法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-07-18

カオスと時系列解析 : ビデオ“Chaos Exhibition”

広岡, 一 / HIROOKA, Hajime

(出版者 / Publisher)
法政大学計算センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学計算センター研究報告 / Bulletin of Computer Center, Hosei University
(巻 / Volume)
5
(開始ページ / Start Page)
17
(終了ページ / End Page)
20
(発行年 / Year)
1992-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00024669

カオスと時系列解析：ビデオ“Chaos Exhibition”

広岡　一

法政大学工学部電気工学科†

ビデオ“Chaos Exhibition”に表したローレンツ系、ダフィング系、捕食ー被捕食系におけるストレンジアトラクター及びその不規則時系列の次元解析について述べる。

§1　はじめに

複雑さへの挑戦、そしてその解明への戦術は自然科学のみならず多くの分野における研究の普遍的テーマといえる。物理学は現実の多様で複雑な現象を単純な要素に還元することによって、現象の背後に潜む簡単な規則（法則）を見出し、そこから我々の解き得る非常に僅かの単純なモデルによって非常に多くの複雑な現象を再構築（シミュレート）する技法を発展させてきた。実に、天体の運動、タービンの羽根の振動、さらに気体の性質など多くの現象が振り子やビリアードの球の運動など僅かな解きうる例によって記述されてきた。しかし、この単純な道具から取り出してみせる手品のきかない本質的に複雑な問題がある。

当発表会で示したビデオ“Chaos Exhibtion”と“Neural-Network Hopfield model”は各々本質的な複雑さをもたらす二つの要素、非線形性と多様性、に関した研究において映像化を試みたものである。非線形システムについての現在の発展は解析的な理論を先導してきた非常に多数の計算機実験によっている。カオスの研究の発展は計算結果のプレゼンテーションの進歩とともにもたらされた“picture book”によっているともいえる。複雑なダイナミックスを表す手段として数枚の図を伴った文章や抽象的な数式による従来の表現形式が適しているかは問題である。

ここで述べるビデオ“Chaos Exhibition”は15min．程度にまとめられたダイジェスト版で、Chaos 及びその母胎であるstrange attractorなどについての序論を兼ねたPart I とstrange attractorが生じる不規則な時系列の次元解析についての研究を表したPartIIからなる。

Part I．カオスとストレンジアトラクター

Scene 1.　Introduction of Chaos and Strange Attractor by the Lorenz system

Lorenz系[1]は次のような3変数の連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + bx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - cz$$

で表される。このような力学系の時間発展は位相空間(x,y,z)における軌道として表示される。ビデオではこの軌道の追跡によって、不規則で非周期な（カオス）軌道の様子及びそれが作るストレンジアトラクター（図1）の構造を明らかにしている。

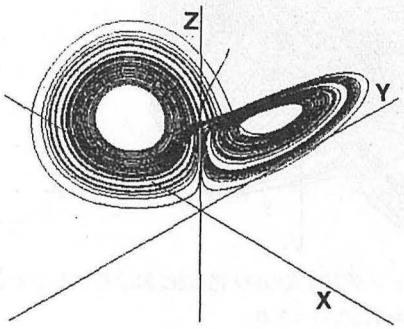

図1a ローレンツ系のストレンジアトラクター
(a=10.0,b=25.0,c=2.66)

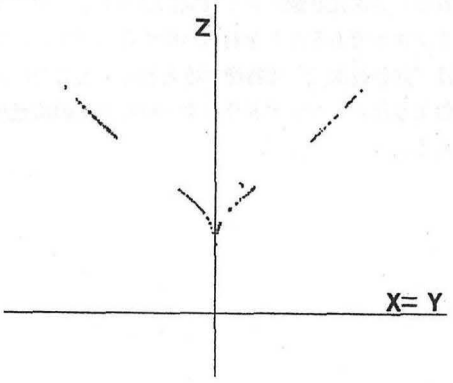

図1b 1aのアトラクターのx=y面における断面

† 〒184　小金井市梶野町3−7−2

Scene 2. Strange Attractor of Duffing Equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + f(x) = e(t)$$

$$e(t) = B\cos(\omega t) \qquad (1)$$

はDuffing Eq.[2]とよばれ、例えば、非線形インダクタンスを含む直列共振回路などの簡単な電気・電子回路や1自由度の非線形振動に周期外力が加わった振動系を表す。ここではf(x)=x^3とする。この、二階非自律常微分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + Bz$$

$$\frac{dz}{dt} = -\omega^2 z$$

とおけば、3変数の自律系に表され、(1)と同様に位相空間(x, $y=x, z=\cos\omega t$)におけるカオス軌道及びそのストレンジアトラクターを示す（図2）。

