正規直交離散値ウェーブレット変換の計算式

小口, 雄康 / OGUCHI, Yuko

(出版者 / Publisher)
法政大学計算センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of Computer Center, Hosei University / 法政大学計算センター研究報告

(巻 / Volume)
10

(開始ページ / Start Page)
91

(終了ページ / End Page)
101

(発行年 / Year)
1997-03-31

(URL)
https://doi.org/10.15002/00024738

正規直交離散値ウェーブレット変換の計算式

小口　雄康
法政大学　計算センター

ウェーブレット変換の急激な発展に伴って多くの研究報告と多数の解説書が発表されている。しかし、フーリエ変換と違って初心者にとって変換の概念を簡単に理解することは困難である。場合によっては何処から手をつけてよいか分からないことすらある。本報では、この点に留意して正規直交離散値ウェーブレット変換の基礎的な考え方を時間領域、周波数領域の両面から解説し、基礎となる計算式を示してある。用いる道具はフーリエ変換の基礎公式である。

1. はじめに

Morlet の研究以来、この10年余、ウェーブレット変換が主としてフランスの数学者の興味を呼び理論的に整理され、応用面にまで亘って多数の研究がなされ、多くの教科書も発刊されてきた。とくに、斎藤、榊原の教科書を通読すればウェーブレット変換を理解し、実際に応用することが可能になると思われる。ただ、その前に基本的な概念とウェーブレット変換の構成を知っていた方が初学者にとって理解の近道と思われる。筆者はこの点に注意して理・工系の大学高学年、修士課程の学生に便のように一つの筋を通して解説をしてきた ([OGU1]、[OGU2])。本報では、正規直交離散値ウェーブレット変換についてまとめてある。予備知識としては筆者の2つの解説の通読と、フーリエ変換の基礎公式を知っていることである。

[OGU1] では連続ウェーブレット変換について述べたが、計算は近似的に離散値化して数値計算した。しかし、このままでは直交変換をすることはできない。直交変換するには特別な工夫をしなければならない。現在、時間領域、周波数領域の2通りの方法で直交変換が見つけられているので、両者の関係を明瞭にすることを含めて紹介する。

2. ウェーブレット関数の離散値化

ウェーブレット変換は、時間領域、周波数領域のある範囲だけに値をもつ (コンパクトサポート) ウェーブレット関数 $\phi(t)$ と実変数 a、b による実関数 (データ) $f(t)$ の積分変換として定義される。

$$F_a(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\frac{t-b}{a})} f(t) dt \tag{1}$$

ここで t は時間変数、b、a は、それぞれ時間軸の位置、拡がりに関係する。まず初めに、これらすべての変数を離散値化する。

2.1　$\phi(t)$ の主領域 b_0

天下り的であるが、$\phi(t)$ が代表する時間軸の幅が $0 \leq t \leq b_0$ であるとする。

2.2　平行移動幅

$a = 1$ のとき、時間軸での平行移動 b を b_0 ずつにとる。すなわち、$b = mb_0$ (m は整数) とおいて、

$$\phi(t-b) \Rightarrow \phi(t-mb_0)$$

$a \neq 1$ では、時間軸が a 倍されるから、平行移動幅を ab_0 ずつにとって $b = mab_0$ とおいて、

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\phi(\frac{t-b}{a}) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}\phi(\frac{t}{a} - mb_0)$$

とする。平行移動の幅 ab_0 は、周期 ab_0 に対応すると考えられる。

2.3　a のとり方

ウェーブレット変換の特徴は関数の変化の度合いに合わせて分解能を変えることである。そのため、a が $\phi(t)$ の周期を支配することを考えて、基準値 a_0 を決めて、

$$\begin{aligned} a &= a_0^j \quad (j = 1, 2, 3, \cdots) \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\phi(\frac{t-b}{a}) &\Rightarrow a_0^{-j/2}\phi(\frac{t}{a_0^j} - mb_0) \end{aligned}$$

ととる。

2.4　b_0, a_0 の決め方

変数 t は本来無次元であるから、b_0, a_0 の値は任意に決められる。ここでは、データ処理の立場からサンプリング間隔との兼ね合いで決める。

時間変数 t は等間隔 Δt でサンプリングされているとして、

$$t = n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

分解能をあげるため移動幅をできるだけ短くしたいから、$b_0 = \Delta t$ ととる。

a_0 は連続ウェーブレット変換ではいろいろなとり方がなされているが、$a_0 = 2$ ととると直交変換系を構築できる。

以上を総合してウェーブレット関数は、

$$2^{-j/2}\phi([\frac{n}{2^j} - m]\Delta t) \quad (j、m、n \text{ は整数})$$

と書ける。

ここまでまとめたら、$\Delta t = 1$ とし無次元化してよいから、時間軸での離散値ウェーブレット変換の基本形が

以下で与えられる。

$$\phi(n\Delta t) \;=\; \phi(n), \quad f(n\Delta t) \;=\; f(n)$$

と置いて,

$$F_j(m) = 2^{-j/2}\sum_n \phi(\frac{n}{2^j} - m)f(n) \tag{2}$$

$$j = 1,2,3,\cdots,\; m = 0,1,2,\cdots$$

2.5　j, m について

3節で示すように変換は $j=1$ から始まるから、最小の時間軸平行移動は $2\Delta t$ であり、これが時間軸の最小分解能となる。$2\Delta t$ が周期を表すと考えると、最大周波数 f_N は $f_N = 1/2\Delta t$ となり、離散値フーリエ変換でのナイキスト周波数に対応する。一方、m については時間軸の幅の中点を代表値と考えることにする。たとえば、$j=1$ では、幅が $2\Delta t$ であるから、$m = 0,1,2,\cdots$ に応じて、$t = \Delta t, 3\Delta t, 5\Delta t,\cdots$ での値と考える。
一般に、$F_j(m)$ は (時刻の) 代表値 $(2m+1)2^{j-1}\Delta t$ ($m = 0,1,2,\cdots$) における周波数 $f_N/2^{j-1}$ に対応すると解釈する。

