公共財の自発的供給と仮想通貨

OGURO, Kazumasa / 小黒, 一正

(出版者 / Publisher)
法政大学経済学部学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
The Hosei University Economic Review / 経済志林
(巻 / Volume)
88
(号 / Number)
4
(開始ページ / Start Page)
429
(終了ページ / End Page)
449
(発行年 / Year)
2021-03-20

【研究ノート】

公共財の自発的供給と仮想通貨

小　黒　一　正

要旨

本稿の目的は，公共財の自発的供給と仮想通貨のマイニング報酬といった報酬体系（「プルーフ・オブ・ワーク」（Proof of Work））を関連付けるメカニズムが，公共財に関する「ただ乗りの問題」の解決に役立つ可能性を明らかにすることである。分析の結果，主として，次のことが明らかになった。第1は，各個人が自己の選好を正直に申告する場合，公共財の自発的供給によっても，マイニング報酬を適切に設定することで，サミュエルソン条件を満たすことが理論的に可能であることである。第 2 は，本橋が提案する枠組み（メカニズム）を導入すると，一定の条件の下では，合理的な各個人は真の選好を政府に報告する誘因をもつため，パレート最適な水準で公共財を供給することが理論的に可能性であるということである。

Key words; 公共財，自発的供給，仮想通貨，ブロックチェーン，メカニズム
JEL Classification; E50, H40, H42, H44, L50

1．序

本稿の目的は，公共財の自発的供給と仮想通貨のマイニング報酬といった報酬体系（「プルーフ・オブ・ワーク」（Proof of Work））を関連付けるメカニズムが，公共財に関する「ただ乗りの問題」（free-rider problem）

の解決に役立つ可能性を明らかにすることである。

周知のとおり，各個人が公共財を自発的に供給する場合，Nash 均衡のメカニズムで「ただ乗りの問題」が発生し，公共財の供給量がパレート最適な水準よりも過小となる。

これについては，いくつかの文献で明らかにされている。山重 (2013)，Slavov (2014) は一般的に自発的供給による公共財は過少供給になることが説明されている[1)]。Villanacci A. & Zenginobuz Ü. (2006) も同様に，公共財の自発的供給に対してどのように政府が介入すべきかについて考察が行われている。

この問題を解決する方法の一つとしては，政府が個人に定額の課税を行い，公共財の一部を供給することも考えられるが，それは民間部門が供給する公共財を完全に「クラウディング・アウト」（crowding out）し，社会的に供給される公共財の総量は変化しない。これは，Warr (1982) や Warr (1983) が明らかにした「公共財供給の中立命題」とも深く関係する[2)]。

このような問題に対処するため，Lindahl (1919) では，公共財供給の負担を定額の課税でなく，公共財の価格に影響を及ぼす仕組みとして，リンダール・メカニズム（Lindahl mechanism）を提唱した。このメカニズムの下では，各個人が公共財に関する自己の選好を政府に対し正直に申告する場合，申告した選好から定まる公共財1単位当たりの費用負担割合が定率税のように機能し，パレート最適な水準で公共財の供給を行うことができる。例えば，Boadway, Pestieau and Wildasin (1989) は，自発的に公共財を供給するモデルにおいて，その供給に補助金を与えることによって，非協力的

1）なお，動学的なモデルにおいては Slavov (2014) は自発的供給により効率的な水準が達成されることが示されている。

2）Bergstrom, Blume and Varian (1986) では，公共財供給の中立命題が成立しないケースとして，公共財の負担につき，非負制約やコーナー解が存在するケース等を分析している。例えば，Nash均衡の下で，公共財の自発的供給を行う場合，自己の所得が低いか，あるいは自分以外の公共財供給の総和が自己の最適な公共財の需要量を上回るならば，所得をすべて私的財の消費に割り振るコーナー解を選択するケースも考えられる。その場合，定額の課税や政府の所得移転政策が，実質的な効果を有する可能性がある。

に公共財の供給が行われる場合においてもリンダール均衡を達成することができる。また，Kesternich, Lange and Sturm (2014) は異質的な経済主体がいるモデルにおいて公共財の供給の際にどのように費用負担させるべきかについて考察を行っている。しかし，各個人が自己の選好を正直に申告しない場合は「ただ乗りの問題」が発生し，リンダール•メカニズムでも，パレート最適な水準で公共財が供給できない。

