ウェーブレット変換を利用した線形システムの近似解析への試み

OGUCHI, Yukoh / SAITO, Yoshifuru / 斎藤, 兆古 / 小口, 雄康 / IWASAKI, Harumi / 岩崎, 晴美

(出版者 / Publisher)
法政大学計算センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学計算センター研究報告 / Bulletin of Computer Center, Hosei University

(巻 / Volume)
10

(開始ページ / Start Page)
113

(終了ページ / End Page)
117

(発行年 / Year)
1997-03-31

(URL)
https://doi.org/10.15002/00024741

ウェーブレット変換を利用した線形システムの近似解析への試み

岩崎　晴美,　　小口　雄康
法政大学計算センター

斎藤　兆古
法政大学工学部電気電子工学科

多くの物理解析は、連立方程式を解くことに帰する。この解を求める方法には多くの数値解析方法があるが、線形システムの近似解を求める方法として、ウェーブレット変換を適用した方法を試みた。

1. はじめに

画像や音声の多重解像解析やデータ圧縮、電磁界ノイズ問題の解析などでウェーブレット変換が用いられ、現在いろいろいろな方面でウェーブレット変換の試みがなされている。線形システムの近似解を求める方法として、線形システム（連立方程式）をウェーブレット変換し、そのシステム固有の特徴部分を取り出して近似的に解析する方法を提案する。

有限要素法で代表される多くの数値解析法は最終的には連立方程式を解くことにある。精度の向上や3次元問題等ではこの連立方程式の大きさが巨大なものとなり、多くの場合直接システムを解くことは不可能となる。このような巨大な連立方程式は計算機のメモリー節約に効果的な反復法が提案されているが、反復法は巨大なシステムが解けるが、解が得られるまでの時間が仮定する解の初期値に依存している。この初期値を系統的に求める手段として離散値系ウェーブレット変換が応用できると考える。また、大規模なシステムを厳密に解析しなくても、システムの大まかな挙動を把握する場合、近似解で充分な情報を得ることが可能である。システム固有の特性を把握する手段として、数学的には固有値や固有ベクトル等が知られている。ウェーブレット変換によるシステム解析の特徴は、従来の線形代数で使われる手法と違い、近似的であるがシステムの応答が直接得られる点にある。また、ウェーブレット変換による線形システム解析法は、必ずしも適切に導かれたシステム (well posed system) だけでなく、不適切に導かれたシステム (ill posed system) にも適用できる [1]。

今回、ウェーブレット変換による線形システム解析の基礎を述べることを目的とし最も簡単な境界値問題である1次元のポアソン方程式を有限差分法で離散値化したシステムの近似解を得る問題を具体的例題として取り上げ、試みた。

2. 線形システムの近似解析

いま、解くべき線形システム方程式が

$$Y = C \cdot X \tag{1}$$

で与えられたとする。Yは、n次の入力ベクトル、Cは、$n \times n$次のシステム行列、Xは、n次の解ベクトルである。このXの解ベクトルを得るためにはCの逆行列を求めればよい。

(1) 式をウェーブレット変換した式

$$Y' = C' \cdot X' \tag{2}$$

ただし、

$$\begin{aligned} Y' &= W_n \cdot Y \\ C' &= W_n \cdot C \cdot W_n^T \\ X' &= W_n \cdot X \end{aligned} \tag{3}$$

とすれば、解ベクトルのウェーブレットスペクトラムX'には、マザーウェーブレット（C'の1行1列の要素）近傍、すなわち要素の最初の方に解Xの特徴を抽出したスペクトラムが集まっていると考えられる。つまり、大規模の計算を行わなくても最初の要素の正方行列を切り出して逆行列を求めれば近似解が得られる。したがって、そのままC'の逆行列を取らずに、C'のマザーウェーブレット近傍の正方行列だけで逆行列をとり、X'の近似解ベクトルX''が得られるとする。この近似解ベクトルX''をウェーブレット逆変換したものが、システムの近似解ベクトルであると考える。これがウェーブレット変換を使用して近似解を求める基本の考え方である。

ウェーブレット変換されたシステム行列C'は、マザーウェーブレットを含むシステム行列の部分に情報が集約されていると仮定する。C'の$(1,1)$要素から(n', n')要素までの正方行列を切り出した部分行列をc'とする。C'と同じ大きさのゼロ行列をZとすれば、近似的なC'の逆行列を$(C'')^{-1}$とすれば、

$$C''^{-1} = Z \oplus c'^{-1} \tag{4}$$

で与えられる。但し$\oplus$ 記号は、$(c')^{-1}$が$(C')^{-1}$からc'の切り取られた部分に対応するZの部分に足される意味である。したがって原システム行列Cの近似逆行列は、近似逆行列$(C'')^{-1}$をウェーブレット逆変換すれば得られることになる。

