

### 成層構造の周波数特性を安定して計算する方法

小口, 雄康 / OGUCHI, Yuko / 秋山, 喬二 / AKIYAMA, Kyoji

---

(出版者 / Publisher)

法政大学計算科学研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University / 法政大学計算科学研究センター研究報告

(巻 / Volume)

11

(開始ページ / Start Page)

47

(終了ページ / End Page)

55

(発行年 / Year)

1998-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00024810>

# 成層構造の周波数特性を安定して計算する一方法

秋山 喬二  
法政大学工学部システム制御工学科

小口 雄康  
法政大学計算センター

成層構造の周波数特性の計算方法には、斎藤の積分法、Haskell のマトリックス法など、よく知られた多くの研究があるが必ずしも安定した計算結果を与えるとは限らない。Kennett らの理論地震記象の計算法は安定した計算結果を与えるよう工夫されている。この方法をわれわれの目的に応用して、複素数計算なしでパーソナルコンピュータでも容易に計算できるプログラムを開発した。  
この方法を、複雑な層構造に適用した結果、高周波領域においても安定した計算ができることがわかった。

## 1. はじめに

この報告は、成層構造の周波数特性を安定して計算する方法の1つを提案するものである。このような問題に関しては、斎藤の積分法が安定した結果を与える。一方、Haskell のマトリックス法はよく知られていて、多くの研究があるが必ずしも安定した計算結果を与えるとは限らない。ただ、この中で Kennett らの理論地震記象の計算法は安定した計算結果を与えるよう工夫されている。  
今回、この方法をわれわれの目的に応用して、複素数計算なしでパーソナルコンピュータでも容易に計算できるプログラムを開発した。以下にそのアルゴリズムと計算例を報告する。

## 2. 基本式

Fig. 1 に示すような、等方、均質媒質からなる2次元水平成層構造を考える。直角座標  $(x, y, z)$  をとり、自由表面に沿って  $x$  軸、鉛直下方に  $z$  軸をとる。層、境界面には Fig. 1 のように番号をつける。

成層構造の周波数特性を "ある振動数で単振動する単位大きさの変位振幅をもつ平面波が、この層の下方からある入射角で入射したときの表面の変位を振動数の関数としてみたもの" と定義する。したがって、ここでいう周波数特性は層構造で一義的に定まるものではなく、入射波の種類と入射角で異なる。

本報では計算の比較の意味もあり、

1. P, SV 波の斜め入射
2. SH 波の斜め入射
3. 減衰のある媒質への SH 波の垂直入射の各場合に分けて考察する。

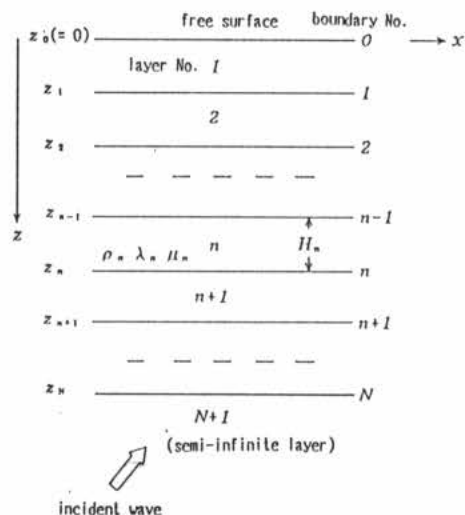


Fig. 1. Layer structure

### 2.1 P, SV 波の斜め入射

2.1.1 運動方程式とその解. 媒質の密度を  $\rho$ , ラーメの定数を  $\lambda, \mu$  とし、変位ポテンシャルを  $\phi, \psi$  とする。後で、層番号を添字にして物理量を区別する。

運動方程式は (1) で表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = P^2 \nabla^2 \phi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S^2 \nabla^2 \psi \quad (1)$$

$$(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

$$P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \text{ (P 波速度)}, \quad S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \text{ (S 波速度)}$$

平面波型の解は  $e^{i(fx-\omega t)}$  に比例するとし、これを省略して (2), (3) で与えられる。

$$\phi = \phi^U + \phi^D, \quad \psi = \psi^U + \psi^D \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi^U &= \frac{P}{i\omega} a^U e^{-i\omega\alpha(z-z_H)} \\ \phi^D &= \frac{P}{i\omega} a^D e^{i\omega\alpha(z-z_H)} \\ \psi^U &= \frac{S}{i\omega} b^U e^{-i\omega\beta(z-z_H)} \\ \psi^D &= \frac{S}{i\omega} b^D e^{i\omega\beta(z-z_H)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、添字  $U, D$  は、それぞれ、上方、下方へ伝播する波を意味する。  
また、波線パラメータを  $p (= f/\omega)$  とし、

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{P^2} - p^2} \quad (\Im(\alpha) \geq 0)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{S^2} - p^2} \quad (\Im(\beta) \geq 0)$$