この問題を解決するため，様々な提案がなされている。例えば，Clarke (1971) やGroves and Ledyard (1977) 等が「クラーク＝グローブス・メカニズム」を提案するとともに，Varian (1994) は「ヴァリアン・メカニズム」[3] を提唱している。

だが，前者（CGメカニズム）は，各個人の費用負担のみでは公共供給に必要な費用を賄うことができず，政府部門に財政赤字が発生するという問題が発生する。また，後者（Vメカニズム）は，政府部門に財政赤字は発生しないが，政府は各個人の情報は知らなくても，各個人間では相手の情報を完全に知っているという前提に依存しており，現在のところ，現実的な解決策は見つかっていないのが現状である。

このような状況の中，従来のメカニズムとは異なる解決策として，例えばMorgan (2000) では，公共財の自発的供給で「宝くじ」（lottery）を利用した斬新なメカニズムを提案している。宝くじの売上額の一部を宝くじの賞金に充当し，残りの売上で公共財の供給を行う方式である。しかしながら，Morgan (2000) のメカニズムでは，宝くじのコストが，宝くじの購入者のみから徴収されるという方式のため，宝くじの賞金額が巨額にならない限り，公共財の供給量がパレート最適な水準にならないという本質的な問題を抱えている。

もっとも，宝くじの賞金は，公共財を自発的に供給した場合に一定の確率で受け取ることができる報酬であり，この賞金が公共財の自発的な供給

3）Groves の初期モデルは Groves (1970, 1973) を参照。

を行う誘因を高めるメカニズムは興味深い発想である。宝くじと似た誘因をもち，Morgan (2000) の問題を解決するメカニズムを構築する方策は何か存在しないか。

そこで，本稿では，近年の技術革新で急速に普及が進む「仮想通貨」を公共財の自発的供給に関連付けるメカニズムを提案したい。いま仮想通貨の世界的な市場規模は急速に拡大しており，CoinMarketCap.com によると，その時価総額は2018年初頭時点で一時約8000億米ドルに到達し，現在（2018年８月24日時点）でも約2000億米ドルとなっている。ビットコイン等の仮想通貨は既に数千種類（2018年８月時点で約1,800種類）も発行されており，そのうち最も有名なビットコインは，二重払い防止などのセキュリティ機能確保のため，直近の取引データをブロックチェーンと呼ばれる「分散型台帳技術」で書き込む。書き込む者はコンピューターの計算能力を提供する必要があるが，一定のルールに基づき，取引データを記録する報酬として一定量の仮想通貨が獲得できる仕組みとなっている。この報酬を目的にブロックチェーンに正しい取引内容を書き込む行為を「マイニング」（mining）といい，一般的にこのような仕組みを「プルーフ・オブ・ワーク」（Proof of Work）ともいう（この仕組みを定式化した論文として，例えば Chiu and Koeppl (2017) が挙げられる）。

ビットコインの POW は取引内容が正しいかどうかの確認だが，その仕組みが異なる仮想通貨も存在する。例えば，リップルと呼ばれる仮想通貨は，「World Community Grid」というチームに参加し，ガン研究や新たな病気の発見等に貢献することで報酬が獲得可能なメカニズムを提供している。現在のところ，仮想通貨のうち一般的な取引で利用されているものは数種類であるが，ブロックチェーン技術を活用し，動画や音楽などのコンテンツを投稿すると，一定のルールに基づき，そのプラットフォームが発行する仮想通貨が報酬として獲得できる試みも登場し始めている。

すなわち，仮想通貨に関連する技術は公共財の自発的供給を行ったときの報酬としても利用できる可能性を秘めているが，筆者の知る限り，その

分析をしている先行研究はなく，そのメカニズムに関する考察を深める意義は大きいと考えられる。

このため，本稿では，公共財の自発的供給と仮想通貨のマイニング報酬といった報酬体系（プルーフ・オブ・ワーク）を関連付けるメカニズムが，公共財の供給に及ぼす影響を分析する。なお，本稿の構成は，次のとおりである。まず，第2節で本格的な分析を行うための基本モデル（政府が公共財を供給するケース）を構築する。その上で，第3節では公共財の自発的供給に仮想通貨を利用するケースやそれに関連する命題を導出し，第4節でまとめと今後の課題を述べる。

