静水圧依存型材料の異方性降伏関数と材料パラメータの評価

KUSABUKA, Morito / 兼重, 剛 / 富岡, 洋一 / 伊与田, 宏幸 / 青柳, 秀明 / 草深, 守人 / 武田, 宏 / KANESHIGE, Tuyoshi / TOMIOKA, Youichi / IYODA, Hiroyuki / AOYANAGI, Hideaki / TAKEDA, Hiroshi

(出版者 / Publisher)
法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University / 法政大学計算科学研究センター研究報告

(巻 / Volume)
12

(開始ページ / Start Page)
113

(終了ページ / End Page)
123

(発行年 / Year)
1999-03-31

(URL)
https://doi.org/10.15002/00024837

静水圧依存型材料の異方性降伏関数と材料パラメータの評価

兼重　剛，　富岡　洋一，　伊与田宏幸，　青柳　秀明
法政大学工学部土木工学科

草深　守人
法政大学計算科学研究センター

武田　洋
法政大学工学部システム制御工学科

本文は静水圧に依存する異方性材料の降伏関数について考察したものである．まずはじめに，Hillの異方性降伏関数を静水圧依存型に拡張した代表的な降伏関数であるPariseauの降伏関数の力学的意味を考察することによりその適用範囲を明確にした．次に，材料主軸方向の異方性の割合が静水圧応力に依存して変化するような直交異方性材料に対して，従来の基本的な降伏関数の自然な拡張として与えられるより一般化した異方性降伏関数について考察し，新たな静水圧依存型異方性降伏関数を提案した．この降伏関数は，降伏曲面の大きさと偏差平面の形状が共に静水圧応力に依存するものである．また，この異方性降伏関数に含まれる材料パラメータをごく一般的な試験によって決定する方法が示された．最後に，異方性岩盤材料に対する試験結果と計算値の比較がなされ，提案する降伏関数が従来の降伏関数に比較して，異方性の表現性に優れていることを示した．

1．はじめに

異方性材料の材料主軸と応力の座標軸を一致させた応力空間の基底を補正することにより材料の異方性を表現した降伏関数が提案され，同時にその構成方程式と具体的な離散形式が文献[1,2]に示された．本文は，この降伏関数の力学的解釈とその適用性について考察を加えたものである．

まず，Hillの異方性降伏関数[3]を静水圧依存型に拡張した代表的降伏関数であるPariseau[4]の降伏関数の力学的意味を明らかにすることによりその適用限界を示す．次に，さまざまな異方性を示す材料に対して，従来の基本的な降伏関数の自然な拡張として与えられる静水圧依存型のより一般化した異方性降伏関数について考察した後，著者らが提案する異方性降伏関数[1,2]の再定式化を試みることによりその力学的解釈を行う．また，この異方性降伏関数に含まれる材料パラメータの実用的な決定方法についても考察する．

最後に，異方性岩盤材料を例とした試験結果と計算値の比較を行い，Pariseauの降伏関数の適用限界を明らかにすると同時に，新たに提案した降伏関数による異方性の表現性について考察する．

2．Pariseauの異方性降伏関数と材料パラメータ

PariseauやTsai-Wuの降伏関数[5]は応力に関する完全二次形式から出発して直交異方性の条件を満足し，かつ応力の二次の項が静水圧に依存しないと仮定することにより与えられた．しかしながら，これらの降伏関数に含まれる材料パラメータは，ごく一般的に利用されている材料試験のみで決定することが難しく，実用的観点から問題を残している．ここでは，異方性材料の降伏曲面を幾何学的に考察することにより，これらの降伏関数を再定式化し，その過程でより実用的な材料パラメータの評価方法を検討する．

まず，直交異方性材料の三つの材料主軸方向に一致する一軸強度をそれぞれ σ_{1u}，σ_{2u}，σ_{3u} とし，主応力軸をこの材料主軸に一致させた**図-1**を考える．三つの一軸強度によって作られる $\triangle ABC$ は，等方

性材料の場合は静水圧軸 σ_{mm} に直交する π 平面内にあるが，異方性材料では一般的に静水圧軸に直交しない．そこで，以下のような仮定を認めることとする．

任意の等しい拘束圧 p に対する三軸試験から得られる三つの材料主軸方向の強度 q_i ：

$$\sigma_i = q_i, \quad \sigma_j = \sigma_k = p \quad (i \neq j \neq k : 1, 2, 3) \qquad (1)$$

が，主応力軸と材料主軸を一致させた座標系内で作る平面を考える．このとき，異なる任意の拘束圧 p の値に対して作られる全ての平面は互いに平行であると仮定する．この仮定によれば，任意の等しい拘束圧に対する三つの強度が作る全ての三角形は，三軸試験の特別な場合である一軸試験から得られるところの $\triangle ABC$と互いに平行である．このことから，このような平面を，等方性材料に対する π 平面に対して $\breve{\pi}$ 平面と呼ぶこととする．

$\breve{\pi}$ 平面に対する単位法線ベクトル $\breve{\mathrm{n}}(\breve{n}_1,\ \breve{n}_2,\ \breve{n}_3)$ は，$\breve{\mathrm{n}}$ と3つの主応力軸 σ_1，σ_2，σ_3 とのなす角をそれぞれ θ_1，θ_2，θ_3 として次式で与えられる．

$$\breve{n}_1 = cos\theta_1, \quad \breve{n}_2 = cos\theta_2, \quad \breve{n}_3 = cos\theta_3 \qquad (2)$$

また，原点から $\breve{\pi}$ 平面までの距離 h は材料主軸方向の一軸強度を用いて次式で表される．

$$h = \sigma_{1u}\breve{n}_1 = \sigma_{2u}\breve{n}_2 = \sigma_{3u}\breve{n}_3 \qquad (3)$$

さらに，四面体$OABC$の体積Vは$\triangle ABC$，および$\triangle OBC$，$\triangle OCA$，$\triangle OAB$ の面積をそれぞれ S およびS_1，S_2，S_3 とすると次式のように表せる．

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\sigma_{1u}S_1 = \frac{1}{3}\sigma_{2u}S_2 = \frac{1}{3}\sigma_{3u}S_3 \qquad (4)$$

式(3)と式(4)から単位法線ベクトル $\breve{\mathrm{n}}$ の各成分は次式で与えられる．

$$\breve{n}_i = \frac{S_i}{S} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (5)$$