である。

変位 ( $u, w$ ), 応力 ( $\tau_{xx}, \tau_{xz}$ ) は (4) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \mu \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{xz} &= \lambda \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - 2\mu \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、変位ポテンシャルの係数  $a^U, b^U$  を 1 にすると、変位振幅の大きさが単位大きさになるように、(3) の係数を与えてある。また、 $z_H$  は計算に便利のように適宜境界面の値にとる。(2), (4) から、ある深さ  $z$  での変位、応力は、変位ポテンシャルの線形変換で表され、したがって、変位振幅の線形変換で表される。これを (5) にまとめる。

$$B = SEA \quad (5)$$

$$B = \begin{pmatrix} u \\ \tau \end{pmatrix}$$

$$u = (u \ w)^T, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ i\omega & i\omega \end{pmatrix}^T$$

$$S = sV$$

$$s = \begin{pmatrix} p & -\beta & p & \beta \\ -\alpha & -p & \alpha & -p \\ -2\mu p\alpha & \mu\zeta & 2\mu p\alpha & \mu\zeta \\ \mu\zeta & 2\mu p\beta & \mu\zeta & -2\mu p\beta \end{pmatrix}$$

$$\zeta = \frac{1}{S^2} - 2p^2$$

$$V = \text{diag}(P \ S \ P \ S)$$

$$E = \text{diag}(E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ E_{44})$$

$$E_{11} = e^{-i\omega\alpha(z-z_H)}$$

$$E_{22} = e^{-i\omega\beta(z-z_H)}$$

$$E_{33} = e^{i\omega\alpha(z-z_H)}$$

$$E_{44} = e^{i\omega\beta(z-z_H)}$$

$$A = \begin{pmatrix} A^U \\ A^D \end{pmatrix}$$

$$A^U = (a^U \ b^U)^T, \quad A^D = (a^D \ b^D)^T$$

ここで、 $^T, \text{diag}$  はそれぞれ、転置マトリックス、対角マトリックスを意味する。

2.1.2 周波数特性. 定義により、最下層(半無限層)の最上部の第  $N$  境界面直下へ平面波が入射したときの表面の変位を求める。入射角を  $\theta$  とすると、

$$p = \begin{cases} \frac{\sin\theta}{P_{N+1}} & (\text{P 波入射の場合}) \\ \frac{\sin\theta}{S_{N+1}} & (\text{S 波入射の場合}) \end{cases}$$

となり、各層共通の定数である。

まず、1つの層の上下での変位振幅の関係を求める。第  $n$  境界面直下と第  $n-1$  境界面直下との変位振幅の関係は、第  $n$  境界面での変位、応力連続と、第  $n$  層内の位相変化を考え、(5) を参照し (6) で表される。

$$\begin{pmatrix} A_n^U \\ A_n^D \end{pmatrix} = \Gamma^{(n)} \begin{pmatrix} A_{n+1}^U \\ A_{n+1}^D \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\Gamma^{(n)} = E_n \gamma^{(n)} \quad (7)$$

ここで、 $E_n$  は第  $n$  層内での位相変化を与え、 $\gamma^{(n)}$  は第  $n$  境界面における透過、反射係数に関する。(7) を具体的に書くと、

$$E_n = \text{diag}(E_{n11} \ E_{n22} \ E_{n33} \ E_{n44}) \quad (8)$$

$$E_{n11} = e^{i\omega\alpha_n H_n}$$

$$E_{n22} = e^{i\omega\beta_n H_n}$$

$$E_{n33} = e^{-i\omega\alpha_n H_n}$$

$$E_{n44} = e^{-i\omega\beta_n H_n}$$

$$\gamma^{(n)} (= s_n^{-1} s_{n+1}) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(n)} & \gamma_{12}^{(n)} \\ \gamma_{21}^{(n)} & \gamma_{22}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\gamma_{11}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{12}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{23} & \gamma_{24} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{21}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{13} & -\gamma_{14} \\ -\gamma_{23} & \gamma_{24} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{22}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2} \frac{P_{n+1}}{P_n} \left[ (2p^2 d_n + \xi_n) + (1 - 2p^2 d_n) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right]$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2} \frac{S_{n+1}}{P_n} p \left[ (1 - 2d_n p^2 - \xi_n) \frac{1}{\alpha_n} - 2d_n \beta_{n+1} \right]$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2} \frac{P_{n+1}}{S_n} p \left[ 2d_n \alpha_{n+1} + (2d_n p^2 - 1 + \xi_n) \frac{1}{\beta_n} \right]$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{22} &= \frac{1}{2} \frac{S_{n+1}}{S_n} \left[ (2p^2 d_n + \xi_n) + (1 - 2p^2 d_n) \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \right] \\
\gamma_{13} &= \frac{1}{2} \frac{P_{n+1}}{P_n} \left[ (2p^2 d_n + \xi_n) + (2p^2 d_n - 1) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right] \\
\gamma_{14} &= \frac{1}{2} \frac{S_{n+1}}{P_n} p \left[ 2d_n \beta_{n+1} + (1 - \xi_n - 2d_n p^2) \frac{1}{\alpha_n} \right] \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{2} \frac{P_{n+1}}{S_n} p \left[ -2d_n \alpha_{n+1} + (2d_n p^2 - 1 + \xi_n) \frac{1}{\beta_n} \right] \\
\gamma_{24} &= \frac{1}{2} \frac{S_{n+1}}{S_n} \left[ (2p^2 d_n + \xi_n) + (2p^2 d_n - 1) \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \right] \\
& \quad \left( \xi_n = \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}, \quad d_n = S_n^2 - \xi_n S_{n+1}^2 \right)
\end{aligned}$$