２．基本モデルー 政府が公共財を供給するケースー

第3節では，公共財の自発的供給で仮想通貨を利用するケースを分析するため, 簡易なモデルを構築する。モデル上の経済ではN人の個人がおり，第 j 番目（ j =1,2,3…N）の個人の効用関数が以下のように表現できるものとする。

$$U_j = \log(c_j) + \alpha_j \log(z) \tag{1}$$

ここで，c_j は個人 j の消費量， z は公共財の供給量を表す。また，公共財に対する選好は各個人で異質性をもち，個人 j の選好をα_jというパラメータで表す。

まず，公共財供給で仮想通貨を利用する分析を行う前に，標準的な分析として，政府が個人 j に比例所得税 τ を課し，公共財を供給するケースを考えてみよう。個人 j の所得を w_j と表すとすると, 個人 j の予算制約式は以下となる。

$$(1-\tau)\, w_j = c_j \tag{2}$$

このとき，政府の予算制約式は以下のように表現できる。

$$\Sigma_j \tau w_j = z \tag{3}$$

また，社会厚生関数 $W=\Sigma_{j=1}^{N} U_j$ は，（2）式・（3）式から以下となる。

$$\mathrm{W}=\Sigma_{j=1}^{N}(\log\left((1-\frac{z}{\Sigma_j w_j})w_j\right)+\alpha_j\log(\mathrm{z}))$$

この社会厚生関数Wを最大化する $\bar{\mathrm{z}}$ は，以下の関係式を満たす。

$$\Sigma_j\,(-\frac{\frac{w_j}{\Sigma_j w_j}}{(1-\frac{z}{\Sigma_j w_j})w_j}+\alpha_j\frac{1}{\mathrm{z}})=0\ \Leftrightarrow\ \bar{\mathrm{z}}=\frac{\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}\Sigma_j\,w_j \tag{4}$$

ここで，$\bar{\alpha}=\Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j/N$ は公共財に対する選好の平均を意味し，（4）式はサミュエルソン条件を表す。

サミュエルソン条件は，パレート最適な水準で公共財を供給する条件であり，（4）式を満たすように政府が公共財を供給できれば，社会厚生Wを最大化でき，最も効率的であるが，一般的に政府が最適な水準で公共財の供給を行うのは極めて難しい。

税制上の申告制度などを利用して，個人 j の所得 w_j（ j =1,2,3⋯N）を把握できても，公共財の選好 α_j を把握するのは容易ではない。政府と個人との間には「情報の非対称性」が存在することから，公共財に対する選好の強度は，各個人の申告に依拠せざるを得ないが，各個人が自らの選好を正直に申告する誘因をもつとは限らない。いわゆる「選好顕示の問題」に直面する。例えば，選好 α_j の個人 j が自らの効用 U_j を最大化するとき，個人 j にとって最適な公共財の水準 z^j は以下の関係式を満たす。

$$\frac{\partial U_j}{\partial z^j}=\frac{\partial}{\partial z^j}\left[\log\left((1-\frac{z^j}{\Sigma_j w_j})w_j\right)+\alpha_j\log(\mathrm{z}^j)\right]=0\Leftrightarrow\mathrm{z}^j=\frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}\Sigma_j\,w_j$$

仮に $\alpha_j>\bar{\alpha}$ であるならば $\mathrm{z}^j>\bar{\mathrm{z}}$ であるため, 政府が各個人の選好を申告で把握しようとするとき，個人 j が選好 α_j を正直に申告すると，自らの効用 U_j を最大化する水準 z^j を下回ってしまう。このため，個人 j は自らの選好 α_j よりも高い値を虚偽で申告し，$\bar{\alpha}=\Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j/N$ を上昇させ，真の選好 α_j に近づける誘因をもつ。同様に，$\alpha_j<\bar{\alpha}$ の選好を有する個人 j は自らの選好よりも低い値を虚偽で申告し，$\bar{\alpha}$ を低下させ，真の選好 α_j に近づける誘因をもつ。一般的に，Lindahl (1919) 等が既に明らかにしているように，虚偽の申告で各個人が利益を得る行動が引き起こされると「ただ乗りの問

題」などが発生し，パレート最適な水準で公共財が供給できなくなる。

しかも，多数決投票によって公共財の供給水準を決定する場合，中位投票者定理に従えば，以下のとおり，公共財に対する選好（α_j）が中位である個人の効用 U_m を最大化する公共財の水準 z^m が政治的に選択されることになる。

$$z^m = \frac{\alpha_m}{1+\alpha_m} \sum_j w_j \tag{5}$$

上記の（5）式の α_m が，（4）式の $\bar{\alpha}$ に一致するとは限らない。このため，多数決投票によって公共財の供給水準を決定する方法では，サミュエルソン条件を満たすとは限らず，パレート最適な水準で公共財を供給できない可能性が高いのは明らかである[4)]。

