recovered}が生成するベクトル分布 を示す。



図 6 ベクトルポテンシャル($V_{recovered}$)スカラーポテンシャル ($_{recovered}$)それぞれのベクトル分布。

(4) 式により、図6のベクトルの和はノイズベクトル を削減したものとなる。図7にノイズを含まない正確な ベクトル分布とノイズを削減したベクトル分布の比較を 示す。



図7 ノイズを含まない正確なモデルベクトル分布と圧縮デ ータから再現したベクトル分布の比較。

図7の結果から、ノイズを含むベクトルに対して本論文 の方法により、大部分のノイズ成分を削減できることが 可能であることが判明した。

3.気象データへの応用

ベクトルデータの応用例として、気象データに適用する。 図8は実際に観測した風のベクトル分布(850hPaの高度、 NCEP/NCAR 再解析データ月平均、2..5°x 2..5°)とノ イズを削減した結果である。



(a) 観測(風)データ(1993年7月1/3表示)



(b) 観測データの一部分(ニュージランド近傍)



(c) (b)の再現データ

図 8 (a) 実際の観測(風)データ、(b) 観測データ(a)の一 部分、(c)(b)の再現データ。

4.まとめ

本論文では、ベクトルデータに含まれるノイズ成分を 削除する新しい方法を提案した。すなわち、与えられた ベクトルを満足するポテンシャルを求める逆問題を検討 した。ヘルムホルツの定理に基づきノイズを含む2次元 ベクトルデータからベクトルポテンシャルとスカラーポ テンシャルを得ることが可能である。そして、それぞれ のベクトル、スカラーポテンシャルに離散系ウエーブレ ット変換を適用し、離散値ウエーブレットのデータ圧縮 の効果から、ベクトルデータに含まれるノイズ成分を除 去した。具体的な例として、実際の観測(風)データに本 手法を適用した結果、ノイズ成分を削減するのに極めて 有効であった。

参考文献

[1] 斎藤兆古著: "Mathematica によるウエーブレット変換"、朝倉書店、1996年.
[2] 石田則道: "不適切な線形システムの Wavelet 変換による解析法の提案"、計算工学講演会論文集、第2巻、第2号、1997年5月.
[3] 松山佐和: "ウエーブレット解析のベクトルデータへの適用"、計算工学講演会論文集、第2巻、第2号、1997年5月.

[4] 松山佐和:"ウエーブレット解析の気象データへの応用"、計算工学講演会論文集、第2巻、第2号、1997年5月.

<u>キーワード.</u>

ウェーブレット変換、ベクトル場、ヘルムホルツの定理、ポテンシャル、不適切問題、最小ノルム法

Summary.

Application of Wavelets Transform to The Vector Fields

Norimichi Ishida Sawa Matsuyama Yuko Oguchi Computational Science Research Center, Hosei University

Yoshifuru Saito Department of Electrical Engineering, Hosei University

In order to remove the noisy vector fields from the raw measured fields, this paper proposes a novel approach based on the discrete wavelets transform. At first, the scalar and vector potentials are evaluated from the raw measured vector fields by combining the Helmhortz's theorem and minimum norm methods. Second, we apply the discrete wavelets transform to each of the scalar and vector potentials. Utilizing the data compression ability of the discrete wavelets transform, noise components included in the potentials can be dramatically reduced. Intensive simulations verify the our approach and applications to the practically measured vector fields are demonstrated.

Keywords.

Wavelets transform, Vector field, Helmhortz's theorem, Potential, Ill-posed problem, Minimum norm method