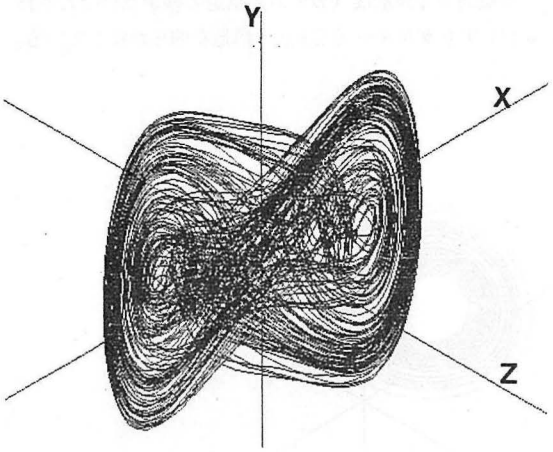

図2．ダフィング方程式の位相空間におけるアトラクター
(k=0.05,B=7.50,ω=1.0)

この場合には解の様子は周期$T=2n\pi/\omega$ごとに(X,Y)面をよこぎる点をとったstrobo−mappingと呼ばれる2次元平面の写像でも示される。2次元写像による視覚化はストレンジアトラクターがフラクタルであることを明らかにする（図3）。フラクタル集合は“非整数次元”で特徴づけられる。ここでの研究の主題はこのようなストレジアトラクターをもつ系の次元解析に関してである。

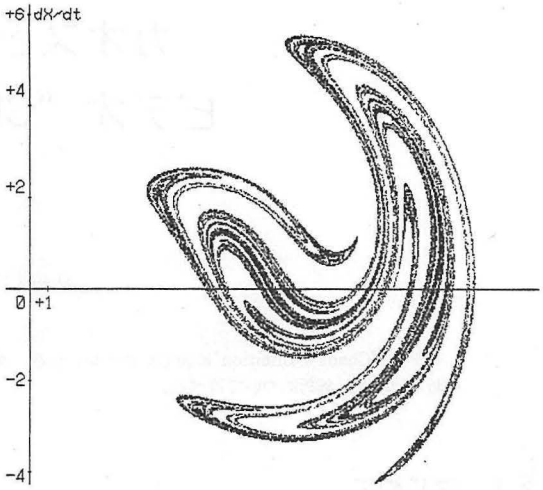

図3．図2のアトラクターに対するストロボマッピング
50000点が描かれている。

Scene 3. Dynamics of Prey−Predator System

カオスはScene1、2におけるような微分方程式系にのみ普遍的なことではなく、差分方程式で表される系でも同様である。むしろ微分方程式系のような数値解法に伴う問題がなく計算を容易にするために、カオスの研究ではよく用いられる。ここでは2次元差分系の例として以下のような生態系における捕食一捕食系のモデル[3]を与える、

$$Xn+1 = AXn(1 - Xn - Yn)$$

$$Yn+1 = BYn(1 + Xn/C)$$

について調べられる。Xn,Ynはそれぞれ被捕食者、捕食者の第n世代での密度を表す。この系はパラメータ(A,B,C)の変化に対してバラエティーに富んだ挙動を与え、安定平衡点、周期解、準周期解、カオスへとアトラクターが分岐する。

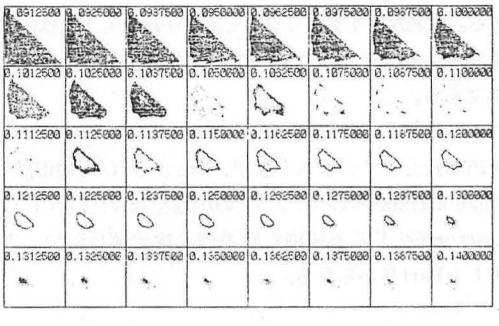

図4．A=3.9,B=0.3でパラメータCを0.09〜0.14の範囲で0.00125きざみに変えたときの写像(Xn,Yn)の変化、カオス一周期解一準周期一定常点へと分岐する。

この系はまた捕食者が死滅するパラメータ領域では1個体の増殖に対するロジスティック方程式

$$Xn+1 = AXn(1 - Xn)$$

に漸近し、1次元差分系としての性質も与える。共に不規則な時系列Xnを示す場合においても、以下に述べる次元解析はこ

の差異を与えることが示される。

PartII　Analyses of Irregular Time Series

Scene 1.　Irregular time series and power spectrum

既知の力学系における不規則な時間発展は、その力学系の変数の数の次元をもつ位相空間でのストレンジアトラクターとして捉えうれることを見てきたが、一般に観測や実際において得られる情報はその内のある一つ変数についての時間変化である。不規則な波形や時系列の解析には従来パワースペクトラムや相関関数が用いられてきた。Duffing eqにおけるX(t)の波形とそれに対するパワースペクトルが以下に示される（図5a,b)。