3. 公共財の自発的供給で仮想通貨を利用するケース

では次に，公共財の自発的供給で仮想通貨を利用するケースを考えてみよう。仮想通貨で有名なビットコイン等では，既述のとおり，二重払い防止などのセキュリティ機能確保のため，一定のルールに基づき，取引データを記録する報酬として一定量の仮想通貨が獲得できる仕組みとなっている。この報酬を目的にブロックチェーンに正しい取引内容を書き込む行為を「マイニング」（mining）といい，一般的にこのような仕組みを「プルーフ・オブ・ワーク」（Proof of Work）ともいう。

このマイニングに関する技術を利用すれば，個人が公共財の自発的な供給を行ったときにも，その供給を行った「プルーフ・オブ・ワーク」の報酬として一定量の仮想通貨を獲得できるルールを構築することもできる。そこで，この節のモデルでは，個人 j が 1 単位の公共財を自発的に供給すると，その対価として仮想通貨 β を報酬として獲得できるものとする。す

4）Itaya and Schweinberger (2006) は，所得税収で公共財を供給するモデルで政治経済均衡を考えており，所得税率を低くすることでパレート改善をもたらすことを明らかにした。

なわち，個人 j が公共財q_jを自発的に供給すると，その報酬としてβq_jの仮想通貨を獲得できる（ただし，$0<\beta<1$ とする）。

このとき，個人 j の予算制約式は以下となる。

$$w_j+\beta q_j=q_j+pc_j \tag{6}$$

ここで，p は物価水準を表し，仮想通貨の初期発行量をΩとすると，個人 j が公共財q_jを自発的に供給した後の発行量は $(\Omega+\beta\Sigma_j q_j)$ となる。また，仮想通貨以外の通常のマネー・ストックをMとし，仮想通貨と通常のマネーは 1 対 1 で交換可能とする。さらに，モデル上，取引を行う通貨は通常のマネー・ストックか仮想通貨しか存在せず，貨幣数量説が成立すると，物価水準 p は以下のように表現できる。

$$\mathrm{p}=\frac{\mathrm{M}+\Omega+\beta\Sigma_j q_j}{\mathrm{M}+\Omega} \tag{7}$$

また，公共財の総供給量は以下となる。

$$\Sigma_j q_j=\mathrm{z} \tag{8}$$

以上の設定の下,（1）式の効用関数を最大化する条件を考えよう。まず,（6）式～（8）式を（1）式に代入すると，以下を得る。

$$U_j=\log\left(\frac{\mathrm{M}+\Omega}{\mathrm{M}+\Omega+\beta\Sigma_j q_j}\left(w_j+(\beta-1)q_j\right)\right)+\alpha_j\log(\Sigma_j q_j)$$

このため，個人 j が公共財q_jを自発的に供給するときの最適化条件は以下となる。

$$\frac{\partial U_j}{\partial q_j}=\frac{\beta-1}{w_j+(\beta-1)q_j}-\frac{\beta}{\mathrm{M}+\Omega+\beta\Sigma_j q_j}+\alpha_j\frac{1}{\Sigma_j q_j}=0 \tag{9}$$

命題 1　通常のマネー・ストックと仮想通貨の初期発行量の合計（$\Omega+M$）が十分に大きく，$\beta\Sigma_j q_j \ll \Omega+M$ が成立するとき，公共財の自発的供給の総量 z や，個人 j が自発的に供給する公共財の量q_jは以下となる。

$$\mathrm{z}=\frac{1}{1-\beta}\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}} \tag{10}$$

$$q_j=\frac{1}{1-\beta}\left(w_j-\frac{1}{\alpha_j}\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}\right) \tag{11}$$

証明）まず，$\Omega+\beta\Sigma_j q_j \ll \Omega+M$ のとき，（9）式は $\frac{1-\beta}{\alpha_j}\mathrm{z}=w_j-(1-\beta)q_j$

と表現できるが，j＝1,2,3…N でその和をとると，$\Sigma_j \frac{1-\beta}{\alpha_j}$ z＝$\Sigma_j w_j-(1-\beta)z$ となる。これをについて解くと，(10) 式を得る。また，(10) 式を (9) 式に代入すると，(11) 式を得る。(Q.E.D)