3. 多重解像度解析

ウェーブレット変換の基本は積分核 $\phi(t)$ による積分変換である。とくに、変換では直交変換が望ましい。直交変換は2種類の実積分核をうまく利用する。実は[OGU1]で述べたGabor関数でも実部、虚部を考えると2つの実関数を用いている。一般に、その1つはデータの和をとる(積分、low pass) 働きのある スケーリング関数 $\Phi(t)$ 、他の1つは差をとる (微分、high pass) 働きのある ウェーブレット関数 $\Psi(t)$ を用いる。変換で元のデータを和と差に分けてその性質を調べることができる。変換が正規直交変換であれば変換された各項を独立に議論できて便利である。そのために、多重解像度解析といわれる独特の変換手続きを行わなければならない。こうした構築に理論的な難しさがあり、初学者にとって理解しがたい点となっている。以下に筋道を分かりやすく端的に述べる。

多重解像度解析の考え方の基礎を簡単な例で考える。

3.1　Walsh関数 $\phi(t)$ と Haar関数 $\psi(t)$

以下に定義するWalsh関数 $\phi(t)$ をスケーリング関数とする。

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ウェーブレット関数として、Haar関数 $\psi(t)$ を以下に定義する。

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < 1/2) \\ -1 & (1/2 \le t < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

なお、簡単のため正規化係数を省略してある。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt \;=\; 0 \text{ 、および } \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\psi(t)dt \;=\; 0$$

から、変換の収束性 (admissibility条件)、直交性が成り立つ。

3.2　時間軸拡大による関数間の関係

時間軸拡大について以下のような関係があることはすぐ分かる。

$$\begin{aligned} \phi(t/2) &= \phi(t) + \phi(t-1) \\ &= \sum_{n=0}^{1} h_n\phi(t-n) \qquad (3) \\ & \quad (h_0 = 1, h_1 = 1) \\ \psi(t/2) &= \phi(t) - \phi(t-1) \\ &= \sum_{n=0}^{1}(-1)^n h_{1-n}\phi(t-n) \qquad (4) \end{aligned}$$

(3)、(4) から時間軸を2倍に拡大した $\phi(t/2)$, $\psi(t/2)$ は元の $\phi(t)$ を平行移動した関数 $\phi(t-m)$ の線形結合で表され、かつ、(3) の係数を使って (4) の係数が与えられている。

3.3　離散値化とウェーブレット変換

[OGU2]で示した2次ウェーブレット変換は

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

によるものである。
これは、前者がWalsh関数 $\phi(t/2)$、後者がHaar関数 $\psi(t/2)$ の離散値化であることはすぐ分かる。変換の具体例は[OGU2]に示してあるので省略する。

3.4　スケーリング関数とウェーブレット関数

(3)、(4)を参照し、直交化係数を考慮して一般化を行う。
あるスケーリング関数 $\Phi(t)$ について次の関係が成り立つとする。

$$\begin{aligned} \Phi(\frac{t}{2}) &= \sqrt{2}\sum_n h_n\Phi(t-n) \quad (\ h_n \text{ は定数 }) \qquad (5) \\ \Psi(\frac{t}{2}) &= \sqrt{2}\sum_n g_n\Phi(t-n) \qquad (6) \\ g_n &= (-1)^n h_{1-n} \qquad (7) \end{aligned}$$

これらの関係はtwo scale関係といわれ、直交変換のために重要な関係式である。

3.5　h_n, g_n によるウェーブレット変換

初めに必要なことは、直交変換可能な h_n を決めることである。4次の決め方は[OGU2]に示した。その他、現在入手可能な h_n の値はDaubechies、symlets、Coiflets、および、Baylkin et al がある。これらを使うことによってウェーブレット変換が求められる。計算式を5.1に与えてある。また、(7) を9節で導く。

3.6　多重解像度解析

h_n, g_n を数値フィルターとみると多重解像度解析によるウェーブレット変換が理解できる。

いま、関数 $f(t)$ について、

$$s_{0,m} = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t-m)f(t)dt$$

が存在するとすると、

$$\begin{aligned} s_{1,m} &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t/2-m)f(t)dt \\ &= \sum_n h_n\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t-[2m+n])f(t)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n h_n s_{0,2m+n} \\
d_{1,m} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t/2-m) f(t) dt \\
&= \sum_n g_n s_{0,2m+n}
\end{aligned}
$$

と表される。

そこで、観測データが $s_{0,m}$ で与えられていると考え、

$$\text{スケーリング変換} \qquad s_{1,m} = \sum_n h_n s_{0,2m+n} \quad (8)$$

$$\text{ウェーブレット変換} \quad d_{1,m} = \sum_n g_k s_{0,2m+n} \quad (9)$$

によって第1ステップの直交ウェーブレット変換を定義する。

変換は h_n, g_n を数値フィルターとして計算しているから次数は大きくできない。ウェーブレット関数が時間軸で有界であることが必要である。

m が 1 増加するとデータを 2ずつずらせて計算している。時間幅を 2倍にとってフィルターを掛けることになる。

h_n をデータの和をとるような演算となるように決めると、g_n は差をとるような演算となる。

第2ステップ以降の変換は、スケーリング変換 $s_{1,m}$ について (8)、(9) と同様な変換を行えばよい。ウェーブレット変換は残すことにする。変換はステップごとにデータ数が半分になるから初めのデータ数は2の正のベキ(FFTと同じ)でなければならない。ステップの最後に両変換が1つずつとなって変換が終り、ウェーブレット変換の組と1つの スケーリング変換が残る。変換の度に時間軸を2倍ずつ拡大する。これが多重解像度解析の原理であり、残ったすべての変換値が直交ウェーブレット変換(ウェーブレットスペクトル)である。明らかにこれらはもとのデータ数と同じ数あり、互いに独立な直交変換であるから、データの逆変換が可能であり、エネルギー(パワー)の議論や波形の処理が可能である。

