

固体力学における混合型変分原理に対する一考察

NISHIMURA, Tsuyoshi / 武田, 洋 / TAKEDA, Hiroshi / 西村, 毅

(出版者 / Publisher)

法政大学計算センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of Computer Center, Hosei University / 法政大学計算センター研究報告

(巻 / Volume)

6

(開始ページ / Start Page)

11

(終了ページ / End Page)

14

(発行年 / Year)

1993-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00024676>

固体力学における混合型変分原理に対する一考察

武田 洋

法政大学計算センター*

西村 毅

ハザマ技術研究所**

1. はじめに

有限要素法による固体力学問題の解析では精度向上のために混合型変分原理を基礎とする有限要素定式が広く用いられており, 特に曲げや非圧縮性を含む問題で多くの成功例が報告されている。

ここでは変位, 応力, ひずみ, 初期応力, 初期ひずみを独立変数と考える支配方程式を出発として, Hu-Washizu の変分原理, Hellinger-Reissner の変分原理および仮想仕事の原理を基礎とする古典的有限要素定式を整理するとともに, 現時点で高精度要素として着目されている Pian-Sumihara 要素や Simo-Rifai 要素に対する定式を特別の場合として導く混合型有限要素定式について論じる。

2. 古典的変分原理と混合型定式

ここでは 5-変数場の支配方式を出発点として, 初期応力と初期ひずみを含む問題に対する Hu-Washizu の汎関数を基礎とする混合型有限要素定式, Hellinger-Reissner の汎関数を基礎とする混合型有限要素定式および仮想仕事の原理を基礎とする変位型有限要素定式について整理する。

2.1 5-変数場の支配方程式

ここで初期応力と初期ひずみを独立と考えると, 領域 Ω における弾性問題は次の 5 つの支配方程式によって表される¹⁾。

$$\operatorname{div} \sigma + q = 0 \quad (1)$$

$$\sigma = D \cdot \varepsilon + s \quad (2)$$

$$\varepsilon = \nabla^s u + e \quad (3)$$

$$s = \bar{s}_0 \quad (4)$$

$$e = \bar{e}_0 \quad (5)$$

ここで u は変位, q は物体力, D は構成テンソル, σ は応力, ε はひずみであり, s と e は初期応力と初期ひずみであり, $\bar{s}_0$ と $\bar{e}_0$ は規定された初期応力と初期ひずみの値である。初期応力や初期ひずみが存在しない問題に対しては上式において $\bar{s}_0 = 0$ および $\bar{e}_0 = 0$ と置けばよい。

境界条件としては次式を考える。

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (6)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{p} \quad \text{on } \Gamma_p \quad (7)$$

ここで $\bar{u}$ は幾何学的境界 Γ_u 上で規定された変位の値であり, $\bar{p}$ は力学的境界 Γ_p 上で規定された表面力の値である。

2.2 3-変数場の基礎方程式と有限要素定式

-Hu-Washizu の変分原理

式(4)を式(2)に代入し, 式(5)を式(3)に代入することにより次の 3 つの支配方程式が得られる。

$$\operatorname{div} \sigma + q = 0 \quad (8)$$

$$\sigma = D \cdot \varepsilon + s_0 \quad (9)$$

$$\varepsilon = \nabla^s u + e_0 \quad (10)$$

上式の弱形式は次のように表される。

$$\int_{\Omega} \nabla^s u \cdot \sigma d\Omega - G_{\text{ext}}(u) = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \cdot [D \cdot \varepsilon + s_0 - \sigma] d\Omega = 0 \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot [\nabla^s u + e_0 - \varepsilon] d\Omega = 0 \quad (13)$$

ここで $G_{\text{ext}}(u)$ は仮想外力仕事であり, つぎの通りである。

$$G_{\text{ext}}(u) = \int_{\Omega} u \cdot q d\Omega + \int_{\Gamma} u \cdot p d\Gamma \quad (14)$$

式(11)~(13)を停留条件として導く汎関数は次の Hu-Washizu の汎関数である。

$$\Pi_{\text{HW}}(u, \varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \cdot D \cdot \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \cdot (\nabla^s u + e_0 - \varepsilon) d\Omega - G_{\text{ext}}(u)$$