公共財の自発的供給量を表す (10) 式は，マイニングの報酬 β の関数となっている。この式で $\beta=0$ とすると z＝$\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}}$ を得るが，これと (4) 式を比較すると「$\beta=0$ の (10) 式＜(4) 式」となる。これは，各個人が公共財を自発的に供給する場合，Nash 均衡のメカニズムで「ただ乗りの問題」が発生し，公共財の供給量がパレート最適な水準よりも過小となることを意味する。だが，(10) 式ではマイニング報酬が大きくなると公共財の自発的供給量は増加し，マイニング報酬が小さくなると公共財の自発的供給量は減少する。したがって，マイニングの報酬 β を適切な値に誘導すれば，公共財の自発的供給量を表す (10) 式が，社会厚生関数Wを最大化する (4) 式のサミュエルソン条件と一致する可能性があり，以下の命題が成立することが分かる。

命題 2　マイニング報酬を以下に設定すると，(10) 式はサミュエルソン条件を満たす。

$$\beta=1-\frac{1+\frac{1}{\overline{\alpha}}}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}} \tag{12}$$

証明) まず，(10) 式の z に (4) 式を代入すると，$(1-\beta)\frac{\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha}}\Sigma_j w_j(1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j})=\Sigma_j w_j$ となる。これを β について解き，(12) 式を得る。(Q.E.D)

(12) 式は，各個人 j (j＝1,2,3…N) が選好 α_j を正直に申告する場合，公共財の自発的供給によっても，マイニング報酬を適切に設定することで，サミュエルソン条件を満たすことができ，パレート最適な水準で公共財を供給できることを意味する。しかし，政府と個人との間には「情報の非対称性」が存在し，政府が個人 j の選好 α_j を把握するのは容易ではない。各

選好α_jを把握するためには，各個人の申告に依拠せざるを得ない。では，各個人 j（j=1,2,3…N）が選好α_jの申告において戦略的に行動するとき，選好α_jをどう申告するのが最適な戦略かについて，少し考察してみよう。

いま，個人 j の真の選好α_jがのとき，個人 j が申告する選好α'_jをとする。政府は，その申告された選好α'_jに基づき，（12）式からマイニング報酬$\beta'=1-(1+1/\overline{\alpha}')/(1+\Sigma 1/\alpha_j')$を決定するものとする。これは，通常のマネー・ストックと仮想通貨の初期発行量の合計（$\Omega+M$）が十分に大きいとき，マイニング報酬β'を所与として，各個人 j（j=1,2,3…N）は以下の効用を最大化することを意味する。

$$U_j=\log(w_j-(1-\beta')q_j)+\alpha_j \log(\Sigma_j q_j) \tag{13}$$

効用最大化の条件は，以下となる。

$$\frac{1-\beta'}{w_j-(1-\beta')q_j}=\alpha_j \frac{1}{\Sigma_j q_j} \tag{14}$$

この（14）式から $z=\frac{1}{1-\beta'}\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}}$ が求まり，（14）式に代入すると以下を得る。

$$\frac{1-\beta'}{\alpha_j}\frac{1}{1-\beta'}\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}}=w_j-(1-\beta')q_j$$

この式を（13）式に代入すると，個人 j の効用は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} U_j&=\log(w_j-(1-\beta')q_j)-\alpha_j \log(1-\beta')+\alpha_j \log\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}} \\ &=-\alpha_j \log(1-\beta')+\log\frac{1}{\alpha_j}\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}}+\alpha_j \log\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}} \\ &=-\alpha_j \log(1-\beta')+(1+\alpha_j)\log\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j}}-\log(\alpha_j) \end{aligned} \tag{15}$$

この（15）式はマイニング報酬β'の関数であるが，Nが十分に大きいとき，$\partial\beta'/\partial\alpha_j'$ は以下に近似できる（補論A）。

$$\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha_j'}=\frac{\partial}{\partial\alpha_j'}\left(1-\frac{1+\frac{1}{\overline{\alpha}'}}{1+\Sigma_j \frac{1}{\alpha_j'}}\right)\approx\frac{N}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\alpha'_k}\right)\frac{1}{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left[\left(\frac{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}{\Sigma_{k\neq j}\alpha'_k}\right)-\frac{1}{\left[\alpha_j'+\frac{1}{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\right]\alpha_j'}\right]$$