4. 正規直交ウェーブレット変換の定式化

[OGU2] で4次の h_n を求めることを説明した。この値を用いてウェーブレット変換の定式化をする。

4.1 変換マトリックス

データ数 $N = 2^{jmax}$ について、$(N \times N)$ の変換マトリックス W を以下のようにつくる。

$$
\begin{pmatrix}
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_4 & -h_3 & h_2 & -h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & h_4 & -h_3 & h_2 & -h_1 & \cdots & 0 \\
 & \cdots & & \cdots & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & h_4 & -h_3 & h_2 & -h_1 \\
h_3 & h_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_1 & h_2 \\
h_3 & -h_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_1 & -h_2
\end{pmatrix}
$$

4.2 ウェーブレット変換

例えば、データ数 16 のデータを、列ベクトル S^0 と置き、前節のウェーブレット変換を行う。次のステップのためにスケーリング変換、ウェーブレット変換をそれぞれ並べ換える。手続きを以下に示す。

$$
S^0 = \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \\ s_3^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{16}^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow WS^0 = \begin{pmatrix} s_1^1 \\ d_1^1 \\ s_2^1 \\ d_2^1 \\ s_3^1 \\ d_3^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_8^1 \\ d_8^1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \text{並べ換え} \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \\ s_3^1 \\ \vdots \\ s_8^1 \\ \hline d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ \vdots \\ d_8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ S^1 \\ \\ \hline \\ D^1 \\ \\ \end{pmatrix}
$$

s_i^1 と書いた上半分 S^1 が和に対応する要素であり、d_i^1 と書いた下半分 D^1 が差に対応し、(第1ステップの)ウェーブレット変換であり変換の過程で残しておく。次のステップでは和の要素についてのみウェーブレット変換を行う。1回のステップで要素の半数が和を表し、他の半数が差となる。和についてまたウェーブレット変換を繰り返す。最後に、和、差の要素が1つずつ残り、全てのステップのウェーブレット変換が終わる。残った要素はデータ数と同じ N ヶ ある。フィルターの決め方から、変換は正規直交系である。

データの変化が小さいところでの差は小さく、和は大きくなるから差を無視できるであろう。値の小さいデータは省略できるからデータ数が少なくなる、すなわち、データの圧縮が可能であるといえる。また、変化の激しいところ(不連続点など)では差の値が大きくなり卓越するであろう。不連続点の検出に有効であると予想される。

ステップごとに2倍ずつの時間範囲で和と差をとることになるからより全体を見ることになる。始めのステップが高周波成分に対応し、ステップが進むにつれて低周波成分を見ることに対応する。これが多重解像度解析の由来である。

変換のステップに対応してデータの並べ方を以下のよ

うにする。逆変換の計算に必要である。

$$
\left(\begin{array}{c} s_1^0 \\ s_2^0 \\ s_3^0 \\ s_4^0 \\ s_5^0 \\ s_6^0 \\ s_7^0 \\ s_8^0 \\ s_9^0 \\ s_{10}^0 \\ s_{11}^0 \\ s_{12}^0 \\ s_{13}^0 \\ s_{14}^0 \\ s_{15}^0 \\ s_{16}^0 \end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{c} s_1^1 \\ s_2^1 \\ s_3^1 \\ s_4^1 \\ s_5^1 \\ s_6^1 \\ s_7^1 \\ s_8^1 \\ \hline d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \\ d_7^1 \\ d_8^1 \end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{c} s_1^2 \\ s_2^2 \\ s_3^2 \\ s_4^2 \\ \hline d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \\ \hline d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \\ d_7^1 \\ d_8^1 \end{array}\right)
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{c} s_1^3 \\ s_2^3 \\ \hline d_1^3 \\ d_2^3 \\ \hline d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \\ \hline d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \\ d_7^1 \\ d_8^1 \end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{c} s_1^4 \\ \hline d_1^4 \\ \hline d_1^3 \\ d_2^3 \\ \hline d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \\ \hline d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \\ d_7^1 \\ d_8^1 \end{array}\right)
$$

5. 変換、逆変換の計算式

ウェーブレット変換の変換マトリックスから変換、並べ換えまでの手続きを一度で行うことができる。逆変換も一度にできる。そこで、一度にまとめた変換、逆変換を $\widetilde{W}$、$\widetilde{W}^{\mathrm{T}}$ と表す。以下が L 次変換の計算式である。

(1) 変換　$\widetilde{W}$

$$S_m^j = \sum_{n=1}^{L} h_n S_{n+2m-2}^{j-1} \tag{10}$$

$$D_{m+N_j}^j = \sum_{n=1}^{L} g_k S_{n+2m-2}^{j-1} \tag{11}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, jmax)$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots, N_j \ , \ N_j \ = \ 2^{jmax-j})$$

5.2　逆変換　$\widetilde{W}^{\mathrm{T}}$

逆変換は $jmax$ ステップでの値を初期値としてステップを順次元へもどす。一般に逆変換では波形処理のため数値を変えることがあるから完全に元と同じデータにもどるとは限らない。そこで区別のため逆変換での和、差の項を $\widetilde{S}^{j-1}$, $\widetilde{D}^{j-1}$ と書くことにする。(以下では、$j = jmax$ から始める場合について示してあるが任意のステップから始めることもできる。その場合は初期値をそのステップでの S^j, D^j にとればよい。)

