法政大学学術機関リポジトリ

HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-07-09

限界状態論に基づく飽和粘性土の構成方程式 に関する考察と提案

草深, 守人 / KUSABUKA, Morito / 小宮, 隆之 / KOMIYA, Takayuki

(出版者 / Publisher)
法政大学計算センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of Computer Center, Hosei University / 法政大学計算センター研究報告
(巻 / Volume)
8
(開始ページ / Start Page)
115
(終了ページ / End Page)
122
(発行年 / Year)
1995-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00024705

限界状態論に基づく飽和粘性土の構成方程式に関する考察と提案

小宮 隆之
 法政大学工学部土木工学科[†]
 草深 守人
 法政大学工学部土木工学科[†]

土質材料の弾塑性構成方程式を決定する際には通常、降伏関数fおよび塑性ポテンシャルQが応力の関数として数学的に与えられる必要がある。しかし塑性ポテンシャルQを決定することには多くの困難を伴い、通常は関連流れ則を仮定しQ=fとして処理されてきた。

本論文では、限界状態論に基づく土質材料の構成方程式に関する既往の研究を原点から再検討する ことにより、構成方程式を導く過程における矛盾点を明らかにした。それにより、従来から決定が 困難とされてきた塑性ポテンシャルを、Cam-Clayモデルを中心とする限界状態論の展開に新たな 解釈を加えることにより数学的モデルとして与え、降伏関数を実験結果から近似するという構成方 程式を提案することができた。

提案した降伏関数は

$$f = (p - N)^{2} + (q - MN)^{2} - (p_{0} - N)^{2} - (MN)^{2} = 0$$

であり、*N*,*M*,*p*₀は材料パラメータである。また提案した降伏関数の実用性を評価、検討するために支持力試験を行い、既存モデルとの比較を行った。

1. 本研究の背景と目的

本研究の直接的な背景は、構造物の大型化傾向 や厳しい環境規制に伴い地盤の力学的挙動を数値解 析的に評価することが構造物の実務設計において重 要な位置を築きつつあること、さらにこの様な傾向 は大都市における地下空間利用の社会的要請により 今後ますます高まるものと予測されることなどにあ る。しかしながら、この分野に関するこれまでの研 究は、土の構成方程式の研究、土質試験法と試験結 果の評価手法の研究、数値計算手法の研究等が相互 にバランス良く関連してなされていたとは言いがた い。その結果として実務設計での使いにくさ、各分 野の研究成果の総合効果としての解析精度、効率が さほど向上していないなどの弊害が顕在化している。

本研究の目的は上記の一連の研究分野を相互に 関連づけて考察することにより、それぞれの境界領 域での問題点を明らかにし解決のための方策を考察 することにある。ただし研究の中心は、

- 限界状態論に基づく土質材料の構成方程式に関する既往の研究を原点から再検討することにより新たな解釈を加えること。
- それほど特殊ではない通常の土質試験によって 材料定数等を評価可能な構成方程式を提案する こと。
- 数値解析結果と実験値の比較から、新たに提案した構成方程式の実用性や問題点を明らかにすること。

の三点にある。

2. 限界状態論

一般に自然堆積粘土の応力-ひずみ関係は複雑で あり、あらゆる種類の土の統一的な構成方程式を構 築することはほとんど不可能に近いとされている。 このため、構成方程式に関する多くの研究では土の 種類、堆積過程、含水状態、排水条件等を限定し、そ れらを組み合わせることによって行われている。土

^{↑〒184} 東京都小金井市梶野町3-7-2

質材料の弾塑性構成方程式を決定する際には通常、 降伏関数f、および塑性ポテンシャルQが応力やひ ずみの関数として個別に数学的に与えられる必要が ある。近年、構成方程式として限界状態論に基づく モデルの利用が一般化されつつある。しかし塑性ポ テンシャルQを決定することには困難を伴い、通常 は関連流れ則を仮定しQ=fとして処理されてきた。 ここでは従来から用いられている限界状態論の解釈 について説明するとともにいくつかの矛盾点を明ら かにする。

2.1. 限界状態論の導入

2.1.1. 限界状態の定義

緩い(loose) 土試料がせん断される時は、破壊に 達する以前に徐々に降伏が進行する。すなわち応力 経路は、塑性変形を生じつつ種々の降伏曲面(硬化 キャップ)を通過する。降伏は材料が限界間隙比に 達するまで連続的に生じ、限界間隙比に達した以降 の変形に対しては、間隙比は一定値を維持する(図 1参照)。すなわち、材料の粒子配列がせん断中に体 積変化を生じなくなる様な状態を限界状態(Critical State)といい、それに対応する間隙比を限界間隙比 と呼ぶ。