入射波の変位振幅と表面直下での変位振幅の関係は、層を順次浅くして行くことにより (6) を参照して、(10) で表される。

$$\begin{pmatrix} A_1^U \\ A_1^D \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} A_{N+1}^U \\ A_{N+1}^D \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} \Gamma^{(2)} \dots \Gamma^{(N)}$$

一般に任意の2つの深さの間の変位振幅の関係は (10) の型で表される。このようなマトリックス  $\Gamma$  を遷移マトリックスということにする。

次に、自由表面の境界条件から表面の変位を求める。(5) と  $E_0 = I$  (単位マトリックス) を考慮して、表面の変位 ( $= u_0$ )、応力 ( $= 0$ ) は表面直下の変位振幅で表され、したがって (10) から入射波の変位振幅で (11) のように書かれる。

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} A_1^U \\ A_1^D \end{pmatrix} = S_1 \Gamma \begin{pmatrix} A_{N+1}^U \\ A_{N+1}^D \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $S_1 \Gamma = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$  とおくと、(12) が得られる。

$$\begin{aligned}
u_0 &= (L_{11} - L_{12} L_{22}^{-1} L_{21}) A_{N+1}^U \quad (12) \\
A_{N+1}^U &= \begin{pmatrix} a_{N+1}^U \\ b_{N+1}^U \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから、 $a_{N+1}^U = 1$ 、 $b_{N+1}^U = 0$  とおけば、単位変位振幅の P 波入射、 $a_{N+1}^U = 0$ 、 $b_{N+1}^U = 1$  とおけば単位変位振幅の SV 波入射となり、それぞれに対応する表面の変位、すなわち周波数特性が (12) から求められる。このように、マトリックスの積から周波数特性を求めるのがマトリックス法の原理である。しかし、この方法では数値計算において (7) に含まれる  $E_n$  が発散し不安定になることがあり、安定した数値計算は難しい。これを避ける方法を 3 で考察する。

## 2.2 SH 波の斜め入射

SH 波の運動方程式と応力は、 $y$  方向の変位を  $v$  として (13)、(14) で与えられる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = S^2 \nabla^2 v \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (14)$$

$e^{i(fx - \omega t)}$  を省略して、平面波型の解を、

$$v = b^U e^{-i\omega\beta(z-z_H)} + b^D e^{i\omega\beta(z-z_H)}$$

とおくと、P、SV 波の (5)、(6)、(10) に対応する式が、それぞれ、(15)、(16)、(17) のように得られる (混乱は生じないので、P、SV 波と記号を区別しない)。

$$B = sEA \quad (15)$$

$$B = \left( v \quad \frac{\tau_{xy}}{i\omega} \right)^T$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mu\beta & \mu\beta \end{pmatrix}$$

$$E = \text{diag} \left( e^{-i\omega\beta(z-z_H)} \quad e^{i\omega\beta(z-z_H)} \right)$$

$$A = \left( b^U \quad b^D \right)^T$$

$$p = \frac{\sin \theta}{S_{N+1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{S^2} - p^2} \quad (\Im(\beta) \geq 0)$$

$$\begin{pmatrix} b_n^U \\ b_n^D \end{pmatrix} = \Gamma^{(n)} \begin{pmatrix} b_{n+1}^U \\ b_{n+1}^D \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\Gamma^{(n)} = E_n \gamma^{(n)}$$

$$E_n = \text{diag} \left( e^{i\omega\beta_n H_n} \quad e^{-i\omega\beta_n H_n} \right)$$

$$\gamma^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{11} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2\mu_n \beta_n} (\mu_n \beta_n + \mu_{n+1} \beta_{n+1})$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2\mu_n \beta_n} (\mu_n \beta_n - \mu_{n+1} \beta_{n+1})$$

$$\begin{pmatrix} b_1^U \\ b_1^D \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} b_{N+1}^U \\ b_{N+1}^D \end{pmatrix} \quad (17)$$

さて、SH 波では  $\Gamma = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$  とおいて、自由表面の境界条件から簡単に  $b^D = b^U$ 、 $v_0 = 2b^U$  が得られるので、周波数特性が (18) で求められる (この式で計算する方法を method 1 とする)。

$$v_0 = \frac{2(L_{22} L_{11} - L_{12} L_{21})}{L_{22} - L_{12}} b_{N+1}^U \quad (b_{N+1}^U = 1) \quad (18)$$