また，面積 S は次式で与えられる．

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (6)$$

ここで，a，b，c，s はそれぞれ次式で計算できる．

$$a = \overline{AB} = \sqrt{\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2}$$
$$b = \overline{BC} = \sqrt{\sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2}$$
$$c = \overline{CA} = \sqrt{\sigma_{3u}^2 + \sigma_{1u}^2}$$
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

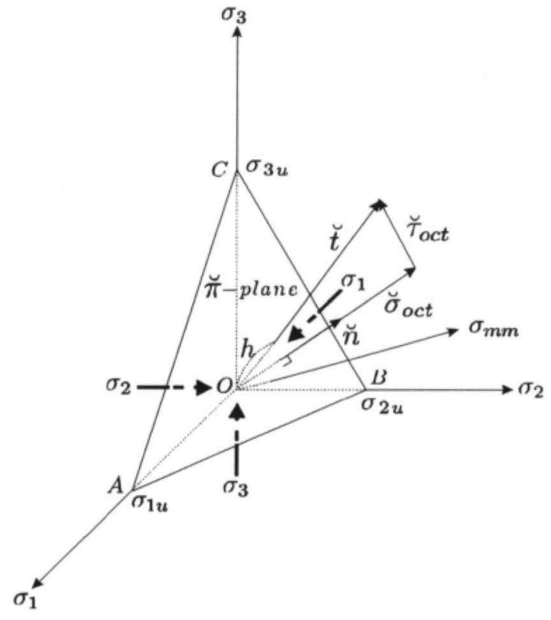

図-1 材料主軸方向の一軸強度と $\breve{\pi}$ 平面

さらに，**図-1**より面積 S_i は次式で表される．

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_{ju}\sigma_{ku} \quad (i \neq j \neq k : 1, 2, 3) \qquad (7)$$

式(7)を式(5)に代入することにより，次式の関係を得る．

$$\breve{n}_i = \frac{1}{2S}\sigma_{ju}\sigma_{ku} \quad (i \neq j \neq k : 1, 2, 3) \qquad (8)$$

次に，**図-1**に示すように，$\breve{\pi}$ 平面上での八面体せん断応力 $\breve{\tau}_{oct}$ と八面体垂直応力 $\breve{\sigma}_{oct}$[1] を，$\breve{\pi}$ 平面に作用する応力ベクトル $\breve{\mathrm{t}}$ の $\breve{\pi}$ 平面に沿った方向と，それに直交する方向に分解した大きさとして定義する．

図-1の$\triangle ABC$に作用する応力ベクトル $\breve{\mathrm{t}}$ の各成分 $\breve{t}_i$ は，四面体$OABC$に作用する応力の釣合条件から次式で与えられる．

$$\breve{t}_1 = \sigma_1\breve{n}_1, \quad \breve{t}_2 = \sigma_2\breve{n}_2, \quad \breve{t}_3 = \sigma_3\breve{n}_3 \qquad (9)$$

したがって，八面体垂直応力 $\breve{\sigma}_{oct}$ は次式のように表される．

$$\begin{aligned} \breve{\sigma}_{oct} &= \breve{t}_1\breve{n}_1 + \breve{t}_2\breve{n}_2 + \breve{t}_3\breve{n}_3 \\ &= \breve{n}_1^2\sigma_1 + \breve{n}_2^2\sigma_2 + \breve{n}_3^2\sigma_3 \qquad (10) \end{aligned}$$

[1]応力テンソルの不変量として定義される正しい意味での八面体応力とは異なるが，$\breve{\pi}$ 平面上で類似した量としてこの名称を用いる．

同様に，八面体せん断応力 $\breve{\tau}_{oct}$ は，式(9)と式(10)を用いて次式のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\breve{\tau}_{oct}^2 = \breve{t}^2 - \breve{\sigma}_{oct}^2 = \\
&\sigma_1^2\breve{n}_1^2(1-\breve{n}_1^2) + \sigma_2^2\breve{n}_2^2(1-\breve{n}_2^2) + \sigma_3^2\breve{n}_3^2(1-\breve{n}_3^2) \\
&\qquad -2(\sigma_1\sigma_2\breve{n}_1^2\breve{n}_2^2 + \sigma_2\sigma_3\breve{n}_2^2\breve{n}_3^2 + \sigma_3\sigma_1\breve{n}_3^2\breve{n}_1^2) \quad (11)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
1-\breve{n}_i^2 = \breve{n}_j^2 + \breve{n}_k^2 \quad (i \neq j \neq k : 1,2,3) \qquad (12)
$$

の関係を考慮することにより，式(11)は次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
\breve{\tau}_{oct}^2 = &\breve{n}_1^2\breve{n}_2^2(\sigma_1-\sigma_2)^2 + \breve{n}_2^2\breve{n}_3^2(\sigma_2-\sigma_3)^2 \\
&+\breve{n}_3^2\breve{n}_1^2(\sigma_3-\sigma_1)^2 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

式(10)と式(13)を用いて，異方性材料の降伏関数 $\breve{f}$ を，主応力状態に対して次のように表現することを考える．

$$
\begin{aligned}
\breve{f} = &[\breve{n}_1^2\breve{n}_2^2(\sigma_1-\sigma_2)^2 + \breve{n}_2^2\breve{n}_3^2(\sigma_2-\sigma_3)^2 \\
&+\breve{n}_3^2\breve{n}_1^2(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \\
&-(\alpha_1\breve{n}_1^2\sigma_1 + \alpha_2\breve{n}_2^2\sigma_2 + \alpha_3\breve{n}_3^2\sigma_3) - \kappa = 0 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ここで，上式の各係数を次式のように置き換える．

$$
\begin{aligned}
&\breve{n}_1^2\breve{n}_2^2 = b_1, \quad \breve{n}_2^2\breve{n}_3^2 = b_2, \quad \breve{n}_3^2\breve{n}_1^2 = b_3 \\
&\alpha\breve{n}_1^2 = a_1, \quad \alpha\breve{n}_2^2 = a_2, \quad \alpha\breve{n}_3^2 = a_3 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

上式の係数を用いた主応力状態で表現した式(14)は，せん断応力成分も加えた一般応力状態で書き換えることにより，異方性材料の降伏関数が次式のように表現できる．

$$
\begin{aligned}
\breve{f} = &[b_1(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + b_2(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 \\
&+b_3(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 \\
&+b_4(\sigma_{12})^2 + b_5(\sigma_{23})^2 + b_6(\sigma_{31})^2]^{\frac{1}{2}} \\
&-(a_1\sigma_{11} + a_2\sigma_{22} + a_3\sigma_{33}) - \kappa = 0 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