この式のうち $g(\alpha'_j)\equiv\left[\alpha_j'+\frac{1}{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\right]\alpha_j'$ の部分はα_j'の 2 次関数で $\alpha'_j>0$

の領域では単調増加であるため，$\left(\frac{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}{\Sigma_{k\neq j}\alpha'_k}\right)=1/g(\alpha'_j)$ を満たす α'_j を γ とすると，$\frac{\partial \beta'}{\partial \alpha_j'}$ の符号は$\alpha'_j<\gamma$ の領域でマイナス，$\alpha'_j>\gamma$ の領域でプラスであり，β' は下に凸の関数となる。

このため，各個人 j（j=1,2,3…N）の選好の α_j 下限を $\underline{\theta}$，上限を $\bar{\theta}$ とすると，マイナー報酬β'はα_j が下限 $\underline{\theta}$ か上限 $\bar{\theta}$ のときに最大となる。そこで，いま，個人 j 以外の (N−1) 人のうち σ の割合が下限 $\underline{\theta}$ を選択し，$(1-\sigma)$ の割合が上限 $\bar{\theta}$ を選択しているものとする。このとき，Nが十分に大きい値であればマイナー報酬 β' は以下に近似できる（補論B）。

$$\beta'\approx 1-\frac{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\left[1-\frac{1}{N}f(\alpha'_j)\right]+（\alpha_j' \text{に依存しない項}）$$

$$（\text{ただし，}f(\alpha'_j)\equiv\frac{\alpha_j'}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}+\frac{\frac{1}{\alpha_j'}}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}）$$

マイナー報酬 β' はα_j が下限 $\underline{\theta}$ か上限 $\bar{\theta}$ のときに最大になるが，$\underline{\theta}$ と $\bar{\theta}$ のどちらが最大となるのかについては $f(\underline{\theta})-f(\bar{\theta})$ の符号を確認する必要がある。例えば，もし仮に σ の値 $(0\leq\sigma\leq1)$ にかかわらず，$f(\underline{\theta})-f(\bar{\theta})$ の符号がプラスであれば，α_j が下限$\underline{\theta}$のときにマイナー報酬 β' は最大となる。このとき，（15）式は，個人 j が申告する選好α'_jを下限$\underline{\theta}$に設定すると，個人 j の効用は最大化できることを意味する。

では,実際の符号はどうか。一般的に $f(\underline{\theta})-f(\bar{\theta})$ の符号は σ の値に依存しその解析は容易ではないが，上限 $\bar{\theta}$ が十分に大きいとき，$f(\underline{\theta})-f(\bar{\theta})$ の符号は $0\leq\sigma\leq1$ の領域でプラスとなることが示せる（補論C）。これは，選好を申告するときに上限 $\bar{\theta}$ を申告する個人がごく僅かにでも存在する場合，上限 $\bar{\theta}$ が十分に大きい値であるならば，殆どの個人は下限 $\underline{\theta}$ を選択することを意味する。このため，以下の命題が成立する。

命題 3　各個人j（j=1,2,3…N）の選好α_jの下限 $\underline{\theta}$ を, 上限 $\bar{\theta}$ をとする。N と $\bar{\theta}$ が十分に大きいとき，各個人 j は選好 $\alpha_j'=\underline{\theta}$ を報告し，マイニング報酬は以下となる。

$$\beta' = 1 - \frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{N}{\underline{\theta}}} = \frac{N-1}{\underline{\theta}+N} \tag{16}$$

政府がマイニング報酬を（16）式で設定してしまうと，選好 $\alpha_j' = \underline{\theta}$ が真の選好 α_j から乖離し，パレート最適な水準で公共財を供給できないという問題が発生する。この問題を解決するため，納税者番号制度などで各個人 j（j=1,2,3…N）の賃金 w_j を政府が把握可能であるという前提の下，以下の枠組み（メカニズム）を導入する。

（Step1）まず，各個人 j（j=1,2,3…N）の選好を政府に報告させる。そのとき，個人 j が申告した選好 α_j' をとする。

（Step2）政府は上記の選好 α_j' および（12）式でマイニング報酬 β' を定め，マイニングの課程において各個人 j（j=1,2,3…N）が供給した自発的供給量 q_j に関する情報を収集する。

（Step3）上記の q_j(j=1,2,3…N）およびマイニング報酬 β' を（14）式に代入し，そのN個の連立方程式を解くことで，各個人 j（j=1,2,3…N）の（14）式内の選好 α_j を逆算する。この逆算した選好を α_j'' とする。