初期値

$$\widetilde{S}_1^{jmax} = S_1^{jmax}$$
$$\widetilde{D}_1^{jmax} = D_1^{jmax}$$

計算式

$$\widetilde{S}_{2n}^{j-1} = \sum_{m=1}^{L/2} h_{2m} \widetilde{S}_{n-m+1}^j + \sum_{m=1}^{L/2} g_{2m} \widetilde{D}_{n-m+1-N_j}^j$$

$$\widetilde{S}_{2n-1}^{j-1} = \sum_{m=1}^{L/2} h_{2m-1} \widetilde{S}_{n-m+1}^j + \sum_{m=1}^{L/2} g_{2m-1} \widetilde{D}_{n-m+1-N_j}^j$$

$$(j = jmax, jmax-1, \ldots, 1)$$
$$(n = 1, 2, \ldots, N_j \ , \ N_j \ = \ 2^{jmax-j})$$

6. 周波数領域におけるウェーブレット変換

前節で時間領域でのウェーブレット変換を導いた。以下で周波数領域でのウェーブレット変換を考え、直交ウェーブレット変換を導く。そのために、b を連続変数と考える。

6.1　フーリエ変換によるウェーブレット変換の表現

6.1.1　フーリエ変換対

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

6.1.2　デルタ関数

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$$

6.1.3　ウェーブレット関数

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) \ \Leftrightarrow \ \sqrt{a}\phi^*(a\omega) e^{-i\omega b}$$
$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(a\omega) e^{-i\omega(b-t)} d\omega$$

6.2　ウェーブレット変換の表現

ウェーブレット変換 (1) で、a をパラメータ、b を変数と考えて、b についてフーリエ変換する。

$$F_a^*(\omega) = \sqrt{a} \ \overline{\phi^*(a\omega)} \ f^*(\omega) \tag{12}$$

逆変換から、ウェーブレット変換をフーリエ変換で表現。

$$F_a(b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi^*(a\omega)} f^*(\omega) e^{i\omega b} d\omega \tag{13}$$

6.3 逆ウェーブレット変換

逆ウェーブレット変換は次のように与えられる。

$$f(t) = \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{a}}\phi(\frac{t-b}{a})F_a(b)db \quad (14)$$

$$C = \int_0^\infty \frac{|\phi^*(\omega)|^2}{\omega}d\omega \quad (15)$$

ここで、逆変換が可能であるためには $1/C$ が存在すること、すなわち、(15) の右辺が有限に収束することが必要条件である。換言すると、

$$\lim_{\omega\to 0}\phi^*(\omega) = 0 \text{ , または、} \int_{-\infty}^\infty \phi(t)dt = 0 \quad (16)$$

が必要である。これを admissibility 条件という。
また、C には元があって $[t]^2$ である。
(14) のフーリエ変換は、

$$f^*(\omega) = \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{da}{a\sqrt{a}}F_a^*(\omega)\phi^*(a\omega)$$

したがって、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi C}\int_0^\infty \frac{da}{a\sqrt{a}}\int_{-\infty}^\infty F_a^*(\omega)\phi^*(a\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (17)$$

(注)　逆ウェーブレット変換の証明

逆ウェーブレット変換が存在する十分条件は (16) であるが、この証明の文献が見当たらない。ここで筋道を説明する。

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{a}}\phi(\frac{t-b}{a})F_a(b)db \\
&= \frac{1}{C}\int \frac{da}{a^2}\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\phi^*(a\xi)e^{-i\xi(b-t)}d\xi \\
&\quad \cdot\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\overline{\phi^*(a\omega)}f^*(\omega)e^{i\omega b}d\omega db \\
&= \frac{1}{2\pi C}\int \frac{da}{a}\phi^*(a\xi)\overline{\phi^*(a\omega)}\delta(\omega-\xi) \\
&\quad \cdot f^*(\omega)e^{i\xi t}d\omega d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi C}\int \frac{da}{a}|\phi^*(a\omega)|^2 f^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega
\end{aligned}$$

ここで、a の積分を取り出し、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\int_0^\infty |\phi^*(a\omega)|^2\frac{da}{a} \\
&= \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{|\phi^*(\mu)|^2}{\mu}d\mu \\
&= 1
\end{aligned}$$

とおくと、

$$C = \int_0^\infty \frac{|\phi^*(\omega)|^2}{\omega}d\omega \quad (18)$$

(18) が存在する条件が admissibility 条件である。

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= f(t) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.4 パーセバルの公式

信号のエネルギー（パワー）についてのパーセバルの公式がどのように成り立つか調べておく。

実関数 $f(t)$、$g(t)$ の積をフーリエ変換表示する。

$$\int_{-\infty}^\infty f(\tau)g(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f^*(\omega)\overline{g^*(\omega)}d\omega$$

$g(t)$ のウェーブレット変換を $G_a(b)$ として、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\int F_a(b)G_a(b)\frac{dadb}{a^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2 Ca}\int \overline{\phi^*(a\omega)}\ \overline{\phi^*(a\xi)}f^*(\omega)g^*(\xi) \\
&\quad \cdot e^{ib(\omega+\xi)}d\omega d\xi dadb \\
&= \frac{1}{2\pi C}\int \frac{1}{a}\overline{\phi^*(a\omega)}\ \overline{\phi^*(a\xi)}f^*(\omega)g^*(\xi) \\
&\quad \delta(\omega+\xi)d\omega d\xi da \\
&= \frac{1}{2\pi C}\int \frac{|\phi^*(a\omega)|^2}{a}da f^*(\omega)\overline{g^*(\omega)}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^\infty f^*(\omega)\overline{g^*(\omega)}d\omega
\end{aligned}$$