ここで，b_4，b_5，b_6 はせん断応力成分に対して新たに導入された材料パラメータである．明らかに，式(16)はPariseauの降伏関数に一致している．

上記の議論から，Pariseauの降伏関数に含まれる材料パラメータの力学的意味付けがなされた．このことから，これらの降伏関数の材料パラメータは，一軸試験および三軸試験結果を用いて以下のように決定することができる．

材料パラメータ b_1，b_2，b_3 は，三つの材料主軸方向に対する一軸強度 σ_{iu} を用いて，式(8)から計算される $\breve{n}_i$ を式(15)に代入することにより決定される．材料パラメータ a_1，a_2，a_3 は，一軸強度に対して式(13)から計算される $\breve{\tau}_{oct}(\sigma_{iu})$ を用いて，次式のように表される．

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\breve{\tau}_{oct}(\sigma_{1u}) - k}{\sigma_{1u}} \\
a_2 &= \frac{\breve{\tau}_{oct}(\sigma_{2u}) - k}{\sigma_{2u}} \qquad (17) \\
a_3 &= \frac{\breve{\tau}_{oct}(\sigma_{3u}) - k}{\sigma_{3u}}
\end{aligned}
$$

一方，すでに材料パラメータ b_1, b_2, b_3 は決定されていることから，式(17) を用いて式(16) 中の材料パラメータである a_1, a_2, a_3 を消去することにより，これらの降伏関数に含まれる未定材料パラメータは，主応力状態に対して κ のみとなる．したがって，三つの材料主軸方向の三軸試験結果が少なくとも一組以上あれば κ を決定できる．

ただし，この材料パラメータ κ は三つの材料主軸に対してそれぞれ計算されるため，これら三つの値が工学的に許容できる程度に近い値である場合に限り，その平均値として決定される．もし，その差が無視できないほどに大きい場合には，この種の降伏関数は与えられた材料の降伏関数として利用すべきではないと判断しなければならない．

材料パラメータ b_4，b_5，b_6 は，任意の二つの材料主軸によって構成される平面内で，一つの材料主軸に対して45° 傾いた方向での一軸強度を用いて決定される．なお，その誘導過程の詳細は，後に述べられる手順と全く同様であることからここでは省略し，以下に結果のみを示す．

$$
\begin{aligned}
b_4 &= [\frac{\sigma'_{(1-2)}(a_1+a_2)+2\kappa}{\sigma'_{(1-2)}}]^2 - (b_2+b_3) \\
b_5 &= [\frac{\sigma'_{(2-3)}(a_2+a_3)+2\kappa}{\sigma'_{(2-3)}}]^2 - (b_3+b_1) \qquad (18) \\
b_6 &= [\frac{\sigma'_{(3-1)}(a_3+a_1)+2\kappa}{\sigma'_{(3-1)}}]^2 - (b_1+b_2)
\end{aligned}
$$

ここで，$\sigma'_{(i-j)}$ は，任意の二つの材料主軸 i, j によって作られる平面内で，これらの軸から45°傾いた方向の一軸強度である．

3. 応力空間基底補正型の異方性降伏関数

直交異方性材料に対する Pariseau の降伏関数は，静水圧応力に依存して降伏曲面が拡大・縮小するものの，その形状は静水圧非依存であり，互いに直交する三つの材料主軸に対する異方性の割合が静水圧応力の大きさに無関係である．しかしながら，異方性材料の降伏関数としてより一般性を持たせるためには，降伏曲面の形状も静水圧応力に依存する関数を考える必要がある．

3.1 降伏関数のより一般的な表現

直交異方性材料に対する新たな降伏関数を考えるに先立って，等方性材料に対する古典的な降伏関数である von Mises と Drucker -Prager の降伏関数を含み，異方性材料に対しては Hill の降伏関数とその拡張としての Pariseau の降伏関数を表現できるより一般化された降伏関数の基本形を，次式の表現を用いて与える．

$$f = \sqrt{\{\sigma\}^T[\mathbf{B}]\{\sigma\}} - \{\mathbf{A}\}^T\{\sigma\} = k \qquad (19)$$

ここで，上式の各係数マトリックスは次のとおりである．

$$\{\mathbf{A}\} = [a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0]^T \qquad (20)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & 2c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & 2c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

式(19)は，応力の二次形式で表される直交異方性材料の降伏関数の一般形であり，左辺第一項を静水圧成分と偏差成分に分解すると次式を得る．

$$\begin{aligned} &2[c_{11}s_{11}^2 + c_{22}s_{22}^2 + c_{33}s_{33}^2 + \\ &\qquad c_{12}s_{11}s_{22} + c_{23}s_{22}s_{33} + c_{13}s_{33}s_{11}] + \\ &2p^2[c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{12} + c_{23} + c_{13}] + \\ &2p[(2c_{11} + c_{12} + c_{13})s_{11} + (2c_{22} + c_{12} + c_{23})s_{22} \\ &\qquad +(2c_{33} + c_{23} + c_{13})s_{33}] + \\ &\qquad c_{44}\sigma_{12}^2 + c_{55}\sigma_{23}^2 + c_{66}\sigma_{13}^2 \end{aligned} \qquad (22)$$

ここで，p と s_{ij} は応力 σ_{ij} の第一不変量（静水圧成分）と偏差応力を表し，次式で定義される．

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (23)$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカデルタを表し，添字には総和規約が適用されている．

式(19)の特別な場合として第一項が異方性に対して静水圧成分に依存しないようにするためには，式(22)の静水圧 p に依存する各項の係数は次式の関係を満足しなければならない[2][6,7,8]．

$$\begin{aligned} 2c_{11} + c_{12} + c_{13} = 0 \\ 2c_{22} + c_{12} + c_{23} = 0 \\ 2c_{33} + c_{23} + c_{13} = 0 \end{aligned} \qquad (24)$$

さらに，上式を満足するこれらの係数を新たに次式のように置き換えた後，式(21)に代入することによって，式(19)の一般化降伏関数は式(16)で示した Pariseau の降伏関数と一致させることができる．

$$\begin{aligned} &c_{12} = -b_1, \quad c_{23} = -b_2, \quad c_{13} = -b_3 \\ &c_{44} = b_4, \quad c_{55} = b_5, \quad c_{66} = b_6 \end{aligned} \qquad (25)$$