一方、密な(dense) 土試料がせん断される時は、 図1に示すように、ピーク応力が存在し、その後応 力はひずみの軟化を生じつつ残留応力に達する。こ の様な材料では、ひずみの小さい初期段階で体積減 少を示した後、体積ひずみが一定となるまで膨張を 生じる。すなわち限界状態とは試料の応力状態と体 積の変化を生じずにせん断変形のみが進行する状態 のことを言う。この状態は以下のように表せる¹⁾。

$$\frac{\partial p}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_s} = 0 \tag{1}$$

2.1.2. 限界状態線

図2は正規圧密粘土の降伏挙動を研究するため にRoscoe等によって示されたものであり、飽和粘 土試料に関して初期圧密圧力を変え、排水試験、非 排水試験を行った結果を $(p \sim q)$ 平面上にプロット されている。図2から明らかなように、これらの応 力経路は幾何学的に相似であり、それらの極限状態 は排水条件に関わらず $(p \sim q)$ 平面上の一つの直線 上にあることが観測された。この直線を限界状態線



(Critical State Line= C.S.L.) と呼ぶ。また、図3は 正規圧密線 (Normally Consolidated Line= N.C.L.) と限界状態線を $(e \sim \ln p)$ 平面上にプロットしたも ので、この二つが互いに平行であることが明らかに された。このことは土材料の破壊は、その間隙比が 限界間隙比に達した時に生じ、 $(p \sim q)$ 平面上での この直線の傾き *M*は、材料パラメータであること を示している。

2.1.3. 状態境界面

図4は正規圧密線と限界状態線を(p、q、e)空間に プロットしたもので、状態境界面(State Boundary Surface)と呼ばれている。すなわち状態境界面は正 規圧密線と限界状態線によって囲まれる降伏曲面と して定義される。土の応力状態がその内側にあると きは弾性的挙動を示し、曲面上に到達すると土が降



$$\ln p$$





伏したことを示し、外側に位置することはできない。

2.2. 限界状態論に基づく降伏関数

Cam-Clayモデルは限界状態論に基づく降伏関 数の一つであり、1960年代の初め頃ケンブリッジ 大学の研究者グループによって開発された。修正 Cam-Clayモデルは1968年にRoscoeとBurlandに よって提案された。以下にそれらの誘導過程を示 す²⁾。

2.2.1. Cam-Clay モデルの誘導

応力比 $q/p \epsilon \eta$, その増分形を $dq = pd\eta + \eta dp$ 、 降伏曲面の傾き $\epsilon \psi = -dq/dp$ とすると降伏曲面の 一般的な形状として式(2)を得る。また増分ひずみ ベクトルはどの応力状態においても降伏曲面と直交 することから式(3)の関係を導く。

$$\frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} \cdot \frac{dq}{dp} = -1 \tag{3}$$

Cam-Clay モデルの場合、状態境界面上で降伏が進む時に消散されるエネルギーは、塑性せん断ひずみ増分 $d\varepsilon_{P}^{p}(=d\varepsilon_{s})$ を用いて、

$$dW = pd\varepsilon_{v}^{p} + qd\varepsilon_{s}^{p} = Mpd\varepsilon_{s}$$
(4)

と仮定されている。式(3)、式(4)より降伏曲面の傾 きvは応力比nのみの関数として次式となる。

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{1}{M - \eta} = \frac{1}{\psi} \tag{5}$$

式(5)のように、ψが決定されれば、式(2)を積分す ることにより降伏関数として、式(7)が得られる。

$$\int_{0}^{\eta} \frac{1}{M} = -\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} \tag{6}$$

$$f = Mp \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) - q \tag{7}$$

一方、修正Cam-Clayモデルの場合、状態境界面 上で降伏が進む時に消散されるエネルギーは、Cam-Clayの仮定に塑性体積ひずみ増分degを加えて、

$$dW = pd\varepsilon_{v}^{p} + qd\varepsilon_{s}^{p} = p\sqrt{(d\varepsilon_{v}^{p})^{2} + M^{2}(d\varepsilon_{s}^{p})^{2}} \quad (8)$$

と仮定されている。Cam-Clayと同様にψが、

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} = \frac{1}{\psi} \tag{9}$$