一方、表面での境界条件が簡単であることから、P、SV 波入射の場合とは別に以下の方法でも計算できる。

(16) を逆に解き、 $E_n$  が対角マトリックスであることを使うと、

$$\begin{pmatrix} b_2^U \\ b_2^D \end{pmatrix} = E_1^{-1} \gamma_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} b_1^U$$

$$\begin{pmatrix} b_3^U \\ b_3^D \end{pmatrix} = E_2^{-1} \gamma_2^{-1} \begin{pmatrix} b_2^U \\ b_2^D \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} b_{N+1}^U \\ b_{N+1}^D \end{pmatrix} = E_N^{-1} \gamma_N^{-1} \begin{pmatrix} b_N^U \\ b_N^D \end{pmatrix}$$

が得られる。  
 これより, (18) とは逆に,  $b_1^U = 1$  として, 表面から最下層へと変位振幅を計算し, 最後に得られた  $b_{N+1}^U$  から周波数特性が  $v_0 = 2/b_{N+1}^U$  と与えられる (この計算方法を method 2 とする)。

## 2.3 減衰をもつ媒質へ SH 波の垂直入射

安定した数値計算ができるかどうかを比較するため, 減衰を含む媒質への垂直入射の場合を考える。この場合, 全ての波が同一に取り扱えるので SH 波入射とする。

運動方程式, 応力は,  $\mu$  の代わりに複素剛性率  $\mu^*$  を使って次式で与えられる。

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu^* \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [\mu^* = \mu(1 + i\frac{1}{Q})]$$

$$\tau_{zv} = \mu^* \frac{\partial v}{\partial z}$$

平面波型の解は  $e^{-i\omega t}$  を省略して,

$$v = b^U e^{-i\omega\delta(z-z_H)} + b^D e^{i\omega\delta(z-z_H)}$$

$$\tau_{zv} = -i\omega\delta b^U e^{-i\omega\delta(z-H)} + i\omega\delta b^D e^{i\omega\delta(z-H)}$$

$$\delta = \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{1 + i(1/Q)}} \quad (\Im(\delta) \geq 0)$$

である。

周波数特性の計算には, 2.2 と同様に 2 つの方法が使える。この場合の遷移マトリックスは次式で与えられる。

$$\Gamma^{(n)} = E_n \gamma^{(n)}$$

$$E_n = \text{diag} ( e^{-i\omega\delta_n H_n} \quad e^{i\omega\delta_n H_n} )$$

$$\gamma^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{11} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2\delta_n} (\delta_n + \delta_{n+1})$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2\delta_n} (\delta_n - \delta_{n+1})$$

## 3. P, SV 波の斜め入射の場合の漸化式による計算

すでに述べたように (5) の  $E_n$  に含まれている指数関数は三角関数として上, 下方向へ伝わる波の位相変化を与える。しかし, 境界面で全反射をおこすとき, 指数が実数となりしかも常に正, 負の両符号をもつ。この指数は周波数, 層厚を含み, 高い周波数で発散したり不安定な数値を与える原因となる。これを避けるために Kennett らの考え方にしたがって, 幾何光学的な透過係数, 反射係数を導入して (6) を書き変える。

Fig. 2 のように, 境界面  $a, b$  に狭まれる層  $a$  (いくつかの層からなるとしてよい) を考える。

$a$  から  $b$  へと上方へ進む波,  $b$  から  $a$  へと下方へ進

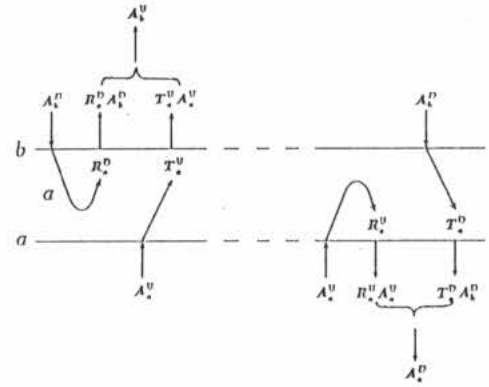


Fig. 2. Reflection and transmission matrices

む波の  $a$  層内での透過係数を, それぞれ,  $T_a^U, T_a^D$ ,  $b$  から下方へ進み層内で反射して  $b$  へ返ってくる波の反射係数を  $R_a^D$ ,  $a$  から上方へ進み層内で反射して  $a$  へ返ってくる波の反射係数を  $R_a^U$  とする。添字  $a$  は  $a$  層を通ることを示す。

変位振幅は透過, 反射係数の一次結合で与えられるから (19) が成り立つと考えてよい。

$$A_b^D = R_a^U A_a^U + T_a^D A_b^D$$

$$A_b^U = T_a^U A_a^U + R_a^D A_b^D$$
(19)

一方, 遷移マトリックス  $\Gamma^{(a)}$  を用いると (20) が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} A_b^U \\ A_b^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{(a)} & \Gamma_{12}^{(a)} \\ \Gamma_{21}^{(a)} & \Gamma_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a^U \\ A_a^D \end{pmatrix}$$
(20)