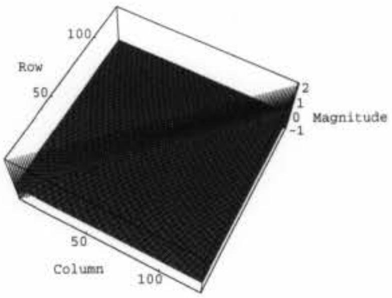

Fig. 1. システム行列

具体例として、もっとも簡単な1次元のポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\sigma \tag{5}$$

の解を求める。(5) 式を3点差分近似で離散化する。

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_{i+1}}{\Delta x}\right) = -\sigma_i \tag{6}$$

Δx は x 方向の刻み幅である。

(6) 式を変形して、

$$-\phi_{i-1} + 2\phi_i - \phi_{i+1} = (\Delta x)^2 \sigma_i \tag{7}$$

となる。(7) 式で、i を1から n 点まで取れば、n 次のシステム方程式が得られる。しかし、境界条件として、第0点と第 $n+1$ 点のポテンシャルϕ_0, ϕ_{n+1}の値を与えなければならない。ここではϕ_0, ϕ_{n+1}を両者ともにゼロとする。

(7) 式から、システム行列は次式で与えられる。

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

このシステム行列 (8) をウェーブレット変換し、スペクトラム C'を得る。通常、非特異行列のウェーブレットスペクトラムの対角線要素はゼロにならないが、このシステムはマザーウェーブレットおよびスペクトラムの対角線要素にゼロに近い値が存在する。したがってマザーウェーブレット近傍に解が集まっているスペクトラムで、マザーウェーブレットを含む正方領域を切り出し、このスペクトラムの近似逆行列 $(c')^{-1}$を求め、元の必要な大きさに戻すためゼロを挿入する。これをウェーブレット逆変換すればシステムの近似解が得られる。

入力ベクトルとしては、厳密解である次の3つのモデル　(9) 式（モデル1）と (10) 式（モデル2）と (11)