のように決定されれば降伏関数として、式(11)が得られる。

$$\int_{0}^{\eta} \frac{2\eta d\eta}{M^{2} + \eta^{2}} = -\int_{p_{0}}^{p} \frac{dp}{p}$$
(10)

$$f = M^2 p^2 - M^2 p_0 p + q^2 \tag{11}$$

Cam-Clayモデルで予測するとせん断開始初期 においても間隙水圧が発生するが、修正Cam-Clay モデルではある程度せん断が進行してからの発生と

第8卷

なる。また、せん断速度の違いでは、ゆっくりせん 断したデータに合うのがCam-Clay、速いせん断に 合うのが修正Cam-Clayである。したがって、Cam-Clayが現場のデータに良く合い、修正Cam-Clayが 通常の実験データに良く合うとされている。

修正Cam-Clay モデルで仮定している式(8)の方 が式(4)より合理的に見えるが、式(5)を式(4)に代 入してみると次式となり、

$$dW = pd\varepsilon_{v}^{p} + qd\varepsilon_{s}^{p}$$

$$= p\left(M - \frac{q}{p}\right)d\varepsilon_{s}^{p} + qd\varepsilon_{s}^{p}$$

$$= Mpd\varepsilon_{s} \qquad (12)$$

もともと式(12)には*de*?の項が入っていたが誘導の 仮定で消去されたにすぎない。

2.3. 降伏関数の解釈と矛盾点

ここでは正規圧密された飽和粘性土の非排水条件を例に従来の限界状態論に基づく降伏関数の解釈 について説明を進めていく。

2.3.1. 非排水応力経路

図4において圧密圧力poで等方圧密(図中OA)さ れた土がいったん除荷(図中AB)された後、点Bか らせん断を開始する。非排水条件の応力経路は間隙比 一定の面 (図中 CDEF) と弾性壁面 (Elastic Wall)(図 中AGHI)の交線(図中BG)上に拘束されつつ点G で降伏し、さらに硬化しつつ点Dで限界状態に達す る。一方、非排水条件での降伏過程に関するこれま での解釈では、図5の $(p \sim q)$ 面上において、点G から点Jへ硬化する過程で新しい降伏面を形成して いることになる。しかし、この経路GJは図4に示す 通り、点Gから点Jの過程で非排水条件にも関わら ず、間隙比が変化しているという矛盾を生じている。 すなわち、従来の解釈に矛盾が生じる出発点は、式 (5) と式(9) を降伏曲面上で考えた誤りにあり、本来 は塑性ポテンシャル面上で成立すべきである。換言 すれば、Cam-Clayモデル等の従来のモデルは、 塑 性ポテンシャルが先に明らかにされ、関連流れ則を 仮定したモデルであると理解すべきである。



新たな解釈と提案

3.1. 提案した降伏関数

前章の考察から、ここでは従来のCam-Clayモ デル等を塑性ポテンシャル関数と解釈し、新たな降 伏関数の導入について検討する。図6は非排水三軸 圧縮試験の応力経路を示している。圧密圧力によら ず土はせん断開始直後から降伏しているとすれば、 この応力経路は降伏関数を(*p* - *q*)面に投影したも のといえる。そこで降伏関数を限界状態線上に中心 を持つ円で近似することにした³⁾。限界状態線は、

$$q = Mp \tag{13}$$

で表され、(p-q)面上の(N, MN)に中心が位置する 円とp軸との交点を p_0 すなわち圧密圧力とすると、 今回提案した降伏関数fは以下の式のように表すこ とができる。

$$f = (p - N)^{2} + (q - MN)^{2} - (p_{0} - N)^{2} - (MN)^{2} (14)$$

上式において*M*は限界状態線の傾き、*p*oは圧密圧 力、*N*は圧密圧力に関係する材料パラメータとし た。図6中に提案した降伏関数のモデルを示した。 実際の圧密圧力*p*oと*N*の値は表1に示すようにほぼ 線形の関係にあり、次式で表される。

$$N = m_0 p_0 \tag{15}$$

したがって、本質的には圧密圧力によらず土の種類 によって一定値を示すmoが材料パラメータである。



1able 1 庄省庄月かとNの別	係	到	0	N	2	po	圧力	圧密,	1	able	Г
-------------------	---	---	---	---	---	----	----	-----	---	------	---

圧密圧力 po	N
0.67	0.11
0.96	0.14
1.19	0.16
1.43	0.26
1.62	0.38
1.90	0.44

4. 模型実験による既存モデルとの 比較

4.1. 模型実験

今回提案した降伏関数の適用性や問題点を明ら かにするために、模型実験地盤において支持力試験 を行い、既存モデルとの比較を行った。実験で使用 した試料は江東区青梅2丁目タイム24ビル敷地内 (GL-4m)より採取されたCH級(日本統一分類法に よる)の粘性土である。地盤改良中の現場で採取さ れたものであり、部分的に生石灰が少量混入してい た。試料土の含水量が液性限界の10%増しになるよ うに純水を加えた後、ソイルミキサによって軽くミ キシングした。その後、振動落下方式により2mmふ るいを通過させた。さらにバイブレータをかけ含水 比を均一にした。次に試料内に混入している貝殻等 の異物を取り除くために、振動を加えつつ0.85mm ふるいを通過させた。