3.2 応力空間基底補正型降伏関数

式(22)から明らかなように，式(19)の左辺第一項には静水圧成分を含んでいる．ここでは，式(19)の特別な場合として，異方性から等方性まで統一的に表現でき，かつ等方性に対して π 平面の形状が静水圧成分に依存しないような降伏関数を考えることとし，式(22)の静水圧項を参照して係数 c_{ij} を次式のように置き換える．

$$\begin{aligned} &c_{11} = b_1^2, \quad c_{22} = b_2^2, \quad c_{33} = b_3^2 \\ &c_{12} = -b_1b_2, \quad c_{23} = -b_2b_3, \quad c_{13} = -b_3b_1 \\ &c_{44} = b_4^2, \quad c_{55} = b_5^2, \quad c_{66} = b_6^2 \end{aligned} \qquad (26)$$

$b_1 = b_2 = b_3$，および $b_4 = b_5 = b_6$ と置くことにより，明らかに式(22)は静水圧非依存となり，かつ等方性を示すことになる．一方，これらの係数のうち b_1, b_2, b_3 のいずれか一つ以上が等しくない場合，式(22)は静水圧依存の異方性を示すこととなる．

[2] このとき，p^2 の係数は自動的にゼロとなる．

次に，式(20)の係数マトリックス $\{\mathbf{A}\}$ を，任意の正の定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を用いて，

$$\{\mathbf{A}\} = [\alpha_1 b_1, \alpha_2 b_2, \alpha_3 b_3, 0, 0, 0]^T \tag{27}$$

のように置き換え，かつ $[\mathbf{B}]$ を式(26)を用いて次式のように書き換える．

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2b_1^2 & -b_1 b_2 & -b_1 b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 b_1 & 2b_2^2 & -b_2 b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 b_1 & -b_3 b_2 & 2b_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

このとき，式(19)で表される異方性降伏関数の一般形は，その特別な場合として次式のような表現を与える．

$$\begin{aligned} f = [&(b_1\sigma_{11} - b_2\sigma_{22})^2 + (b_2\sigma_{22} - b_3\sigma_{33})^2 \\ &+(b_3\sigma_{33} - b_1\sigma_{11})^2 + b_4^2\sigma_{12}^2 + b_5^2\sigma_{23}^2 + b_6^2\sigma_{31}^2]^{\frac{1}{2}} \\ &-(\alpha_1 b_1 \sigma_{11} + \alpha_2 b_2 \sigma_{22} + \alpha_3 b_3 \sigma_{33}) = k \end{aligned} \tag{29}$$

式(29)の降伏関数は，異方性の表現が応力空間の基底に現れていると見ることもできることから，これらの降伏関数を応力空間基底補正型降伏関数と呼ぶこととする．明らかにこの降伏関数は，その特別な場合として，等方性を示す材料については von Mises と Drucker-Prager の降伏関数を含んでいるが，各材料主軸方向の異方性の割合が静水圧に依存しないとする Hill あるいは Pariseau の降伏関数とは異なる．

3.3 材料パラメータの評価手法と試験

応力空間の基底を補正した降伏関数に含まれる材料パラメータの力学的意味は，すでに述べたように材料主軸方向の異方性の割合を表現したものと見なせる．このため，これらの材料パラメータもまた，これまでに述べてきた他の異方性降伏関数と同様にその比率のみが意味を持ち，その大きさそのものに意味を持たない量である．したがって，式(29)等に含まれる材料パラメータ b_i，α_i，κ は唯一定まる量として決めうるものではなく，それぞれの比のみが意味を持つ無数の組として存在する．このため，これらのパラメータの評価式を陽な形で定式化することはできない．この問題を解決する一つの手段として，一組の材料パラメータ（a_i，b_i に k を含めて計 10 個）を制約条件付きの非線形最適化法を用いて推定することとする．

最小化する目的関数 F は次式で与えた．

$$F = \sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 \tag{30}$$

ただし，F_i は次式で計算されるものとする．

$$F_i = \sqrt{\{\sigma\}^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{B}][\mathbf{T}]\{\sigma\}} - \{\mathbf{A}\}^T [\mathbf{T}]\{\sigma\} - k \tag{31}$$

ここで，n は材料試験値の総数（一組の応力 $\{\sigma\}$ を試験値とした総組数）であり，$[\mathbf{T}]$ は応力に関する座標変換マトリックスを表し，一軸および三軸圧縮試験の載荷軸が材料主軸となす方向によって定まる．ただし，この座標変換マトリックス $[\mathbf{T}]$ は，応力テンソルに関するものではなく，応力の独立な成分のみを一次元配列表示した $\{\sigma\}$ に対する変換を意味することに注意する必要があり，著者らにより文献[9]にその詳細が示されている．

式(30)の最小化問題に対する制約条件は，降伏関数の物理的意味，あるいは特別な応力状態としての一軸や純せん断状態を考えることにより与えられる．まず，式(29)において，材料主軸に一致した主応力状態を考えると，静水圧依存型の他の降伏関数と同様に，材料の降伏は主応力差の大小によって表現されている．したがって，$b_1 \sim b_3$ は降伏関数の物理的意味から負の値を取ることは考えられず，次式の制約条件を必要とする．

$$b_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{32}$$

またこのとき，材料主軸に一致する一軸応力状態に対して，式(29)から次式の関係を得る．

$$(\sqrt{2} - \alpha_i) b_i = \frac{k}{\sigma_{iu}} > 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{33}$$

上式と式(32)から，材料パラメータ $\alpha_1 \sim \alpha_3$ の制約条件が次式で与えられる．

$$0 < \alpha_i < \sqrt{2} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{34}$$