ここで,  $\Gamma^{(a)}$  の要素は境界面を上手にとることによって計算できる。

(19) を (20) の形に書き変えると (21) となる。

$$\begin{pmatrix} A_b^U \\ A_b^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a^U \\ A_a^D \end{pmatrix}$$
(21)

$$C_{11} = T_a^U - R_a^D (T_a^D)^{-1} R_a^U$$

$$C_{12} = R_a^D (T_a^D)^{-1}$$

$$C_{21} = -(T_a^D)^{-1} R_a^U$$

$$C_{22} = (T_a^D)^{-1}$$

(20), (21) を比べて (22) が得られる。

$$T_a^U = \Gamma_{11}^{(a)} - \Gamma_{12}^{(a)} (\Gamma_{22}^{(a)})^{-1} \Gamma_{21}^{(a)}$$

$$T_a^D = (\Gamma_{22}^{(a)})^{-1}$$

$$R_a^U = -(\Gamma_{22}^{(a)})^{-1} \Gamma_{21}^{(a)}$$

$$R_a^D = \Gamma_{12}^{(a)} (\Gamma_{22}^{(a)})^{-1}$$
(22)

(22) は, 2 つの境界面  $a, b$  間の遷移マトリックスからその間の透過, 反射係数を求める式である。

さらにこれを Fig. 3 に示すように,  $a, b$  2 つの層

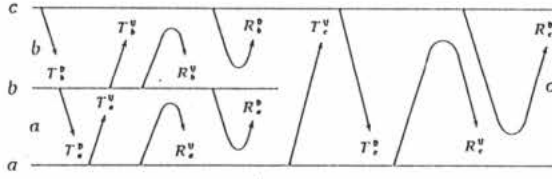


Fig. 3. Relations of reflection and transmission matrices

があり、 $b$  層の上部の境界面を  $c$  とした層構造に適用する。 $a$ 、 $c$  境界面間 (すなわち、 $a$  層 +  $b$  層) を  $c$  層とすると、これら 3 つの層の遷移マトリックス間に (23) が成り立つ。

$$\Gamma^{(c)} = \Gamma^{(b)}\Gamma^{(a)} \quad (23)$$

(23) の各遷移マトリックスを透過、反射係数で書きなおすと (24) を得る。

$$\begin{aligned} T_c^U &= T_b^U(I - R_a^D R_b^U)^{-1} T_a^U \\ T_c^D &= T_a^D(I - R_b^U R_a^D)^{-1} T_b^D \\ R_c^U &= R_a^U + T_a^D(I - R_b^U R_a^D)^{-1} R_b^U T_a^U \\ R_c^D &= R_b^D + T_b^U R_a^D(I - R_b^U R_a^D)^{-1} T_b^D \end{aligned} \quad (24)$$

(24) は、相連なる 2 つの層のそれぞれの透過、反射係数から、それらを 1 つの層とした全体の透過、反射係数を与える式である。

いま、(23) を (7) に対比してみる。すなわち、第  $n+1$  境界面の直下と直上間を  $a$  層、第  $n+1$  境界面直上と第  $n$  境界面直下間を  $b$  層、第  $n+1$  境界面直下と第  $n$  境界面直下間を  $c$  層に対応させ、(23) は  $\Gamma^{(c)} = E_b \gamma^{(a)}$  となる。この式を (24) の形に書きなおすと (25) を得る。

$$\begin{aligned} T_c^U &= E_b T_b^U (I - R_a^D R_b^U)^{-1} T_a^U \\ T_c^D &= T_a^D (I - R_b^U R_a^D)^{-1} T_b^D E_b \\ R_c^U &= R_a^U + T_a^D (I - R_b^U R_a^D)^{-1} R_b^U T_a^U \\ R_c^D &= E_b \left\{ R_a^D + T_b^U R_a^D (I - R_b^U R_a^D)^{-1} T_b^D \right\} E_b \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $E_b$  は (8) を参照して (26) となる。

$$E_b = \text{diag} ( E_{b11} \ E_{b22} \ E_{b33} \ E_{b44} ) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} E_{b11} &= e^{i\omega\alpha H_b} \\ E_{b22} &= e^{i\omega\beta H_b} \\ E_{b33} &= e^{-i\omega\alpha H_b} \\ E_{b44} &= e^{-i\omega\beta H_b} \end{aligned}$$

(25) の右辺は (22)、(9) から計算できる。数値計算で不安定になるのは、主として  $E_b^{-1}$  に起因するが (25) はこれを含まないので安定した計算ができると予想される。

(25) は、初期値を

$$T_{N+1}^U = I, T_{N+1}^D = I, R_{N+1}^U = 0, R_{N+1}^D = 0$$

として、第  $N$ 、第  $N-1$ 、 $\dots$ 、第 1 層へと漸次透過係数、反射係数を計算し、第  $N$  境界面直下から表面直下までの全体の透過、反射係数  $T^U$ 、 $T^D$ 、 $R^U$ 、 $R^D$  を求める漸化式と見ることができる。求めた全体の透過、反射係数を用いて、第  $N$  境界面と自由表面間を 1 つの層として (21) を参照して入射波の変位振幅と表面直下での変位振幅の関係が求められる。