ここで、$f(t) = g(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f^*(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi C}\int_0^\infty \frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^\infty |F_a(b)|^2 db
\end{aligned}$$

これが、ウェーブレット変換におけるパーセバルの公式である。この最後の項を以下のように書き直す。

$$\frac{1}{2\pi C}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left|\frac{F_a(b)}{a}\right|^2 dadb \quad (19)$$

$\left|\frac{F_a(b)}{a}\right|^2$ が $dadb$ ($= a\Delta t$　：離散化による) 中に信号に含まれているエネルギーをウェーブレット変換で表したと考えることができる。

7. 周波数領域での直交ウェーブレット変換の構築

7.1 スケーリング関数の直交化

直交系のスケーリング関数には (5) に示したように以下の関係がある（t を書き換えてある)。

$$\Phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n\Phi(2t-n) \quad (20)$$

t についてのフーリエ変換は、

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n \Phi^*(\frac{\omega}{2})e^{in\omega/2} \\ &= m_h^*(\frac{\omega}{2})\Phi^*(\frac{\omega}{2}) \end{aligned} \tag{21}$$

ただし、

$$m_h^*(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{in\omega} \tag{22}$$

ここで、$m_h^*(\omega)$ はフーリエ級数の形をし、周期 2π を持つことを注意する。
$\Phi(t), \Phi(t-k)$ が正規直交関数系である条件は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\overline{\Phi(t-k)}dt = \delta_{k,0} \tag{23}$$

(ここで、$\delta_{k,0}$ はクロネッカーデルタ)
フーリエ変換で表すと、

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\overline{\Phi(t-k)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\omega}d\omega \sum_{l\in Z}|\Phi^*(\omega+2\pi l)|^2\end{aligned}$$

(注)

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\overline{\Phi(t-k)dt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &\quad \cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi^*(\xi)}e^{i\xi k - i\xi t}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\xi)\overline{\Phi^*(\xi)}e^{i\xi k}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi^*(\omega)|^2 e^{ik\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}[\cdots + \int_{-2\pi}^{0} + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \cdots] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\omega}d\omega \sum_{l\in Z}|\Phi^*(\omega+2\pi l)|^2 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ここで、正規化条件から $k=0$ として、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{l\in Z}|\Phi^*(\omega+2\pi l)|^2 d\omega = 1$$

を満たさねばならない。十分条件として、

$$\sum_{l\in Z}|\Phi^*(\omega+2\pi l)|^2 = 1 \qquad (0\le\omega\le 2\pi) \tag{24}$$

を与える。
(24) が成り立てば、$k\neq 0$ で (23) は 0 となり、正規直交条件を満たす。

しなければならないことは、(24) を満たすように $\Phi^*(\omega)$ を決めることである。
その前に以下の準備をする。
(21) を (24) に代入すると、

$$\sum_{l\in Z}|m_h^*(\frac{\omega}{2}+\pi l)|^2\ |\Phi^*(\frac{\omega}{2}+\pi l)|^2 = 1$$

$l=2m,\ 2m+1$ と奇数、偶数に分けて、周期性を考えて、

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in Z}|m_h^*(\frac{\omega}{2}+2\pi m)|^2|\Phi^*(\frac{\omega}{2}+2\pi m)|^2 \\ &+\sum_{m\in Z}|m_h^*(\frac{\omega}{2}+2\pi m+\pi)|^2|\Phi^*(\frac{\omega}{2}+2\pi m+\pi)|^2 \\ &= |m_h^*(\frac{\omega}{2})|^2\sum_{m\in Z}|\Phi^*(\frac{\omega}{2}+2\pi m)|^2 \\ &\quad +|m_h^*(\frac{\omega}{2}+\pi)|^2\sum_{m\in Z}|\Phi^*([\frac{\omega}{2}+\pi]+2\pi m)|^2\end{aligned}$$

$0\le\omega\le 2\pi$ で ω は任意の値をとるから、$(\omega/2+\pi)$ を $\omega/2$ におき変えて、

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in Z}|\Phi^*([\frac{\omega}{2}+\pi]+2\pi m)|^2 \\ &= \sum_{m\in Z}|\Phi^*(\frac{\omega}{2}+2\pi m)|^2 = 1\end{aligned}$$

$\omega/2$ を改めて ω とおき直して、

$$|m_h^*(\omega)|^2 + |m_h^*(\omega+\pi)|^2 = 1 \tag{25}$$

7.2 ウェーブレット関数の直交化

ウェーブレット関数の直交化を two scale 関係から行う。

$$\Psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n\Phi(2t-n) \tag{26}$$

スケーリング関数の場合と同じ計算から、

$$\Psi^*(\omega) = m_g^*(\frac{\omega}{2})\Phi^*(\frac{\omega}{2}) \tag{27}$$

$$\text{ただし、}\quad m_g^*(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n g_n e^{in\omega} \tag{28}$$

ここで、$m_g^*(\omega)$ もフーリエ級数の形をしていて周期 2π を持つ。
$\Psi(t), \Phi(t-k)$ が正規直交関数系である条件は、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t)\Phi(t-k)dt = 0 \tag{29}$$

フーリエ変換して、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(\omega)\overline{\Phi^*(\omega)}e^{ik\omega}d\omega = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\omega} d\omega \sum_{l\in Z} \Psi^*(\omega+2\pi l)\overline{\Phi^*(\omega+2\pi l)} = 0$$

$$\sum_{l\in Z} \Psi^*(\omega+2\pi l)\overline{\Phi^*(\omega+2\pi l)} = 0$$

直交化の十分条件は以下のようにおけばよい。

$$\Psi^*(\omega+2\pi l)\overline{\Phi^*(\omega+2\pi l)} = 0 \tag{30}$$

(25) を導いたと同じ計算をして、

$$m_g^*(\omega)\overline{m_h^*(\omega)} + m_g^*(\omega+\pi)\overline{m_h^*(\omega+\pi)} = 0 \tag{31}$$