さらに，材料パラメータ $b_4 \sim b_6$ に対する制約条件は，式(29)に対する純せん断応力状態を考えることにより次式で与えられる．

$$b_i > 0 \qquad (i = 4, 5, 6) \tag{35}$$

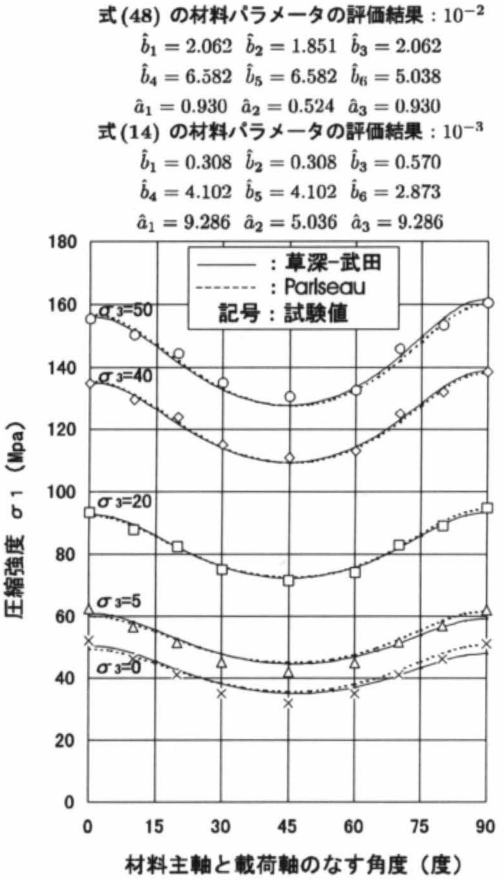

図-2 Tournemire Shaleの試験値[10]と計算値

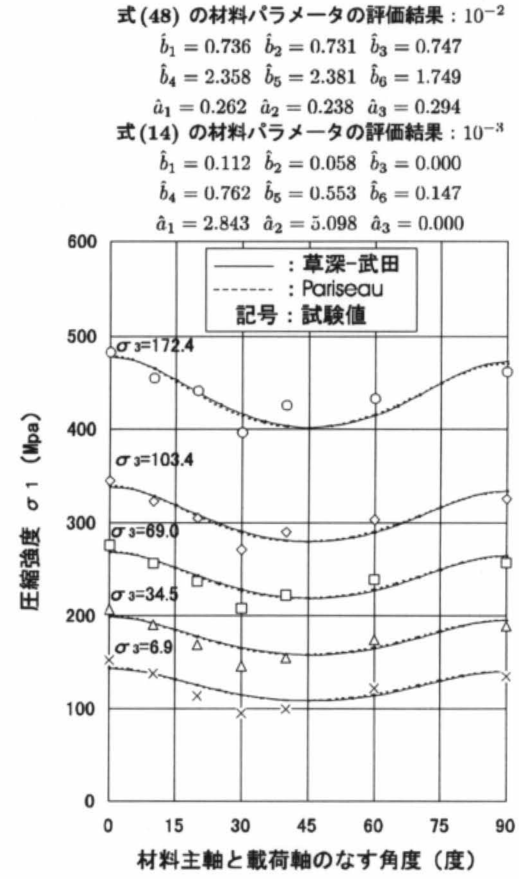

図-3 Green River Shale-2 の試験値[11]と計算値

4. 試験値と計算値の比較および考察

本章では，提案する応力空間基底補正型降伏関数が，材料パラメータの評価手法を含めて実際の材料の強度異方性をどの程度表現できるかを調べるために，岩盤材料を対象とした試験結果と計算値の比較から考察を加える．なお，以下に示す試験値は，いずれも材料主軸に対する傾き θ の間隔が粗く， 最小強度を示す方向角 $\theta_{\sigma min}$ を正確に決められない．このため， 以後これらの値を示すときには "付近" あるいは範囲を表す "$\sim$" を用いる． また，計算値のように値を確定できる場合は，等号記号あるいは変化を表す "$\rightarrow$" を用いる．

図-2～図-4は，π 平面で見た降伏関数の形状が静水圧応力にほとんど依存しない岩盤材料の試験値と計算値の比較例を示したもので，図中には，提案する異方性降伏関数と Pariseau の降伏関数による計算値を示した．

図-2は，Niandou[10] による Tournemire shaleの試験値と計算値の比較を示したものである．両降伏関数による計算値に大差はなく，いずれも試験値とよく一致している． また， 材料の第一主軸 $\theta = 0°$ と第二主軸 $\theta = 90°$ 方向の強度比 $\eta = \sigma_2/\sigma_1$ および最小強度を与える方向 $\theta_{\sigma min}$ は，試験値と計算値の両者でほぼ $\eta = 1.0$，$\theta_{\sigma min} = 46°$ 付近にあり，拘束圧に対してほぼ一定であることが分かる．このことから， Tournemire shale の π 平面形状は静水圧応力非依存に近く，Pariseau と提案する降伏関数とによる計算値がほとんど一致する理由と考えられる．

図-3は， Mclamore ら[11] による Green River shale $-$ 2 の試験結果と比較したものであり， やはり両降伏関数による計算値と試験値は比較的よく一致している．強度比の変化は $\eta = 0.9 \rightarrow 1.0$ 程度と僅かであり，試験値と計算値の両者でほとんど一致している． さらに， 最小強度を示す方向角 $\theta_{\sigma min}$