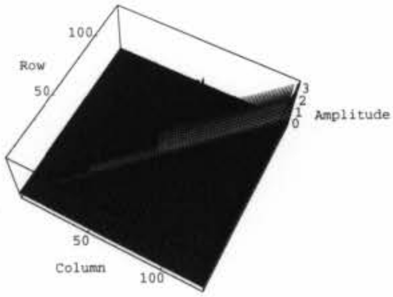

Fig. 2. システム行列のウェーブレットスペクトラム

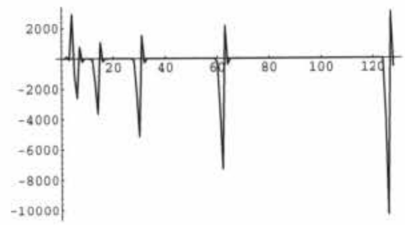

Fig. 3. 入力のウェーブレットスペクトラム（モデル1）

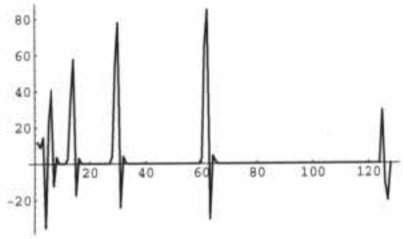

Fig. 4. 入力のウェーブレットスペクトラム（モデル2）

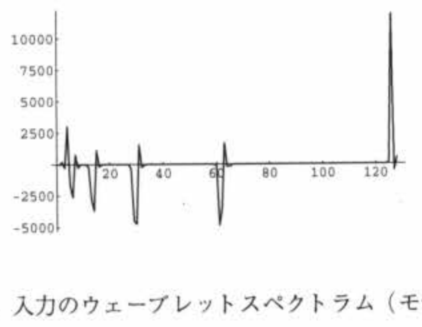

Fig. 5. 入力のウェーブレットスペクトラム（モデル3）

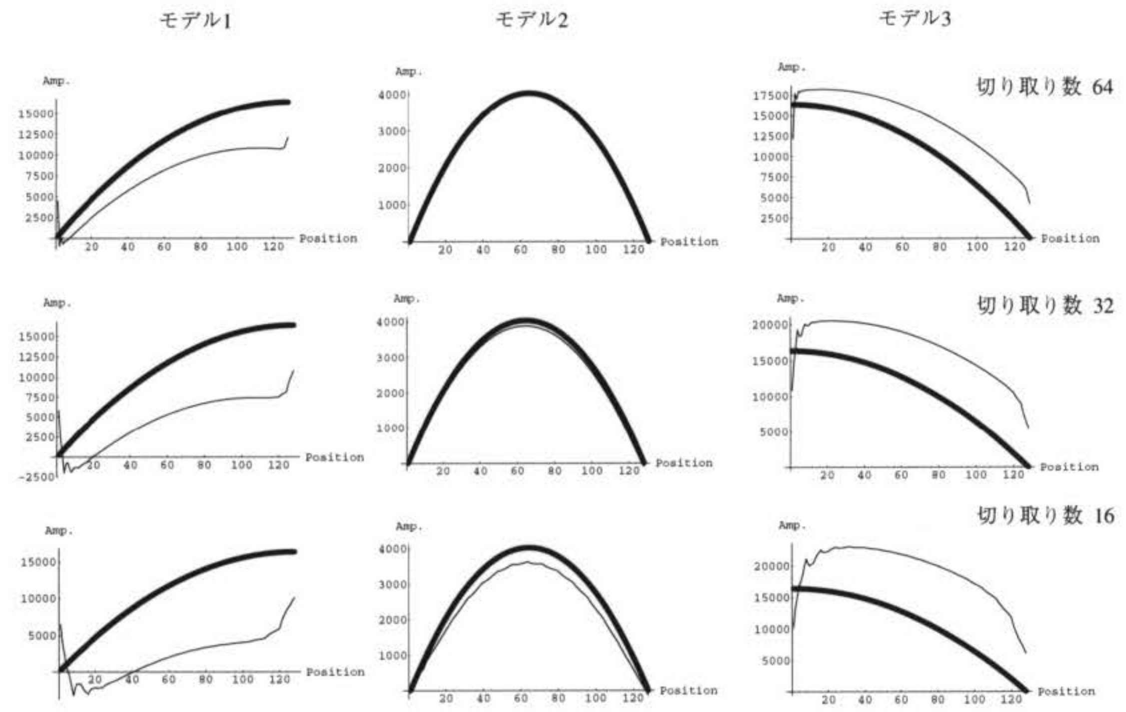

Fig. 6. ドビッシー4次基底の近似解（細線）と厳密解（太線）

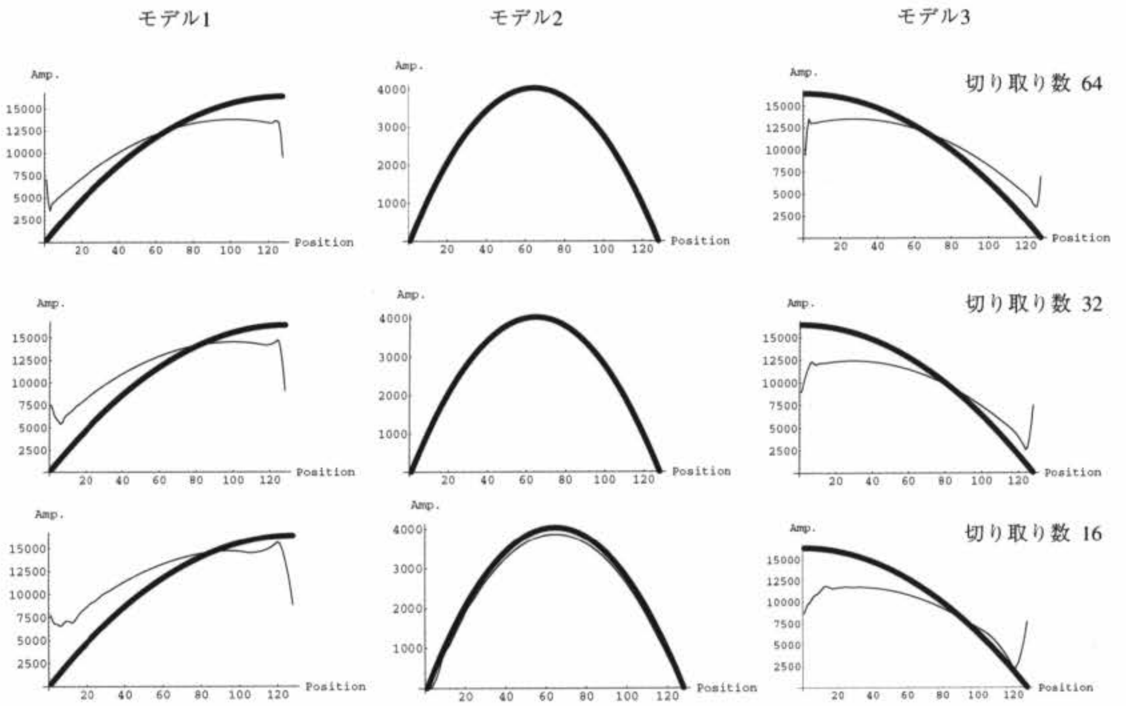

Fig. 7. ドビッシー8次基底の近似解（細線）と厳密解（太線）

TABLE 1　厳密解と近似解との相関係数 Daubechies

base	8	16	32	64
2	0.992289	0.992915	0.994641	0.997767
	0.999083	0.999083	0.999083	0.999083
	0.961586	0.961586	0.961586	0.961586
4	0.955783	0.961586	0.97329	0.997147
	0.999083	0.999083	0.999768	0.999959
	0.961586	0.961586	0.970888	0.983693
6	0.962156	0.974154	0.982649	0.990481
	0.999636	0.999939	0.999991	0.999996
	0.954428	0.96597	0.973068	0.980793
8	0.973125	0.975194	0.978582	0.984591
	0.997007	0.999601	0.999972	1.
	0.979153	0.983002	0.984381	0.984594

式（モデル 3）を与え、その近似解を求めた。

$$-(i-n)^2+n^2 \tag{9}$$

$$(i-n)(n-i) \tag{10}$$

$$n^2-i^2 \tag{11}$$

i は 1 から n まで、n は入力ベクトルのデータ数である。(6) 式で、$n=128$ として得られたシステム行列を Fig.1に示す。Fig.2には、ドビッシーの 8 次基底を用いて変換したシステム行列のスペクトラムである。ドビッシーの 4 次基底と 8 次基底の厳密解（太線）と求まった近似解（細線）の比較を Fig.6,Fig.7 に示す。Fig.6,Fig.7 の上段は切り出し数が 64 の時、中段は切り出し数が 32 の時、下段は切り出し数が 16 の時である。また、結果を判断するため斎藤がとった厳密解と近似解の相関係数 [1] を求めた。TABLE1 は、ドビッシーの 2 次から 8 次までの基底と切り出す数 n' との相関係数表である。