再圧密は、上下排水可能な圧密装置で行った。 圧密槽に試料を投入し、バイブレータを20分間か けた後、真空ポンプで気泡を取り除く作業を繰り 返した。脱気完了後の試料土は圧密装置により所 定の圧力で圧密することにより正規圧密粘土を作 製した。圧密圧力は0.75,1.25,1.75,2.25kgf/cm²の 4種類である。試験はモールドを付けたままの状態 で供試体とした。供試体の大きさは直径200mm、高 さ200mmである。圧密槽内の地盤表面部を持具付 きカッターを用いて水平に切削除去し、地盤と載荷 板との摩擦を低減するためにシリコングリースを塗 布したφ50のたわみ性円形載荷板により段階的に載 荷した。

4.2. 各種材料パラメータの決定

計算に必要な材料パラメータを決定するために 行われる土質試験は、実用性を考慮してごく一般的 に行われている試験に限定することにした。今回の 計算に使用した基本的な材料パラメータは一次元圧 密試験、三軸試験(*CU*,*CD*)から以下のように決定 した。

限界状態線の傾きM

飽和粘性土試料に対し、初期圧密圧力を変えて行われた三軸圧密非排水試験より、材料定数である限界 状態線の傾きMを求める。図7より

M = 1.549



載荷過程の勾配λ、除荷再載荷過程の勾配κ

図8は飽和粘性土の一次元圧密過程をe-logp平面 上で示したものである。載荷過程の勾配入、除荷載



Fig. 8 一次元圧密過程

荷過程の勾配κは、図8中のそれぞれの傾きより以下のように決定した。

$$\lambda = C_C/2.303 = 0.118$$

 $\kappa = C_S/2.303 = 0.040$

初期間隙比eo

同じく図8中の載荷および除荷過程の二つの直線は、

 $e_c = 1.18 - 0.272 \log p_c^*$ $e_c = e_0 - 0.092 \log p^*$

で表すことができる。ただし e_0 は圧密圧力p = 1の時における間隙比である。

今回の実験の場合、非排水状態であることから、 除荷時の応力の解放は少ないと考えて、過圧密比は 1.5とした。ポアソン比は0.25で統一した。土質材 料の場合、実験から直接ヤング率Eを求めることは 困難である。そのため p_0, e_0, κ より体積弾性係数K、 せん断弾性係数Gを求めてそれに相当するヤング率 を計算する。以下の表2に各圧密圧力 p_0 における初 期間隙比 e_0 、K、G、Eを示す。ただし p_0 、K、G、 Eの単位は、 kgf/cm^2 である。

Table 2 圧密圧力 p_0 、初期間隙比 e_0, K, G, E

	CASE1	CASE2	CASE3	CASE4
PO	0.75	1.25	1.75	2.25
eo	1.190	1.146	1.120	1.100
K	41.06	67.06	92.75	117.23
G	24.6	40.2	55.7	70.9
E	61.5	100.5	139.1	177.2

4.3. 有限要素解析

解析に使用した有限要素は、8節点4辺形要素で ある。また、今回の実験の場合は、上下方向のみ排 水、変形可能な一次元圧密装置で圧密し、正規圧密 状態としたが、供試体の大きさは高さ20cm、直径 20cmであるため初期応力は供試体内ですべて一定 とした。すなわち、非排水条件を仮定していること から圧密圧力=初期応力とした。さらに、非排水解 析には以下に示すような有効応力法を用いた。

有効応力の原理は次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{m}\boldsymbol{u} = \mathbf{D}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m}\boldsymbol{u} \tag{16}$$

ここでmは、垂直応力成分に1をせん断応力成分に 0を持つ列マトリックスである。飽和粘性土の体積 ひずみ増分を de_{5}^{f} とすると、非排水条件下で発生す る過剰間隙水E duは、飽和粘性土の体積弾性係数 を K_{f} とすると次式のようになる。

$$du = K_f d\varepsilon_v^f = K_f \mathbf{m}^T d\varepsilon \tag{17}$$

したがって、通常のDマトリックスを

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' + \mathbf{m}\mathbf{m}^T K_f \tag{18}$$