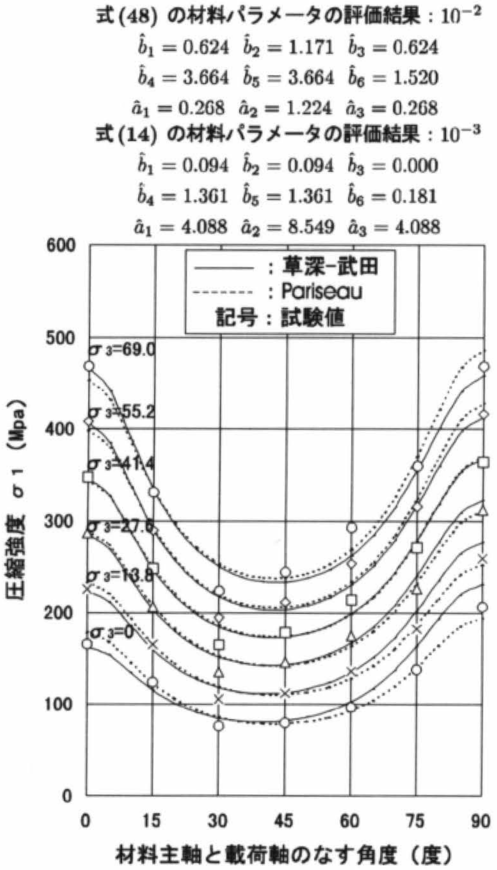

図-4 Penrhyn Slateの試験値[12]と計算値

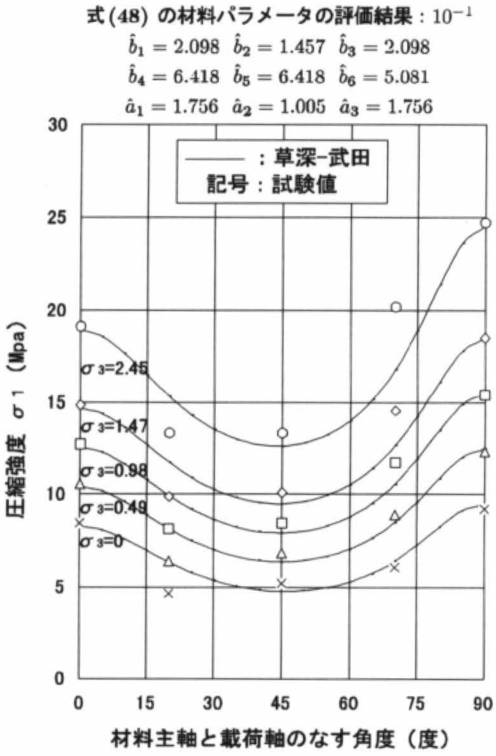

図-5 異方性セメントモルタルの試験値と計算値

は一定であるが，試験値で $\theta_{\sigma min} = 30^\circ \sim 45^\circ$，計算値で $\theta_{\sigma min} = 45^\circ$ であり，拘束圧の影響は受けないもののあまりよい一致を示さなかった．しかしながら，この頁岩についても π 平面の形状は静水圧応力非依存に近く，提案する降伏関数と Pariseau による計算値がほとんど一致する結果となった．

図-4は，Attewell ら[12]による Penrhyn slate の試験値と計算値を比較したものであり，やはり計算値は試験値と比較的よく一致しているが，降伏関数によって多少の違いを生じている．

この粘板岩の強度比と最小強度を示す方向角およびその変化は，先の二つの頁岩の例と異なり，試験値で $\eta = 1.3 \to 1.0$，$\theta_{\sigma min} = 30^\circ \sim 45^\circ$ 程度と判断されるが，提案する降伏関数による計算値では，$\eta = 1.4 \to 1.0$，$\theta_{\sigma min} = 38^\circ \to 43^\circ$ であり，拘束圧の増加に伴って変化している．このことから，降伏関数の π平面形状は静水圧応力の影響を考慮する必要があるものと判断される．

一方，Pariseau の降伏関数による計算値では，拘束圧に無関係に $\eta = 1.1$，$\theta_{\sigma min} = 43^\circ$ の一定値を示し，静水圧応力による異方性の変化を表現できない．**図-5** ～ **図-8**は，π 平面で見た降伏関数の形状が静水圧応力に依存して変化する岩盤材料の試験値と計算値の比較例を示したものである．なお，これらの例では Pariseau の降伏関数についての計算値を示していない．これは，これらの試験値に対する降伏関数の π 平面形状が静水圧応力に強く依存することから，Pariseau の降伏関数の材料パラメータを決定できなかったためである．換言すれば，Pariseau の降伏関数による異方性の表現は，**図-4** に示した程度の異方性までが限界であるように思われる．

図-5は，著者らが行った異方性セメントモルタル供試体の試験値と計算値の比較を示している．

供試体は，モルタルを層厚 5 mm 間隔で打設したブロックから所定の方向(打設面直交方向に対する傾き)でコア抜き・整形したものを使用した．な

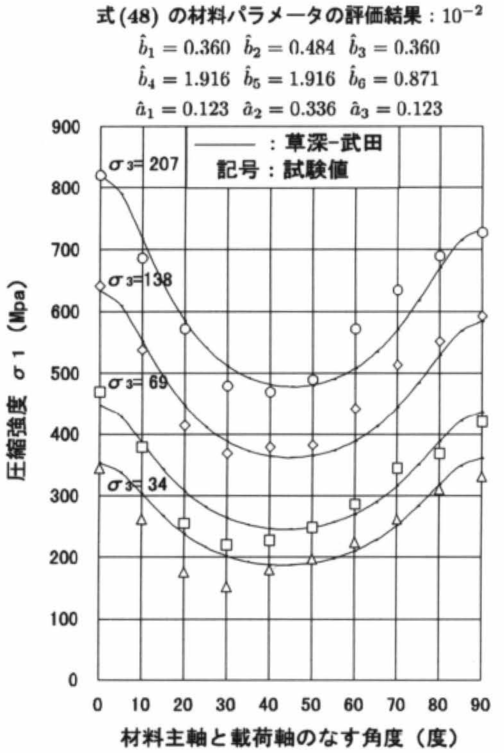

図-6 Austin slate の試験値 [11] と計算値

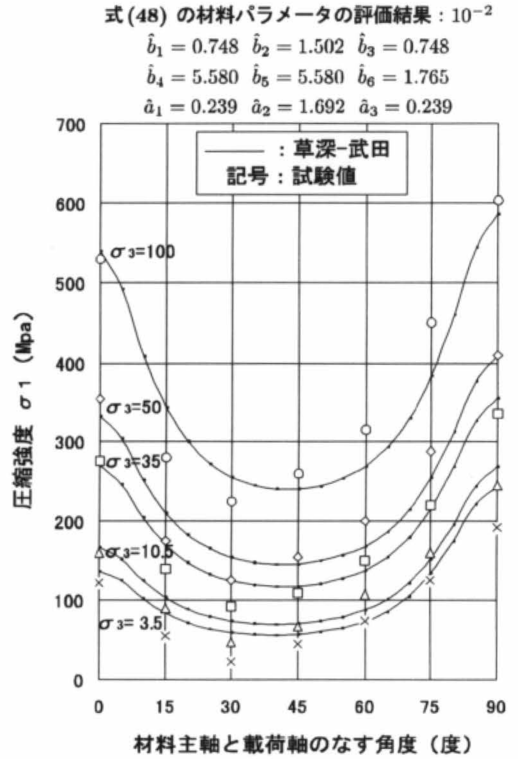

図-7 Martinsburg slateの試験値 [13] と計算値

お，供試体に異方性を持たせるために，すべてのモルタル打設境界に不連続材（千鳥状に ϕ =8 mm の円孔を開けた紙）を挟んでいる．

この異方性セメントモルタル供試体の例では，拘束圧による強度比の変化は，試験値と計算値の両者で一致しており，$\eta = 1.1 \rightarrow 1.3$ である．また，最小強度を示す方向角の試験値は $\theta_{\sigma min} = 20°$ $\sim 45°$ の範囲内で若干移動する傾向にあるが，提案する降伏関数による計算値では，$\theta_{\sigma min} = 45°$ の一定値を示した．このため，$\theta = 20°$ での試験値と計算値に有意な誤差を生じている．