ここで次の有限要素補間を導入する。

$$u = N_u u^e \quad (15)$$

$$\nabla^s u = B_u u^e \quad (16)$$

$$\varepsilon = N_{\varepsilon} \varepsilon^e \quad (17)$$

$$\sigma = N_{\sigma} \sigma^e \quad (18)$$

ここで添字 e は要素節点の値を表し, 仮想量に対する補間は Bubnov-Galerkin 型であるものとし, 式(15)~(17)を式(11)~(13)に代入すると次の有限要素方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{u\sigma} \\ \cdot & k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\sigma} \\ \text{対称} & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ \varepsilon^e \\ \sigma^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_u \\ p_{\varepsilon} \\ p_{\sigma} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここで k_{ij} および p_i は次の通りである。

$$k_{u\sigma} = \int_{\Omega^e} B_u^t N_{\sigma} d\Omega^e \quad (20)$$

$$k_{\varepsilon\varepsilon} = \int_{\Omega^e} N_{\varepsilon}^t D N_{\varepsilon} d\Omega^e \quad (21)$$

$$k_{\varepsilon\sigma} = - \int_{\Omega^e} N_{\varepsilon}^t N_{\sigma} d\Omega^e \quad (22)$$

$$p_u = \int_{\Omega^e} N_u^t q d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} N_u^t p d\Gamma^e \quad (23)$$

$$p_{\varepsilon} = - \int_{\Omega^e} N_{\varepsilon}^t s_0 d\Omega^e \quad (24)$$

$$p_{\sigma} = - \int_{\Omega^e} N_{\sigma}^t e_0 d\Omega^e \quad (25)$$

* 〒184 東京都小金井市梶野町3-7-2

** 〒305 茨城県つくば市大学刈間字西向

ここで変数 u^e 以外の要素変数を個々の要素で独立に選ぶと、これらの変数は要素毎に前もって消去することができ、次の局所化混合法による通常の変位法と同様な要素剛性マトリックスが得られる²。

$$\hat{k}_{uu}^e = k_{u\sigma} (k_{\varepsilon\sigma} k_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} k_{\varepsilon\sigma})^{-1} k_{u\sigma}^T \quad (26)$$

2.3 2変数場の基礎方程式と有限要素定式

—Hellinger-Reissner の変分原理

式(9)に式(10)を代入し、左から D^{-1} をかけることにより次の2つの支配方程式が得られる。

$$\operatorname{div} \sigma + q = 0 \quad (27)$$

$$D^{-1} \cdot \sigma = (\nabla^s u + e_0) + D^{-1} \cdot s_0 \quad (28)$$

上式の弱形式は次のように表される。

$$\int_{\Omega} \nabla^s u^* \cdot \sigma d\Omega - G_{\text{ext}}(u) = 0 \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} \sigma^* \cdot [\nabla^s u + e_0 - D^{-1} \cdot (\sigma - s_0)] d\Omega = 0 \quad (30)$$

式(29)と式(30)を停留条件として導く汎関数は次の Hellinger-Reissner の汎関数である。

$$\Pi_{\text{HR}}(u, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \cdot D \cdot \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \cdot (\nabla^s u + e_0 D^{-1} \cdot s_0 - \varepsilon) d\Omega - G_{\text{ext}}(u)$$

式(15)、(16)、(18)を式(11)~(13)に代入すると次の有限要素方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{u\sigma} \\ \text{対称} & -k_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ \sigma^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_u \\ p_\sigma \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ここで $k_{\sigma\sigma}$ 、 p_σ は次の通りである。

$$k_{\sigma\sigma} = \int_{\Omega^e} N_\sigma^T D^{-1} N_\sigma d\Omega^e \quad (32)$$

$$p_\sigma = - \int_{\Omega^e} N_\sigma^T (e_0 - D^{-1} \cdot s_0) d\Omega^e$$

ここで局所化混合法による剛性マトリックスは次のようになる。

$$\hat{k}_{uu}^e = k_{u\sigma} k_{\sigma\sigma}^{-1} k_{u\sigma}^T \quad (33)$$

2.4 1変数場の基礎方程式と有限要素定式

—仮想仕事の原理

式(9)に式(10)を代入し、その結果を式(8)に代入することにより次の1つの支配方程式が得られる。

$$\operatorname{div}[D \cdot (\nabla^s u + e_0) + s_0] + q = 0 \quad (34)$$

上式の弱形式は次のように表される。

$$\int_{\Omega} \nabla^s u^* \cdot [D \cdot (\nabla^s u + e_0) + s_0] d\Omega - G_{\text{ext}}(u) = 0 \quad (35)$$