次に、表面での変位  $u_0$  を求める。

(11) の  $S_1$  を、 $S_1 = \begin{pmatrix} \chi^U & \chi^D \\ \zeta^U & \zeta^D \end{pmatrix}$  とおくと  $u_0$  は (27) と与えられる。

$$u_0 = (\chi^U + \chi^D R_0)(I - R^D R_0)^{-1} T^U A_{N+1}^U \quad (27)$$

ただし、 $R_0 = -(\chi^D)^{-1} \chi^U$  とし、表面での反射係数である。具体的に示すと、

$$\begin{aligned} R_0 &= -C_{R0} \begin{pmatrix} \zeta_1^2 - 4p^2 \alpha_1 \beta_1 & \frac{4S_1}{P_1} p \zeta_1 \beta_1 \\ -\frac{4P_1}{S_1} p \zeta_1 \alpha_1 & \zeta_1^2 - 4p^2 \alpha_1 \beta_1 \end{pmatrix} \\ C_{R0} &= \frac{1}{\zeta_1^2 + 4p^2 \alpha_1 \beta_1} \\ \chi^U + \chi^D R_0 &= -C_{\chi^0} \begin{pmatrix} -2P_1 p \alpha_1 \beta_1 & S_1 \zeta_1 \beta_1 \\ P_1 \zeta_1 \alpha_1 & 2S_1 p \alpha_1 \beta_1 \end{pmatrix} \\ C_{\chi^0} &= \frac{2}{S_1^2 (\zeta_1^2 + 4p^2 \alpha_1 \beta_1)} \end{aligned}$$

すでに述べたように、 $A_{N+1}^U = \begin{pmatrix} a_{N+1}^U \\ b_{N+1}^U \end{pmatrix}$  であるから、

$a_{N+1}^U = 1$ 、 $b_{N+1}^U = 0$ 、または  $a_{N+1}^U = 0$ 、 $b_{N+1}^U = 1$  とおくと、それぞれ、 $P$  波入射、 $SV$  波入射に対応した周波数特性が求められる (この式による方法を method 4 とする)。

注) SH 波の斜め入射について

SH 波の透過、反射係数は、 $P$ 、 $SV$  波の (22)、(25) を参照して計算される。ただし、 $A^U$ 、 $A^D$  を、それぞれ、 $b^U$ 、 $b^D$  とし、また、 $T^U$ 、 $T^D$ 、 $R^U$ 、 $R^D$  を、それぞれ、 $T^U$ 、 $T^D$ 、 $R^U$ 、 $R^D$  とおき、(16) の  $\Gamma^{(n)}$  を用いる。周波数特性は、(27) に対応して (28) と与えられる。