（Step4）もし，ある個人 j の申告した選好 α_j' と逆算した選好 α_j'' が異なるときは，この個人 j に対して一定あるいは無限大の罰則（ペナルティ）を課す（例：事後的に個人 j のマイニング報酬を $\beta'=0$ とする)。

命題 4　上記の枠組みでは，各個人 j（j=1,2,3…N）は真の選好 α_j を政府に報告する。

証明）もし，Step1で個人 j が虚偽の選好 $\alpha_j'(\neq\alpha_j)$ を報告した場合，Step4のペナルティを回避するためには，個人 j は一つの戦略しかとり得ない。それは，個人 j の効用を表す（13）式において，真の選好 α_j が申告した虚偽の選好 α_j' に一致するように振舞い，自らの効用を最大化する戦略である。このとき，（14）式は以下となる。

$$\frac{1-\beta'}{w_j-(1-\beta')q_j}=\alpha'_j\frac{1}{\Sigma_j q_j}$$

この関係式やマイニング報酬が $\beta'=1-(1+1/\bar{\alpha}')/(1+\sum 1/\alpha_j')$ という関係式を（13）式に代入すると,（13）式の効用は以下の式 U'_j に変形できる。

$$U'_j=-\alpha_j\log(1-\beta')+(1+\alpha_j)\log\frac{\Sigma_j w_j}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha'_j}}-\log(\alpha'_j)$$

$$=-\alpha_j\log\frac{1+\frac{1}{\bar{\alpha}'}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha'_j}}+(1+\alpha_j)\log\frac{1}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha'_j}}-\log(\alpha'_j)+(1+\alpha_j)\log\Sigma_j w_j$$

$$=-\alpha_j\log(1+\frac{1}{\bar{\alpha}'})-\log(1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha'_j})-\log(\alpha'_j)+(1+\alpha_j)\log\Sigma_j w_j \quad (17)$$

なお，個人 j 以外の個人 k（≠j）がどのような戦略を採用するのかについて，個人 j は把握できないため，この（17）式の各α'_k(k≠j）は個人 j の予測であるものとする。Nが十分に大きいとき,（17）式の偏微分は以下を満たす。

$$\frac{\partial U'_j}{\partial\alpha'_j}=\alpha_j\frac{\frac{1}{\bar{\alpha}'^2}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}'}}\frac{1}{N}+\frac{\frac{1}{\alpha_j'^2}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha'_j}}-\frac{1}{\alpha'_j}\approx\frac{1}{\alpha'_j}\left(\frac{\frac{1}{\alpha'_j}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha'_j}}-1\right)<0$$

これは，Step1で個人 j が虚偽を報告する戦略をとるならば，個人 j 以外の個人 k（≠j）がどのような戦略を採用しても, 選好$\alpha_j'=\underline{\theta}$ を報告する誘因をもつことを意味する。すべての個人 j が虚偽で選好 $\alpha_j'=\underline{\theta}$ を報告するとき，（17）式は以下となる。

$$U'_j=-\alpha_j\log(1+\frac{1}{\underline{\theta}})-\log(1+\frac{N}{\underline{\theta}})-\log(\underline{\theta})+(1+\alpha_j)\log\Sigma_j w_j \quad (18)$$

他方，各個人 j（j=1,2,3…N）が選好 α_j を正直に報告する場合，（15）式は以下となる。

$$U_j=-\alpha_j\log(1+\frac{1}{\bar{\alpha}})-\log(1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j})-\log(\alpha_j)+(1+\alpha_j)\log\Sigma_j w_j$$

この式と（18）式の差分は以下となる。

$$\varphi(\alpha_j)\equiv U_j-U'_j=\alpha_j \log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}+\log\frac{1+\frac{N}{\underline{\theta}}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}+\log\frac{\underline{\theta}}{\alpha_j} \tag{19}$$