とすることにより、非排水状態とした。

4.4. 実験および計算結果

ここでは今回行った支持力試験の結果である荷 重-変位関係を示すとともに、有限要素解析による 結果との比較および提案した構成則の適用性につい て考察する。比較した既存モデルは修正 Cam-Clay モデル、Cam-Clay モデルであり関連流れ則を仮定 している。また、本研究で提案した弾塑性構成方程 式による解析は降伏関数に、

$$f = (p - N)^{2} + (q - MN)^{2} - (p_{0} - N)^{2} - (MN)^{2}$$
(19)

を、塑性ポテンシャルには、

$$Q = M^2 p^2 - M^2 p_0 p + q^2 \tag{20}$$

を用いた非関連流れ則を仮定した。

図9、図10、図11、図12は、それぞれ圧密圧力 0.75、1.25、1.75、2.25(kgf/cm²)の荷重-変位関係 である。既存モデルは低い圧密圧力の段階で実験値 に近いが、圧密圧力が高くなるにつれて両者の差が

法政大学計算センター研究報告

法政大学計算センター研究報告, 8, 115-122 (1995)

拡大する。これは低圧密圧力領域では、降伏関数と 塑性ポテンシャルがほぼ近い形状を示し、比較的良 好な計算結果を与えたものと予測される。一方、提 案するモデルは、全体的に剛性が高めに評価される 傾向にあるが、圧密圧力が高くなるにつれて実験値 に近づく。これらの結果は、まだ十分に満足のいく ものではないが、計算プログラムの再検討と実験精 度の改善を図ることにより向上するものと思われる。



Fig. 9 荷重-変位関係(0.75kgf/cm²)



Fig. 10 荷重-変位関係(1.25kgf/cm²)

5. 結論

限界状態論に基づく土質材料の構成方程式に関 する既往の研究を原点から再検討することにより、 構成方程式を導く過程における矛盾点を明らかに した。それにより従来から決定が困難とされてきた 塑性ポテンシャルを、Cam-Clayモデルを中心とす る限界状態論の展開に新たな解釈を加えることによ り数学的モデルとして与え、降伏関数を実験結果か ら近似するという構成方程式を提案することができ た。また、数値解析結果を支持力問題に関する模型



実験と比較することによって、提案する構成則の妥 当性について考察した。その結果、定性的には実験 値を表現しえるものの、圧密圧力が大きくなるにつ れ両者の差が大きくなり十分に満足のいくものでは ない。この理由は今回開発した計算プログラムおよ び実験方法等に何らかの不備があるものと考えられ る。今後は計算プログラムの十分なテストと、処理 プロセスの問題点を明らかにし改善を図っていく必 要がある。さらに、実験方法等については、特に実 験地盤の初期条件を明確に把握するための手法等に ついて再検討を要するものと思われる。

参考文献

- Britto, A.M. and Gunn, M.J., Critical state soil mechanics via finite elements, (Chichester:Ellis Horwood Ltd, 1987)
- 2) C.S.Desai and H.J.Siriwardane, Constitutive laws for engineering materials, (Prentice-Hall, 1984),
- 小宮 隆之、限界状態論に基づく飽和粘性土の 構成方程式に関する考察と提案、法政大学大学 院工学研究科建設工学専攻修士論文(1995)

キーワード

122

限界状態論、状態境界面、Cam-Clay モデル、降伏関数、塑性ポテンシャル、構成方程式、模型実験

.....

Summary

Constitutive Laws for Saturated Clay Based on the Critical State Soil Mechanics Takayuki KOMIYA Department of Civil Engineering, Hosei University[†] Morito KUSABUKA Department of Civil Engineering, Hosei University[†]

This study aims to propose a new yielding function by stress-path of the undrained triaxial test. In the critical state soil mechanics, yielding functions, which is Cam-Clay or modified Cam-Clay, can be obtained by considering the dissipated energy while undergoing deformation on the state boundary surface. Depending on the assumption, these functions are regarded as plastic potential. To evaluate a plactical use, the comparison was performed between the numerical predictions and measuring in model experiment.

As the conclusion, measured and predicted vertical displacements at the surface of the clay are matched in the low consolidation pressure. But in the high consolidation pressure using Cam-Clay model, it tends to predict low bearing capacity. On the other hand, using a proposed yielding function, slope of the curve is similar. In any case, the quality of these calculations depends on the specifications and selection of soil parameters for the models.

Key Words

critical state soil mechanics, state boundary surface, cam-clay model, yielding function, plastic potential, constitutive law, model experiment