$$u_0 = 2(1 - R^D)^{-1} T^U b_{N+1}^U \quad (b_{N+1}^U = 1) \quad (28)$$

(SH 波が垂直に入射する場合 ( $\theta = 0^\circ$ ) には、減衰を含む媒質にもこの式は適用できる。これを method 3 とする)。

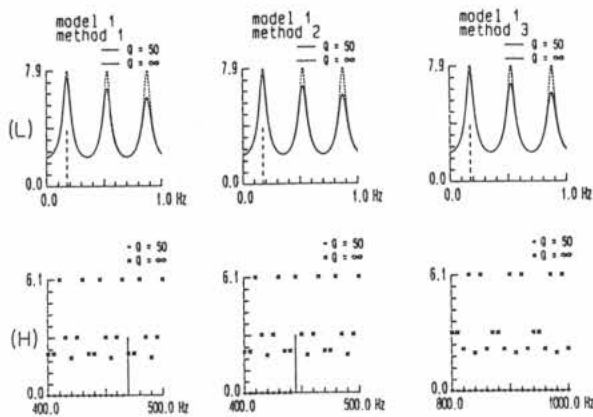


Fig. 4. Frequency characteristics of normal incidence SH wave model 1

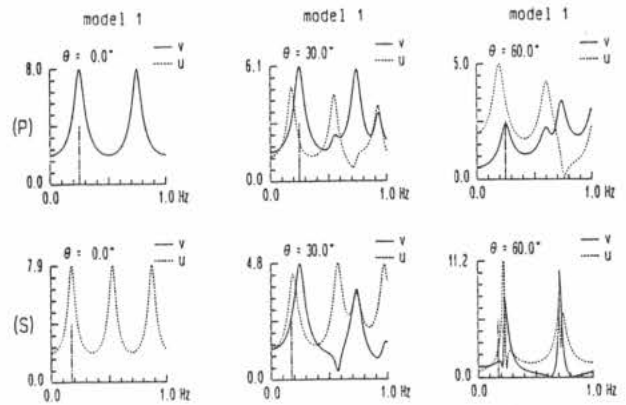


Fig. 7. Frequency characteristics of oblique incidence P and SV wave model 1

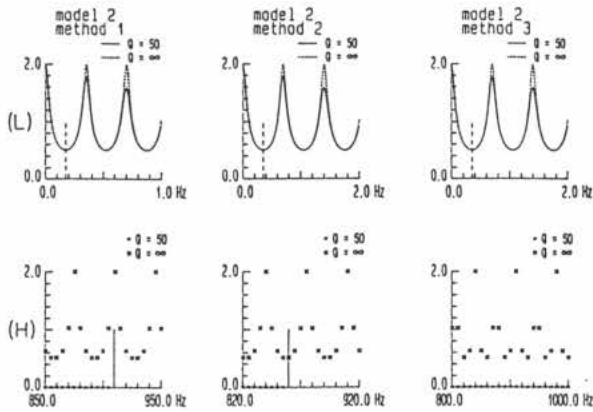


Fig. 5. Frequency characteristics of normal incidence SH wave model 2

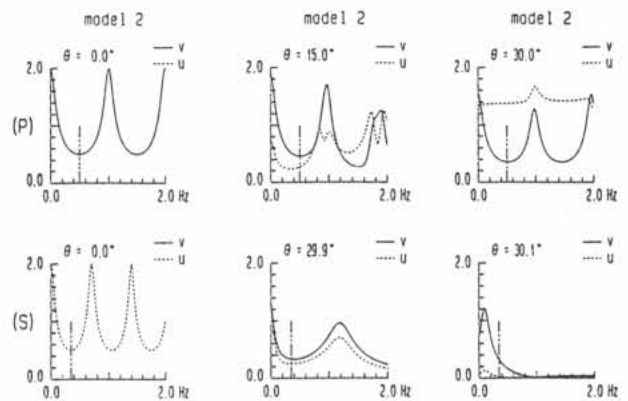


Fig. 8. Frequency characteristics of oblique incidence P and SV wave model 2

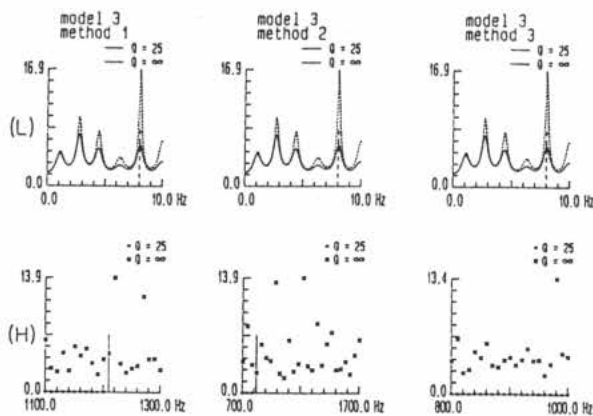
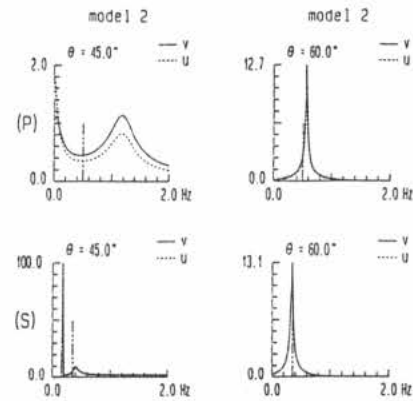


Fig. 6. Frequency characteristics of normal incidence SH wave model 3



2. method 4 による, 減衰を含まない成層構造へ P, SV 波が斜め入射する場合を計算した。

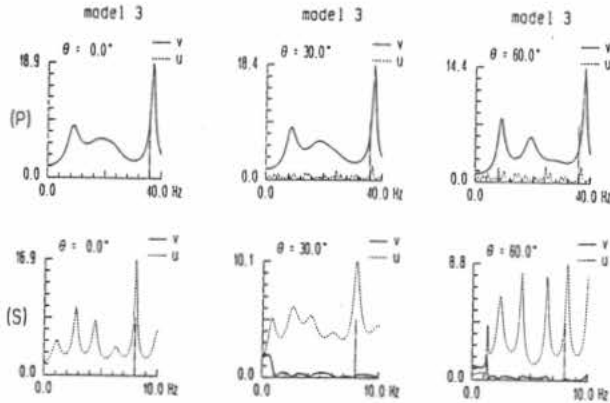


Fig. 9. Frequency characteristics of oblique incidence P and SV wave model 3 low frequency range

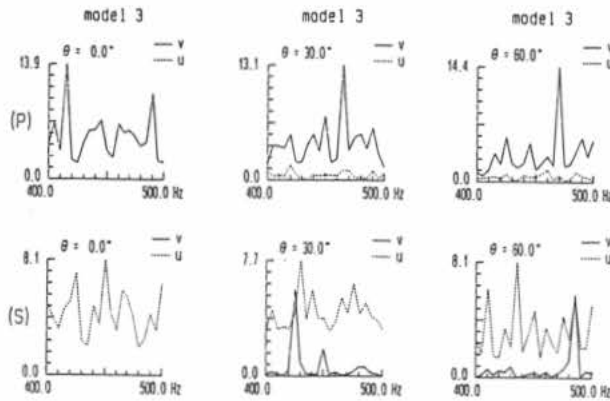


Fig. 10. Frequency characteristics of oblique incidence P and SV wave model 3 high frequency range

#### 4. 計算例

上述のアルゴリズムによって, 計算プログラムを作製し, 以下の計算を行った (使用言語は BASIC)。

計算には, Table 1 に示すような model 1. 上層が低速, 下層が高速のコントラストの大きい 2 層構造,  
model 2. 上層が高速, 下層が低速の 2 層構造,  
model 3. 層間に低速度層がある 7 層構造  
を用いた。この層構造について,