図-6 は，Mclamore ら [11] による Austin slate の試験値と計算値の比較を示したものである．この岩盤材料は，**図-5** の例とは逆に，拘束圧による強度比の変化は試験値と計算値の両者で $\eta = 1.0$ $\rightarrow 0.9$ 程度と小さく，最小強度を示す方向角は，試験値では $\theta_{\sigma min} = 30°$ $\sim 40°$ の範囲に位置し，計算値では拘束圧によって $\theta_{\sigma min} = 40° \rightarrow 44°$ の移動がみられる．

図-7 は，Donath[13] による Martinsburg slate の試験値と計算値の比較を示したものである．前二例は，強度比 η と最小強度を与える方向角 $\theta_{\sigma min}$ のいずれか一方が拘束圧の影響をあまり受けない材料に対する比較を行ったものであるが，η と $\theta_{\sigma min}$ の両者が拘束圧によって大きく変化する材料に対する比較例として**図-7** を示した．

この材料の強度比は，試験値で $\eta = 1.6 \rightarrow 1.1$，計算値で $\eta = 1.8 \rightarrow 1.1$ と拘束圧により大きく影響を受ける．同時に，最小強度を示す方向角も，拘束圧によって試験値で，$\theta_{\sigma min} = 30° \sim 45°$ の範囲で移動する傾向がみられ，計算値では，拘束圧の増加に伴って，$\theta_{\sigma min} = 38° \rightarrow 43°$ の移動がみられる．これは，π 平面で表した降伏関数の形状が静水圧応力に強く依存する一つの現れであると判断される．

図-8 は，Fractured sandstone に対して，Horino ら [14] が実施した試験値と計算値の比較であり，この材料は極めて異方性が強く，試験値と計算値の差が大きい事例として示した．強度比は，拘束圧の増加に伴って試験値で $\eta = 1.3 \rightarrow 1.0$ まで変化し，計算値で $\eta = 1.6 \rightarrow 1.0$ の移動をみた．

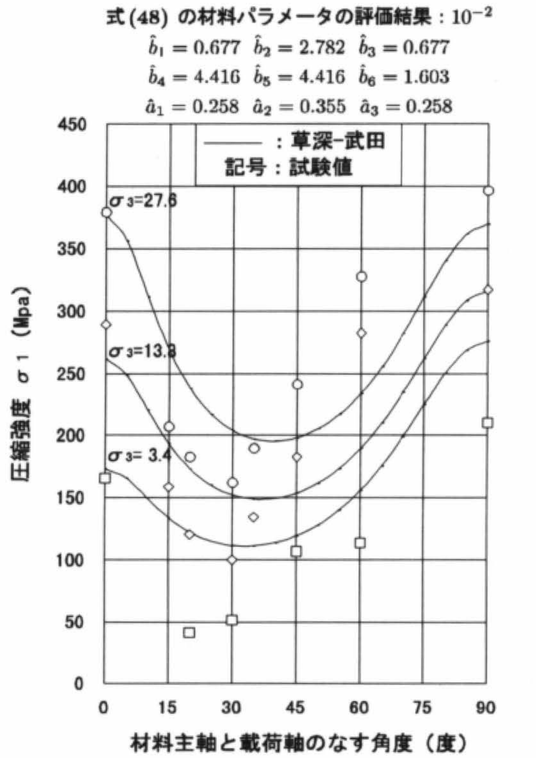

図-8 Fractured Sandstoneの試験値[14]と計算値

また，最小強度を示す方向角は，拘束圧の変化に対して，試験値で $\theta_{\sigma min} = 20° \sim 45°$ の範囲で移動する傾向がみられ，計算値では $\theta_{\sigma min} = 30° \rightarrow 39°$ の移動がみられる． これはいずれも **図-7** で取り上げた粘板岩と同程度の変化であるが，図から分かるように，他の例に比べて最小強度を与える方向がかなり低角度で， かつこの付近での強度変化が V 字型に急変している．

Ramamurthy[15] は岩盤材料の強度異方性を以下のように三つのタイプに分類している．

- Uタイプの異方性： $\theta = 90°$ で最大圧縮強度を， $\theta = 30°$ 付近で最小強度を示し，圧縮強度と載荷軸方向によって描かれる強度異方性曲線が滑らかな U字形を形成する．

- ショルダータイプの異方性： $\theta = 0°$ で最大圧縮強度を， $\theta = 15° \sim 30°$ の範囲で最小圧縮強度を示す滑らかなショルダー 形強度異方性曲線を形成する．

- うねりタイプの異方性： $\theta = 90°$ で最大圧縮強度を，$\theta = 30°$ 付近で最小強度を示し，複数の弱面によって強度異方性曲線は波打つ．

しかしながら，今回の計算例で取り上げた試験結果は，上記の分類に明確に当てはめることはできない．このため，ここでは次のような分類を試みることにした．ただし，方向の異なる複数の弱面に起因するうねりタイプは除く．

- 対称型異方性 : $\theta = 45°$付近で最小強度を示し，その左右で強度異方性曲線が対称形である．

- 非対称型異方性：強度異方性曲線が非対称形のバスタブ曲線を示し，材料主軸方向の強度が異なる．

- V字型異方性：強度異方性曲線が非対称形のV字曲線を示し，かつ材料主軸方向の強度が異なる．

図-2，**図-3** は対称形異方性に属し，この種の材料に対しては， 提案する降伏関数と Pariseau の降伏関数のいずれも適用範囲内にある．

図-4 は対称型と非対称型の中間に位置していることから判断して Pariseau の降伏関数の適用限界である．

図-5～ **図-7** は非対称型異方性に分類され，基底補正型降伏関数は適用可能であるが，Pariseau の降伏関数は適用外と思われる．

図-8 は V字型異方性に近く，基底補正型降伏関数によっても精度的に問題が残る．

5．あとがき

本文では，まず Pariseau の降伏関数を降伏曲面の幾何学的考察から再定式化することにより，この降伏関数に含まれている材料パラメータの力学的意味を明らかにし，その適用範囲を示した．Pariseau の降伏関数は，応力の二次の項が静水圧応力に依存しないことから， 降伏曲面の π 平面の形状が静水圧応力に依存するような材料に対しては適用できないという問題点を指摘した．