ここで、

$$m_g^*(\omega) = e^{-i\omega}\overline{m_h^*(\omega+\pi)} \tag{32}$$

と置くと、

$$m_g^*(\omega+\pi) = -e^{-i\omega}\overline{m_h^*(\omega)}$$

から、(31) を満たす。

$$(27) \text{ から、} \quad \Psi^*(\omega) = e^{-i\omega/2}\overline{m_h^*(\frac{\omega}{2}+\pi)}\Phi^*(\frac{\omega}{2})$$

いま、とくに $\Phi(t)$ を (実の) 偶関数とすると、$\Phi^*(\omega)$、$m_h^*(\omega)$ は実関数となる。

$$\begin{aligned} & m_h^{*2}(\frac{\omega}{2}+\pi)\Phi^{*2}(\frac{\omega}{2}) \\ &= [1-m_h^{*2}(\frac{\omega}{2})]\Phi^{*2}(\frac{\omega}{2}) \quad [(25) \text{ から}] \\ &= \Phi^{*2}(\frac{\omega}{2}) - m_h^{*2}(\frac{\omega}{2})\Phi^{*2}(\frac{\omega}{2}) \\ &= \Phi^{*2}(\frac{\omega}{2}) - \Phi^{*2}(\omega) \quad [(21) \text{ から}] \end{aligned}$$

したがって、

$$\Psi^*(\omega) = e^{-i\omega/2}\sqrt{\Phi^{*2}(\frac{\omega}{2}) - \Phi^{*2}(\omega)} \tag{33}$$

$\Phi^*(\omega)$ が決まれば、$\Psi^*(\omega)$ も上式から求められる。

two scale 関係 (5)、(6)、正規直交関係 (23)、(29) から、すべてのスケーリング関数、ウェーブレット関数の正規直交性が示される。

また、(7) の h_k, g_k の関係も以下のように導出できる。(22) から、

$$\begin{aligned} & \overline{m_h^*(\omega+\pi)} \\ & \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k h_k e^{-ik(\omega+\pi)} \\ & \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k (-1)^k h_k e^{-ik\omega} \end{aligned}$$

$h_k = h_1, h_2, \cdots, h_L$ とすると、

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{L} (-1)^k h_k e^{-ik\omega}$$

ここで、$m = L+1-k$ とおくと、

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{L} (-1)^{L+1-m} h_{L+1-m} e^{-i(L+1-m)\omega}$$

ω も離散化されて、$\omega = \frac{2\pi}{L}n \quad (n = 0,1,2,\cdots,L-1)$ とおけるから、

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{L} (-1)^{m-1} h_{L-(m-1)} e^{-i\frac{2\pi}{L}(m-1)n}$$

(32) から、

$$m_g^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{L} (-1)^{m-1} h_{L-(m-1)} e^{i\frac{2\pi}{L}mn}$$

一方、(28) から

$$\begin{aligned} m_g^*(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_m g_m e^{im\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_m g_m e^{i\frac{2\pi}{L}mn} \end{aligned}$$

したがって、

$$g_k = (-1)^{k-1} h_{L-k+1} \quad (k = 1,2,\cdots,L)$$

いろいろと求めれれている h_k を用い、g_k を上の関係から決めると直交変換系が構築できる。数値フィルターとしてのウェーブレット変換の基礎が明確になったと思われる。

7.3 スケーリング関数の決め方

スケーリング関数は (24) を満たすように決めなければならない。一方、ウェーブレット関数は、(33) から決められる。スケーリング関数を決めることは難しいように思われるが以下のようにとると可能となる (Y.Meyer による)。

1. $\Phi^*(\omega) = \Phi^*(-\omega) \geq 0$
2. $\Phi^*(\omega) = \begin{cases} 1 & (\ |\omega| \leq 2\pi/3\ ) \\ 0 & (\ |\omega| \geq 4\pi/3\ ) \end{cases}$
3. $\Phi^{*2}(\omega) + \Phi^{*2}(\omega-2\pi) = 1$
   $(\ 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3\ )$

このように $\Phi^*(\omega)$ を定義すると、ω 軸で 2π ずつ平行移動しても関数が重なるところで 3. が成り立ち、(24) を満たすことが分かる。

$\Phi^*(\omega)$ は 1. から対称であるが、3. から一義的に決めることはできない。ここに任意性があり、いくつかの関数が用いられている。以下に、例をあげる。

7.4 ウェーブレット関数の例

7.4.1 Daubechies による

$$\Phi^*(\omega) = \begin{cases} 1 & (\ |\omega| \leq \frac{2\pi}{3}\ ) \\ 0 & (\ |\omega| \geq \frac{4\pi}{3}\ ) \\ \cos[\frac{\pi}{2}\nu^*(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1)] & (\ \text{otherwise}\ ) \end{cases}$$

$$\nu^*(\omega) = \begin{cases} 0 & (\ \omega < 0\ ) \\ 1 & (\ 1 < \omega\ ) \\ & \omega^4(-20\omega^3 + 70\omega^2 - 84\omega + 35) \\ & (\ 0 \le \omega \le 1\ ) \end{cases}$$

7.4.2 山田 ら による

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega) &= \sqrt{\xi^*(\omega)\xi^*(-\omega)} \\ \xi^*(\omega) &= \frac{\eta^*(\frac{4\pi}{3} - \omega)}{\eta^*(\omega - \frac{2\pi}{3}) + \eta^*(\frac{4\pi}{3} - \omega)} \\ \eta^*(\omega) &= \begin{cases} 0 & (\omega < 0) \\ e^{-1/\omega^2} & (0 \le \omega) \end{cases} \end{aligned}$$