1. method 1, 2, 3 による, 減衰を含む成層構造へ SH 波が垂直入射する場合

Table 1

		$\rho$	$V_p$	$V_s$		$H_n$
1	1	1.0	1.0	0.7	50	1.0
	2	2.0	2.0	1.4	50	
2	1	2.0	2.0	1.4	50	1.0
	2	1.0	1.0	0.7	50	
3	1	1.6	0.43	0.096	25	0.003
	2	1.62	0.54	0.12	25	0.007
	3	1.69	1.1	0.23	25	0.012
	4	1.7	0.9	0.18	25	0.003
	5	1.75	2.8	0.3	25	0.009
	6	1.7	2.28	0.22	25	0.02
	7	1.8	3.1	0.5	25	

計算例を以下の図に示す。各図には参考のため, 表面直下の層の厚さが 1/4 波長になる周波数を縦線で示してある。

1. 減衰を含む成層構造へ SH 波が垂直入射する場合, Fig.4 は model 1, Fig.5 は model 2, Fig.6 は model 3 について, method 1, 2, 3 を用いた結果を (a), (b), (c) に示してある。(L) は低周波領域, (H) は高周波領域の結果であり, 各図には参考のため減衰を含まない場合の特性を, (L) には点線で, (H) には印で示してある。高周波領域の計算では周波数変化の刻み幅が大きいため計算した周波数に対してのみに  $\square$  印を付けた。これらを総合すると method 3 では低周波領域, 高周波領域のどちらでも発散は起こらない。しかし, method 1, 2 では減衰を含む層構造の場合, 高い周波数領域で発散を起こし計算が不可能になったり, 不安定な結果を与えることがある。各図の (H) には発散が起き始める周波数までの結果を書き, そのところを縦線で示してある。

2. 減衰を含まない成層構造へ P, SV 波の斜め入射の場合

Fig. 7 は model 1, Fig. 8 は model 2, Fig. 9, 10 は model 3 の結果で, method 4 で計算した。図で,  $u$ (点線) は水平特性,  $v$ (実線) は上下特性である。また, (P) は P 波, (S) は SV 波入射の場合である。 $\theta^\circ$  は入射角である。Fig. 7~9 では低周波領域, Fig. 10 では 400~500Hz の高周波領域の結果である。

method 4 では, いずれの model についても, また高い周波数領域でも発散は起こらず安定した結果が得られる。しかし, この方法では境界面で臨界屈折を起こす入射角に対しては計算ができないことに注意を要する。しかし, 臨界屈折を起こす入射角にごく近い場合を選んで計算したが, その前後で安定した結果を与えている。



## 5. 結論

成層構造の周波数特性をマトリックス法に基づく安定して計算ができるアルゴリズムを求めた。方法は、Kennett らの方法を応用してマトリックス法の遷移マトリックスを、透過、反射係数で書きかえ、層全体の透過、反射係数を求める漸化式を導入することで可能となった。プログラムでは漸化式を整理し複素数計算なしで計算ができるようにした。従来のマトリックス法では計算が困難と思われる3つのモデルにつき、広い周波数領域にわたって周波数特性を計算をした。また、比較のため従来のマトリックス法による計算プログラムを作製し、SH波について不安定になるところを調べた。

導出した4つ方法とも実用の周波数範囲では発散を起こすことなく安定した周波数特性の計算ができる。しかし、method 1, 2 では、数 100Hz 以上の高周波領域で発散を起こし計算が不可能になったり、不安定になる場合がある。漸化式による method 4 は P, SV 波の斜め入射に対して周波数特性を安定して計算するのに有効であることを示した。また、この計算は複素数計算なしでもプログラミングでき、パーソナル・コンピュータでも容易に実行できる利点も持っている。

### 参考文献

- [1] 秋山喬二 小口雄康 成層構造の周波数特性を安定して計算する一方法, 物理探査学会学術講演会論文集(1992)

キーワード.

弾性波, 成層構造, マトリックス法, 固有振動

.....

Summary.

A method of stable calculation of frequency characteristics of a  
layer medium

Kyoji Akiyama

Department of System Control Engineering, College of Engineering, Hosei University

Yuko Oguchi

Computational Science Research Center, Hosei University.

This paper discusses how to calculate stably frequency characteristics of a layered medium.

Variety of method of calculation based on Thomas-Haskell matrix formalism have been proposed and investigated. These method, however, fall into the numerical instability in the high frequency range and/or oblique incidences of waves.

Kennet and Kerry proposed an excellent algorithm for computing theoretical seismograms by the concept of reflection and transmission matrices of the wave at each layer to solve the numerical instability problem.

Here, we propose a simple algorithm that is not require complex calculation modify their algorithm, and develop a computing program that can be run in a handy personal computer.

It have been shown that the method is useful to calculate stably frequency characteristic through wide range of frequency.

Keywords.

elastic waves, layered medium, matrix method, frequency characteristic