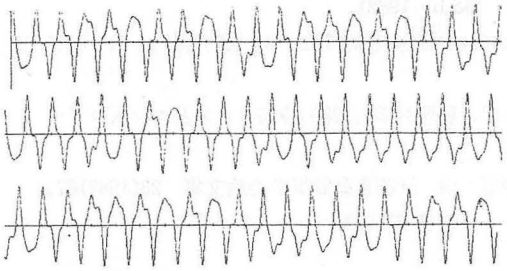

図5a Duffing eq(K=0.17,B=7.0)の初期値Xo=2,Yo=−2に対するX(t)の不規則な時間変化。

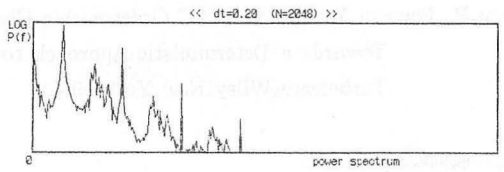

図5b 5aの波形のパワースペクトル(Δt=0.2,N=2048)

この方法は時系列に含まれる周波数成分、周期、非周期性についての情報を与えるが、このような時系列を発生するシステム自身についてのより以上の情報を得ることは困難であり、連続なスペクトルを示すときには多要素による複雑な現象またはノイズなどのランダムな性質として扱われてきた。

Scene 2.　Dimensional Analyses of Irregular Time Series

カオスの研究は少数の変数のシステムにおいても複雑で多様な時間発展が与えられることを示すとともに、この不規則な時系列についての新しい解析手段を発展させてきた。[4] ある一変数についての時系列から位相空間におけるストレンジアトラクターを再構成し、そのフラクタル次元を求めることによって基にある基本的変数の数を知る方法を与える。

この方法は、観測される変数Xの時系列(X_1,X_2,X_3……X_k,X_{k+1},……)からn次元時間遅れベクトル$X_n(K)=(X_k,X_{k+1},\cdots\cdots X_{k+n-1})$を作り、このベクトルをn次元位相空間に描くことによる。ここでnは埋め込み次元と呼ばれ、nが基本にある力学系の次元数以上のときには、この力学系のアトラクターと同じ性質をもつアトラクターを再構成することができる。先に述べた捕食一被捕食系を例にとると、基の力学系は2次元の差分(Xn,Yn)で与えられているので、2次元時間遅れベクトル$X_2=(Xk,Xk+1)$は同型の写像を与える（図6.a,b)