計算は Mathematica 2.2 を使用した（NeXT と Macintosh）。表に示していないが 20 次基底まで近似解を求めてみた。その結果、ドビッシーの 2 次基底では常に小さい近似解を与え、切り出す値が元の大きさにするほど厳密解に近付く。4 次の基底では端部が不連続となるモデル 1 では近似解は厳密解より大きく、モデル 3 では近似解は厳密解より小さくなり、端部に大きな誤差が生じている。6 次以後の基底では Fig.7 と同じパターンとなり、高次になるほど近似解は厳密解により近付いた。Fig.6,Fig.7 のモデル 2 の場合でわかるように、高次になるほど切り出す値が小さくて厳密解にほとんど近い解が求まった。端部が不連続となるモデル 1 とモデル 3 では 4 次と同様に端部にかなり誤差が大きく現われている。境界部分で大きな誤差が発生しているのは、ウェーブレット変換の周期的境界条件の誤差と考えられる。また、切り出す値を 100 として近似解を求めてみたが切り出し値 64 とほぼ同じ結果となった。解がモデル 2 のような場合は、切り出す値が低次基底では半分、高次基底では四分の一以下で求まることが解った。

3. まとめ

以上の結果から、元のシステムを半分以下に縮小して、近似解がウェーブレット変換によって可能であることを示した。きわめて重要な点は、必ずしもマザーウェーブレット近傍に絶対値の大きなスペクトラムが集まらなくても、システム行列全体の情報があつまっていることである。近似解の改善として、依田提案による解精度の改善方法がある。依田法の考え方は、解ベクトルの端部がゼロ要素と仮定することで、解ベクトルの端部における誤差を取り除く方法である [2]。現在この方法で近似解を求める試みを行っている。

REFERENCES

[1]斎藤兆古著　" Mathmatica によるウェーブレット変換"（朝倉書店、1996 年 9 月 5 日）

[2]K.Yoda and Y.Saito, " A Wavlet Transform Approach to Inverse Problems of Vandemonde Type System ", IEEE Trans. Magnetics, in printing.

キーワード.

線形システム、ウェーブレット変換、ポアソン方程式

....

Summary.

Approximately Analysisis to Linear System used Wavelet Transformation

Harumi Iwasaki, Yukoh Oguchi
Hosei University Computer Center

Yoshifuru Saito
Dept. of Electrical Eng. and Electronics, Hosei University

In the present paper, an approximate solution methodology employing the wavelet transformation for the huge linear system is proposed. A linear system is transformed into a wavelet spectrum space, and an approximate solution in wavelet spectrum space is evaluated from a reduced small size system including the mother wavelet spectrum. Inverse wavelet transform to this spectram solution yields an approximate solution. Several examples demonstrate the usefulness of our methodology.

Keywords.

Linear System, Wavelet Trandformation, Poisson Equation