式(35)を停留条件として導く汎関数は次のポテンシャルエネルギーである。

$$\Pi_{\text{vW}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^s u \cdot D \cdot \nabla^s u d\Omega - \int_{\Omega} \nabla^s u \cdot (D \cdot e_0 + s_0) d\Omega - G_{\text{ext}}(u) \quad (36)$$

式(15)と式(16)を式(35)に代入すると次の有限要素方程式が得られる。

$$k_{uu} u^e = p_u \quad (37)$$

ここで k_{uu} 、 p_u は次の通りである。

$$k_{uu} = \int_{\Omega^e} B_u^T D B_u d\Omega^e \quad (38)$$

$$p_u = \int_{\Omega^e} N_u^T q d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} N_u^T p d\Gamma^e + \int_{\Omega^e} B_u^T (D \cdot e_0 + s_0) d\Omega^e \quad (39)$$

3. Navier の変位方程式を基礎とする混合型有限要素法

ここでは最近高精度要素として着目されている混合型有限要素について考察する。これらに要素は変位型有限要素に補正項を加える形式で定式化されており、ここではつり合い方程式として拡張した Navier の変位方程式を基本とし、初期応力と初期ひずみが内場を考慮することによりこれらに定式を考察する。

3.1 Navier の変位方程式を基礎とする支配方程式

式(3)を式(2)に代入し、その結果を式(1)に代入し $\bar{s}_0 = 0$ および $\bar{e}_0 = 0$ と置くことにより次の5つの支配方程式が得られる。

$$\operatorname{div}[D \cdot (\nabla^s u + e) + s] + q = 0 \quad (40)$$

$$\sigma = D \cdot \varepsilon + s \quad (41)$$

$$\varepsilon = \nabla^s u + e \quad (42)$$

$$s = 0 \quad (43)$$

$$e = 0 \quad (44)$$

3.2 ひずみ補正型混合法の基礎方程式と有限要素定式—Simo-Rifai 要素

式(44)を式(40)と式(41)に代入し、式(42)を式(41)に代入することにより次の3つの支配方程式が得られる。

$$\operatorname{div}[D(\nabla^s u + e)] + q = 0 \quad (45)$$

$$\sigma = D \cdot (\nabla^s u + e) \quad (46)$$

$$e = 0 \quad (47)$$

上式の弱形式は次のように表される。

$$\int_{\Omega} \nabla^s u^* \cdot D \cdot (\nabla^s u + e) d\Omega - G_{\text{ext}}(u) = 0 \quad (48)$$

$$\int_{\Omega} e^* \cdot [D \cdot (\nabla^s u + e) - \sigma] d\Omega = 0 \quad (49)$$

$$\int_{\Omega} \sigma^* \cdot e d\Omega = 0 \quad (50)$$

ここで式(15)~(18)に加えて次の有限要素補間を導入する。

$$e = N_e e^e \quad (51)$$

上式と式(15)~(18)を式(48)~(50)に代入すると次の有限要素方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & 0 & k_{ue} \\ \cdot & 0 & k_{\sigma e} \\ \text{対称} & \cdot & k_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ \sigma^e \\ e^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

ここで k_{uu} は変位法の場合と同一で式(38)に示す通りであり、他の成分は次の通りである。

$$k_{ue} = \int_{\Omega^e} B_u^T N_e d\Omega^e \quad (53)$$

$$k_{\sigma e} = \int_{\Omega^e} N_\sigma^T N_e d\Omega^e \quad (54)$$

$$k_{ee} = \int_{\Omega^e} N_e^T D N_e d\Omega^e \quad (55)$$

ここで局所化混合法による剛性マトリックスは次のようになる。

$$\hat{k}_{uu}^e = k_{uu} - k_{ue} k_{ee}^{-1} k_{ue}^T \quad (56)$$

この形の要素剛性マトリックスを導く要素は Simo-Rifai 要素と呼ばれ、具体的な補間関数や非適合要素との関連性については文献 [4] に論じられている。

3.3 応力補正型混合法の基礎方程式と有限要素

定式-Pian-Sumihara 要素

Simo-Rifai 要素ではつり合い方程式と構成方程式にひずみの補正項 e を導入したが、ここではつり合い方程式とひずみ-変位方程式に応力の補正項を導入する。式(43)を式(40)に代入し、式(42)を応力の補正項を用いて表すと次の3つの支配方程式が得られる。