次に，さまざまな異方性材料に利用できる新たな降伏関数について考察し，従来の基本的な降伏関数の自然な拡張として与えられる静水圧依存型の異方性降伏関数を提案した．この降伏関数は，形式的に

は応力空間の基底，すなわち応力テンソルの独立成分に異方性に応じた係数を乗じることによって異方性を表現したものであり，降伏曲面の大きさはもちろん π 平面の形状も共に静水圧応力に依存する．

さらに，この降伏関数に含まれる材料パラメータは，異方性に関する材料主軸を含むさまざまな方向で実施されるごく一般的な一軸および三軸圧縮試験結果から最小二乗法等を利用して評価できることを示した．

最後に，一軸および三軸圧縮試験結果と計算値の比較から，新たに提案した降伏関数による異方性の表現性について考察を加えた．その結果，提案する降伏関数は，従来の降伏関数比べて異方性の表現性に優れていることを示唆した．

謝辞：

本研究での実験方法の検討や数値計算プログラムの作成の多くは，法政大学大学院工学研究科の谷岡昭寛君（現在：前田建設）および高橋寛君（現在：大林組）の両名による成果である．また，試験の実施およびデータ解析の多くは，法政大学工学部土木工学科の金山盟君（現在：竹中土木）と金田大祐君（現在：興和コンサルタンツ）の両名によるところが多い．さらに，(株) 間組技術研究所および東京電力（株）葛野川水力建設所の関係各位からは多くの示唆に富んだご意見を頂いたことを記して，深く感謝の意を表す．

参考文献

1) 草深守人，武田洋：地盤材料の異方性降伏関数と材料定数の評価，計算工学講演会論文集，第1巻，第2号，日本計算工学会，pp.849-852，1996.

2) 武田洋，草深守人：異方性を考慮した汎用的な静水圧依存型弾塑性構成方程式と数値アルゴリズム，法政大学計算センター研究報告，第9巻，pp.67-72，1996.

3) Hill, R.:The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.

4) Pariseau, W.C.:Plasticity Theory for Anisotropic Rocks and Solids, Proceedings of the Tenth Symposium of Rock Mechanics, Chapter 10, University of Texas, Austin, 1968.

5) Ralston, T.D.:Yield and Plastic Deformation in Ice Crushing Failure, (Preprint), ICSI/AIDJEX Symposium on Sea Ice-Processes and Models, Seattle, Washington, 1977.

6) Chen, W.F. and Saleeb:Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol.1, Vol.2, Elsevier, 1994.

7) Chen, W.F. and Han, D.J.:Plasticity for Structural Engineers, Springer-Verlag, New York, 1988.

8) 山田嘉昭：塑性力学，日刊工業新聞社，pp.55-59, 1968.

9) 武田 洋，草深守人：異方性構成方程式の座標変換に関する統一的展開，第3回 日本計算工学会講演会論文集，1998.

10) Cristescu, N.D. and Hunsche, U.:Time Effects in Rock Mechanics, John Wiley & Sons, p.178, 1988.

11) Mclamore, R. and Gray, K.E.:The Mechanical Behavior of Anisotropic Sedimentary Rocks, Trans. of the Amer. Soc. Mech. Engrs., Feb., pp.62-76, 1967.

12) Attewell, P.B. and Sandford, M.R.:Intrinsic Shear Strength of a Brittle Anisotropic Rock-1, Experimental and Mechanical Interpretation, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 11, Pergamon Press, pp.423-430, 1974.

13) Donath, F.A.:Strength Variation and Deformational Behavior in Anisotropic Rock, State of Stress in the Earth's Crust, W.R.Judd, ed., Elsevier, New York, pp.281-297, 1964.

14) Horino, F.G. and Ellickson, M.L.:A Method of Estimating Strength of Rock Containing Planes of Weakness, U.S. Bureau of Mines Report of Investigations 7449, 1970.

15) Ramamurthy, T.:Strength and Modulus Responses of Anisotropic Rocks, Comprehensive Rock Engineering, Vol.1, Fundamentals, Pergamon Press, Oxford, pp.313-329, 1993.

キーワード.

塑性，異方性降伏関数，材料パラメータ，非線形計画法，材料試験，岩盤

....

Summary.

Anisotropic Yield Function for Hydrostatic-Pressure-Dependent Materials and Evaluation Method of Material Parameters

Tuyoshi Kaneshige Youichi Tomioka Hiroyuki Iyoda Hideaki Aoyanagi
Department of Civil Engineering, Hosei University
Morito Kusabuka
Computational Science Research Center, Hosei University
Hiroshi Takeda
Department of System and Control Engineering, Hosei University

A new anisotropic yield function was proposed for the hydrostatic stress dependent materials. This function consists of an idea that each independent components of a stress tensor is multiplied by the arbitrary coefficient corresponding to each anisotropic principal axis. Both of a meridian of this yield surface and a shape of the deviatoric stress plane are dependent upon hydrostatic pressure. It was shown that a number of classical yield functions are derived from the proposed yield function as special cases.

The material parameters included in the proposed yield function ware evaluated by using a nonlinear optimization programming method with certain constraint conditions. This method can evaluate the material parameters only by conventional uniaxial and triaxial compression tests, and do not require any difficult tests as simple shear tests or uniaxial tention tests for rock like materials.

To prove the usefulness of the proposed yield function and material parameter evaluation method, the numerical analysis results for various anisotropic rock materials were compared with the experimental results. The conclusions are as follows;

- the numerical results of yield strength have good agreement to the experimental results for various anisotropic rock materials,
- the minimum yield stress occurs at an orientation angle within 30 and 45 degree to a principal axis of anisotropy,
- an orientation angle that the minimum yield stress occurs increases according to hydrostatic pressure,
- the ratio of anisotropy decreases acoording to hydrostatic pressure.

By this results, it was shown that the proposed yield function has good expression for the mechanical characteristics of anisotropic materials.

Keywords.

Plasticity, anisotropic yield function, material parameter, nonlinear optimization programming, Rock