7.4.3 小口 による

筆者は以下のような簡単な関数を用いたが上の関数によるものと計算結果に大きな違いは見られなかった。

$$\Phi^*(\omega) = \begin{cases} 1 & (\ |\ \omega\ | < \frac{2\pi}{3}\ ) \\ |\sin(\frac{3}{4}\omega)\ | & (\ \frac{2\pi}{3} \le |\ \omega\ | \le \frac{4\pi}{3}\ ) \\ 0 & (\text{ otherwise }) \end{cases}$$

これらを FFT によって時間関数に逆変換すれば スケーリング関数、ウェーブレット関数が求められる。

7.5 周波数領域におけるウェーブレット変換

以上で互いに直交するスケーリング関数、ウェーブレット関数を周波数領域で求めることができた。周波数領域でのウェーブレット変換は時間軸で複素関数 $\Psi(t)$ となるウェーブレット関数 $\Psi^*(\omega)$ を利用して以下のように定義する。

$$\begin{aligned} F_a(b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(\frac{t-b}{a})} f(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi^*(a\omega)} f^*(\omega) e^{i\omega b} d\omega \qquad (34) \end{aligned}$$

7.6 変換、逆変換の計算式

計算の準備が整ったので数値計算のための離散化を考える。簡単のためにデータは元なしとする。

7.6.1 データのフーリエ変換

フーリエ変換は当然 FFT による。データ数 N ($= 2^{jmax}$)、サンプリング間隔 Δt とすると、FFT の計算では、$\Delta t \Delta \omega\ =\ 2\pi/N$ ととる。

$t = m\Delta t,\ \omega = n\Delta\omega,\ f(m\Delta t) = f_m,$

$f^*(n\Delta\omega) = f_n^* \qquad (\ m, n\ =\ 0, 1, 2, \cdots, N-1\ )$

とおく。

離散値フーリエ変換対は、

$$\begin{aligned} f_n^* &= \Delta t \underline{f_n^*} \qquad (\text{ 元なしの部分を \_\_ で表す。}) \\ \underline{f_n^*} &= \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-i2\pi mn/N} \\ f_m &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{f_n^*} e^{i2\pi mn/N} \end{aligned}$$

で与えられ、$\sum$ の計算が元なしの量として FFT で高速に計算される。

7.6.2 ウェーブレット変換の離散化

1. a について

時間軸での変換と同じに、周波数についても2倍ずつに解像度を変えるように、

$a = 2^j$

ととる。

2. b について

フーリエ変換の計算式からも必要であるが、サンプリング間隔 Δt に対応させて、

$\Delta b = \Delta t$

ととる。ナイキスト周波数は時間軸での変換と同じ $1/2\Delta t$ である。離散化では $\Delta t\ =\ 1$ とするが、必要に応じて残しておく。

3. ウェーブレット変換の離散化

ウェーブレット関数がフーリエ変換で与えられるからウェーブレット変換もフーリエ変換で表した (34) を離散値化する。

$$\begin{aligned} & F_a(m\Delta t) \\ & \quad = \ \Delta t \frac{\sqrt{a}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\underline{\Psi^*}(an\Delta\omega)} \cdot \underline{f^*}(n) e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \end{aligned}$$

$\Delta t = 1$ から、$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ となり、

$$\begin{aligned} F_a(m) &= \Delta t \underline{F_a}(m) \\ \underline{F_a}(m) &= \frac{\sqrt{a}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\underline{\Psi^*}(\frac{2\pi}{N}an)} \underline{f^*}(n) e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \\ & (\ a = 2^j\ ) \qquad (35) \end{aligned}$$

7.6.3 逆ウェーブレット変換の離散化

逆変換は (17) 式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi C} \int_0^{\infty} \frac{da}{a\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} F_a^*(\omega) \Psi^*(a\omega) d\omega$$

を用いる。

$a\ =\ 2^j$ から、

$$\Delta a = 2^{j+1}\ -\ 2^j\ =\ 2^j\ =\ a$$

および、$C = (\Delta t)^2$ であることを考慮して、

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{j=0}^{jmax} f_j(m) \\ f_j(m) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{da}{a\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta t)^2 \underline{F_a^*}(n) \\ & \quad \cdot \Delta t \underline{\Psi^*}(an\Delta\omega) e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \cdot \frac{2\pi}{N\Delta t} \\ &= \frac{1}{N\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{F_a^*}(n) \underline{\Psi^*}(\frac{2\pi}{N}an) \\ & \quad \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \qquad (36) \end{aligned}$$

8. ウェーブレット変換の応用

ウェーブレット変換の応用は多方面に亘り簡単に解説できなくなっている。本報はウェーブレット変換の基礎を解説することが目的である。簡単に2次元への拡張を見ておこう。

8.1 2次元ウェーブレット変換

2次元フーリエ変換では、例えば、x軸を固定しt軸方向で変換し、次に変換されたω軸を固定しx軸方向で変換する。同様に、2次元ウェーブレット変換は、通常正方マトリックスに対して行われ、まず各列を変換し、次いで各行を変換する。行の変換はマトリックスの転置をとって列で変換し、結果の転置をとればよい。
2次元データが $(N \times N)$ マトリックス A の要素として与えられているとする。
演算は形式的に、

$$\{\widetilde{W}(\widetilde{W}A)^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} = \widetilde{W}A\widetilde{W}^{\mathrm{T}}$$

と表される。

2次元ウェーブレット変換では変換値が互いに独立な4領域に分かれる。以下に演算の順序とそれにつれて変換がどのように行われるかを示してある。ただし、和、差をとる演算を S, D で表してある。