$$\operatorname{div}[D \cdot \nabla^s u + s] + q = 0 \quad (57)$$

$$\varepsilon = \nabla^s u + D^{-1} \cdot s \quad (58)$$

$$s = 0 \quad (59)$$

上式の弱形式は次のように表される。

$$\int_{\Omega} \nabla^s u \cdot (D \cdot \nabla^s u + s) d\Omega - G_{\text{ext}}(u) = 0 \quad (60)$$

$$\int_{\Omega} s \cdot [\nabla^s u + D^{-1} \cdot s - \varepsilon] d\Omega = 0 \quad (61)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \cdot s d\Omega = 0 \quad (62)$$

ここで式(15)~(17)に加えて次の有限要素補間を導入する。

$$s = N_s s^e \quad (63)$$

上式と式(15)~(18)を式(60)~(62)に代入すると次の有限要素方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & 0 & k_{us} \\ \cdot & 0 & k_{es} \\ \text{対称} & \cdot & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ \sigma^e \\ e^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

ここで k_{uu} は変位法の場合と同一で式(38)に示す通りであり、他の成分は次の通りである。

$$k_{us} = \int_{\Omega^e} B_u^t N_s d\Omega^e \quad (65)$$

$$k_{es} = \int_{\Omega^e} N_s^t N_s d\Omega^e \quad (66)$$

$$k_{ss} = \int_{\Omega^e} N_s^t D^{-1} N_s d\Omega^e \quad (67)$$

ここで局所化混合法による剛性マトリックスは次のようになる。

$$\hat{k}_{uu}^e = k_{uu} - k_{us}^t k_{ss}^{-1} k_{us} \quad (68)$$

キーワード

有限要素法, 混合法, ハイブリッド法

SUMMARY

A Consideration on Mixed Variational Principles of Solid Mechanics

Hiroshi Takeda

Computer Center, Hosei University*

Tsuyoshi Nishimura

Hazama Technical Research Institute**

Typical mixed and hybrid finite element methods for the solid mechanics are systematically reviewed by starting the five parameter governing equations and the variational form. Not only classical mixed and hybrid finite element formulations which are based on Hu-Washizu and Hellinger-Reissner functionals but modern attractive versions of mixed and hybrid formulations such as Pian-Sumihara and Simo-Rifai elements are studied in the unified approach.

この形の要素剛性マトリックスを導く要素は Simo-Rifai 要素と呼ばれ、具体的な補間関数については文献 [3] に論じられている。

4. あとがき

ここでは変位, 応力, ひずみ, 初期応力, 初期ひずみを独立変数と考える支配方程式を出発として, Hu-Washizu の変分原理, Hellinger-Reissner の変分原理および仮想仕事の原理を基礎とする古典的有限要素定式を整理するとともに, 現時点で高精度要素として着目されている Pian-Sumihara 要素や Simo-Rifai 要素に対する定式を特別の場合として導く混合型有限要素定式について論じた。今後の課題としては式(40)~式(44)の弱形式に基づく高精度要素の開発や収束性に関する数学的考察等がある。

参考文献

- [1] 武田, 有限要素法による初期応力・ひずみ問題の一般的定式, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 15, 215-218 (1991)
- [2] H.Takeda and H.Isha, Some considerations on displacement assumed finite elements with the reduced numerical integration technique. *Proc. of 6th SMiRT Conference*. M1/2, (1981).
- [3] T.H.H. Pian and K. Sumihara, Rational approach for assumed stress finite elements. *Int.j.numer.methods eng.*, 20, 1685-1695(1985).
- [4] J.C.Simo and M.S. Rifai, A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int.j.numer.methods eng.*, 29, 1595-1638 (1990).

KeyWords

finite element method, mixed method, hybrid method, Hellinger-Reissner functional, Hu-Washizu functional, Pian-Sumihara element, Simo-Rifai element

* 3-7-2 Kajino-cho, Koganei-shi, Tokyo 184, Japan
** 515-1, Nishimukai, Aza, Karima, Tsukuba-shi, Ibaraki, Japan.