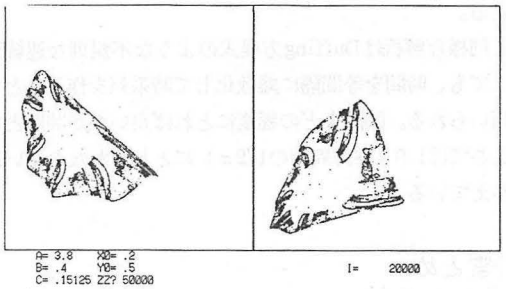

図6a Prey−Predatonモデル(A=3.8,B=0.4,C=0.15125)における写像(Xn,Yn)［左］と(Xn,Xn+1)の写像［右］

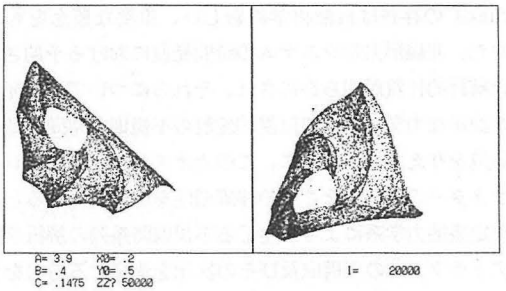

図6b A=3.9,B=0.4,C=0.1475のときの(Xn,Yn)［左］と(Xn,Xn+1)［右］

基の力学系が未知の一般の場合には、この次元は埋め込み次元nにたいする相関和、すなわちεの距離内に入る点の数、

$$C(\varepsilon)=\frac{1}{N,}\sum_i\sum_j\theta(\varepsilon-|X(i)-X(j)|)$$

のnに対する変化から求められる。ここでθはHeviside関数。基の方程式の次元数以上のnにたいしては

$$C(\varepsilon)\sim\varepsilon^{D}$$

となり、相関次元と呼ばれるフラクタル次元Dを与える。図6bの例ではnが2以上ではDは約1.6であり、写像(Xn,Yn)から求めた次元と一致する。（図7）

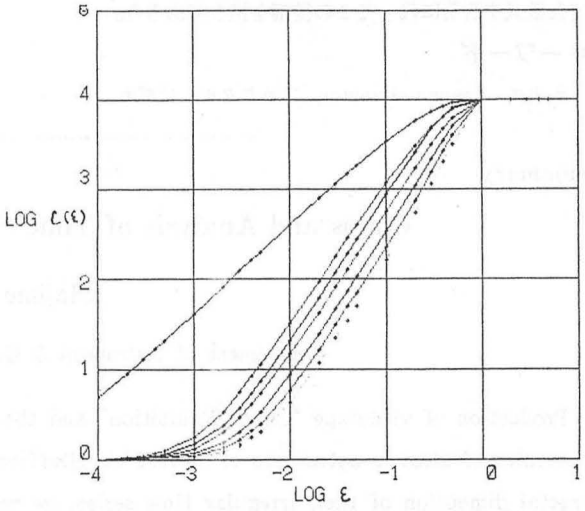

図7.　Prey−Predatarモデル(A=3.9,B=0.3,C=0.1)における次元解析、上から順に埋め込み次元n=1,2,3,4,5,6に対応、但し3番目の曲線は(Xn,Yn)から得られた曲線を表す。n=2以上の曲線の傾きはフラクタル次元D〜1.6を与える。

捕食者が死滅してゆくパラメータ領域ではDは1に近い値をとる。

同様な解析はDuffing方程式のような不規則な連続波形に対しても、時間を等間隔に離散化して時系列を作ることで同様に用いられる。間隔をどの程度にとれば良いかが問題となるが、ここでは1.0（外力周期の$1/2\pi$）にとればかなり良い次元数を与えている。

まとめ

簡単な非線形モデルにおいて示されてきた Deterministic chaos の存在は自然科学に新しい、重要な概念をもたらしてきた。非線形力学システムの時間発展における予期されなかった統計的性質が明らかにされ、それらについての研究は驚くべき簡単な力学モデルで巨視的変数の不規則な時間挙動を理解する道を与えてきた。特に、このカオスの研究はストレンジアトラクターの存在、そこでの非周期性を明らかにするとともに、決定論的力学系によって生じる不規則時系列の解析手段としてアトラクターの再構成及びその次元を決定する方法を与えてきた。ここでは捕食一被捕食系のモデルや Duffing 系についてこの方法の有効性を示すとともに、カオスの一般的解説も含め研究内容の表現形式としてビデオ映像の可能性を試みた。コンピュータの新しいパラダイムへの移行、計算機とビデオ映像の進歩は、科学における研究、教育のあり方にも変化をもたらすべきである。

カオスの概念は物理現象にとどまるものではなく、むしろ生物学、社会科学などこれまで物理学の及ばなかった分野への応用の手段を与えるものである。「自然は多様で複雑でありながら統一ある全体として存在する。一方、現代の科学技術はあまりにも細分化し、専門化してしまった」（細分化する現代科学への問題提起、えれきてる991.40)。カオスの研究の本来の目的はこの細分化からの脱却の道を目指したものである。映像もまた数式や言葉に代ってこの役割を担うであろう。

キーワード

カオス，strange attractor，フラクタル，ビデオ

本研究の一部は平成2年度法政大学研究助成によること、及びビデオ作成に努力していただいた研究室の卒論生、特に、谷田卓志（捕食一被捕食系）、渡辺俊彦（ダフィング系）、咲村隆彦（ローレンツ系）の諸君、に感謝する。

参考文献

1) Lorenz系については
E.N.Lorenz,J.Atmos.Sci.20,130−141(1963)
C.Sparrow,The Lorenz Equations in Bifurcations, in Chaos and Strange Attractors(Springer−Verlag, Berlin,1982).
広岡、法政大学計算センター研究報告、第3巻(1989)

2)上田、数理科学9,1980,特集カオスとエントロピー

3)砂原　他、計測自動制御学会論文集　23(1987)67, 23(1987)941

4)カオスに関する専門書は最近では多くある。例えば
Schuster,H.G.；Deterministic Chaos:An Introduction 2nd edn(VCH.Weinheim,1987),
Herge,P.,Pomeau,Y.,and Vidal；C.Order within Chaos; Towards a Deterministic Approach to Turbulence(Wiley,New York,1986)

また一般向の読物として
Gleick,J.Chaos:Making a New Science(Viking, New York,1987).

などもある。不規則時系列の解析の簡単な解説には
長島、カオスをとらえる　BUTURI 41 (1986)19
などがある。

Summary

Chaos and Analysis of Time Series —Video Chaos Exhidition—

Hajime HIROOKA

Department of Instrument & Control Engineering, Hosei University†

Production of videotape "Chaos Exhibition" and the explanation of the contents,which contain the phase space portraits of strange attractors of Lorenz eq.,Duffing eq.and prey−predator model and the determinations of fractal dimension of their irregular time series,are reported here.

Keywords

Chaos,Strange Attractor,Fractal Dimension,Videorecording.

† 3−7−2 Kajino-cho, Koganei-shi, Tokyo 184, Japan