1. $\widetilde{W}A \to \left(\dfrac{S}{D}\right)$

2. $(\widetilde{W}A)^{\mathrm{T}} \to \left(S^{\mathrm{T}} \mid D^{\mathrm{T}} \right)$

3. $\widetilde{W}(\widetilde{W}A)^{\mathrm{T}} \to \left(\begin{array}{c|c} SS^{\mathrm{T}} & SD^{\mathrm{T}} \\ \hline DS^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}} \end{array}\right)$

4. $(\widetilde{W}(\widetilde{W}A)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \to \left(\begin{array}{c|c} SS^{\mathrm{T}} & SD^{\mathrm{T}} \\ \hline DS^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}} \end{array}\right)$

ここで、例えば、SD^{T} はまず差をとって（転置して）和をとることを意味する。

次のステップの変換は，この領域のうち SS^{T} を対象とする。残った他の3領域の値をウェーブレット変換と考える。

逆変換は上の計算の逆演算から計算される。すなわち，形式的に

$$(\widetilde{W}A\widetilde{W}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \widetilde{W}A^{\mathrm{T}}\widetilde{W}^{\mathrm{T}}$$

で示される。
以上の計算を1次元のウェーブレット変換を使って実行することは簡単である。

8.2 連立1次方程式への応用

連立1次方程式

$$Ax = B$$

にウェーブレット変換を適用する。

$$\tilde{x} = \widetilde{W}x$$

$$\widetilde{B} = \widetilde{W}B$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A\widetilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{x} &= \widetilde{W}^{\mathrm{T}}\widetilde{B} \\ \widetilde{W}A\widetilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{x} &= \widetilde{B} \end{aligned}$$

これは、A, B をウェーブレット変換して連立方程式として解き、解を逆変換して初めの方程式の解が得られることを示している。なお、フィルターの次数より方程式の次数が低いときは必要なだけ、係数マトリックスの対角要素と右辺の要素を1、非対角要素を0と置けばよい。

9. おわりに

離散値ウェーブレット変換について時間領域、周波数領域での計算法、および、両者の関係を統一しながら基礎概念を解説してきた。筆者の目的が十分果たされたとは思わないがこの小報告を精読されればウェーブレット変換の基礎概念を理解できると思っている。本報を纏めるにあたって数多くの解説、研究報告を参考にさせてもらった。以下に主な参考文献を挙げておくが漏れたものもあるかもしれない。筆者が行ったことはあまりにもばらばらなウェーブレット変換の説明をできるだけ単一の形で解説したことである。参照した各著者に深甚なる感謝を捧げて本報を閉じる次第である。なお、数値解析には触れていないが本報の目的から外れるので割愛した。

参考文献

[OGU1] 小口雄康　Gabor ウェーブレットによるウェーブレット変換の計算式　法政大学計算センター研究報告(1996)

[OGU2] 小口雄康　離散値Wavelet変換への入り口　法政大学計算センター年報(1996)

1. 参考書など

[1] 斎藤兆古　Mathematica によるウェーブレット変換　朝倉書店(1996)

[2] 榊原進　ウェーブレットビギナーズガイド 東京電機大学出版局(1995)

[3] 山口 他　ウェーブレット特集　数理科学　サイエンス社(1992)

[4] Bruce,A. & Gao,Hong-Ye　S+Wavelet User's Manual　MathSoft(1994)

[5a] Coifman,R.R. & M.V.Wickenhauser
Wavelet Packet Laboratory for Windows　A K Peters,Ltd.(1993)

[5b] Coifman,R.R. & M.V.Wickenhauser
Wavelets and Adapted Waveform Analysis　A K Peters(1993)

[6] Daubechies I.　Ten Lectures on Wavelets　SIAM(1992)

[7] Kanasewich,E.R.　Time Sequence Analysis in Geophysics 3rd Ed.
The Univ. of Alberta Press(1981)

[8] Meyer,Y.　Wavelets　SIAM(1993)

[9] Press,W.H. et al　Numerical Recipies in FORTRAN 2nd Ed.　Cambridge Univ. Press(1992)

[10] Shen,Y.　Wavelet Transform in the Transforms and Applications Handbook　CRC Press (1995)

2. 論文など

[11] Beylkin,G. et al Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms 1. Wavelets and Applications in Proceedings of the International Conference(1989)

[12] Beylkin,G. et al Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms 1. Comm. Pure Appl. Math. Vol.XLIV(1991)

[13] Bruce,A et al Wavelet Analysis IEEE Spectrum(1996)

[14] Daubechies,I. Orthogonal Bases of Commpactly Supported Wavelets Comm. Pure Appl. Math. Vol.XLI(1988)

[15] Morlet,J. et al Wave Propagation and Sampling Theory - Part 1 & Part 2 Geophisycs Vol.47(1982)

[16] 小口雄康 直交ウェーブレット変換、および逆変換の計算式と計算例 1,2 物理探査学会学術講演論文集(1993,1994)

[17] 山口昌哉・守本晃 ウェーブレットとその応用 1 & 2 計測と制御 Vol.31(1992)

[18] 山口昌哉・山田道夫 ウェーブレット解析 科学 Vol.60(1990)

(注) その他多数の文献がある。上記の参考書から興味のあるテーマについて調べて欲しい。

キーワード.

ウェーブレット変換，　データ解析，　応用数学

. . . .

Summary.

Formulations of Normalized Orthogonal Discrete Wavelet Transforms

Yuko Oguchi
Hosei University Computer Center

Though wavelet analysises have been used in many fields of science and technology, it is quite difficult for students to understand the transform's mathematical bases. In this report, he intends to clear up the elementary foundations of normalized orthogonal discrete wavelet transforms by way of Fourier transform. It will be understood how to construct orthogonal systems in time space or frequency space, and the relations between both spaces.

Keywords.

Wavelet transform,　Data analysis,　Applied mathematics