Nが十分に大きいとき，（19）式の α_j に関する偏微分は以下となる。

$$\varphi'(\alpha_j)\equiv\frac{\partial(U_j-U'_j)}{\partial\alpha_j}=\log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}+\alpha_j\frac{\frac{1}{\bar{\alpha}^2}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}\frac{1}{N}+\left(\frac{\frac{1}{\alpha_j}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}-1\right)\frac{1}{\alpha_j}$$

$$\approx\log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}+\left(\frac{\frac{1}{\alpha_j}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}-1\right)\frac{1}{\alpha_j} \tag{20}$$

$$\varphi''(\alpha_j)\equiv\frac{\partial^2(U_j-U'_j)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_j}\approx-\frac{\frac{2}{\alpha_j^3}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}+\frac{\frac{1}{\alpha_j^4}}{(1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j})^2}+\frac{1}{\alpha_j^2}=\frac{1}{\alpha_j^2}\left(1-\frac{\frac{1}{\alpha_j}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}\right)^2>0 \tag{21}$$

（21）式により，（20）式の $\varphi'(\alpha_j)$ は α_j の単調増加関数である。また，α_j の下限を $\underline{\theta}$，上限を $\bar{\theta}$ とするとき，（20）式で以下が成立する。

$$\varphi'(\alpha_j)\approx\log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}+\left(\frac{\frac{1}{\alpha_j}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j}}-1\right)\frac{1}{\alpha_j}<\log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}+\left(\frac{\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{N}{\bar{\theta}}}-1\right)\frac{1}{\underline{\theta}}$$

このため，Nが十分に大きいとき，$\varphi'(\alpha_j)<0$ である必要十分条件は $\log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}-\frac{1}{\underline{\theta}}<0$ であるが，それは以下と同値である。

$$\frac{1}{\bar{\alpha}}>\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{\exp(\frac{1}{\underline{\theta}})}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{\alpha}}>f(t)\equiv\frac{1+logt}{t}-1 \quad (t>1)$$

簡単な計算で，$f(t)<0$ であることが分かり，$\varphi'(\alpha_j)<0$ である。このため，（19）式の $\varphi(\alpha_j)$ は α_j の単調減少関数で，$(1+\frac{1}{\underline{\theta}})/(1+\frac{1}{\bar{\alpha}})>1$ で以下が成立するから，$\varphi(\alpha_j)>0$ となる。

$$\max_{\sigma\to\infty}\varphi(\sigma)\approx\max_{\sigma\to\infty}\left(\sigma\log\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}+\log\frac{\underline{\theta}}{\sigma}\right)=log\left(\max_{\sigma\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{\underline{\theta}}}{1+\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right)^{\sigma}\frac{\underline{\theta}}{\sigma}\right)>0$$

すなわち，$U_j>U'_j$ となる。これは，Step1で個人 j は虚偽の選好 $\alpha_j{}'=\underline{\theta}$ を報告する誘因をもたず，政府に真の選好 α_j を報告することを意味する。（Q.E.D）

4．まとめと今後の課題

本稿の目的は，公共財の自発的供給と仮想通貨のマイニング報酬といっ

た報酬体系（「プルーフ・オブ・ワーク」（Proof of Work））を関連付けるメカニズムが，公共財に関する「ただ乗りの問題」の解決に役立つ可能性を明らかにすることであった。分析の結果，明らかになったことは以下の３点である。

まず，各個人が自己の選好を正直に申告する場合，公共財の自発的供給によっても，マイニング報酬を適切に設定することで，サミュエルソン条件を満たすことができ，Nash 均衡の下でもパレート最適な水準で公共財を供給できる可能性が理論的にある（命題２）。

だが，本橋のモデルでも，各個人が自己の選好について虚偽の申告を行う誘因をもち，マイニング報酬は上記の値から乖離してしまい，パレート最適な水準で公共財を供給できない問題が発生する可能性が理論的にある（例：命題３）。

しかしながら，納税者番号制度などで各個人の賃金を政府が把握可能であるという前提の下，本橋が提唱する枠組み（メカニズム）を導入すると，一定の条件の下では，合理的な各個人は真の選好を政府に報告する誘因をもつため，パレート最適な水準で公共財を供給できる可能性が理論的に高まるということである（命題４）。

なお，本稿で残された今後の課題は以下の３点である。

第１は，通常のマネー・ストックと仮想通貨の初期発行量の合計とマイナー報酬で発行される仮想通貨との関係である。本稿の分析では，$\Omega+M$ が十分に大きく，$\beta\Sigma_j q_j \ll \Omega+M$ が成立することを前提としたが，貨幣数量説が成立する場合，公共財の自発的供給で発行する仮想通貨が急増すると物価が大幅に上昇し，この前提は成立しなくなる。このため，この前提を変更した場合，命題１から命題４がどのように修正されるのかについての分析も重要であり，その分析を行う意義は大きいと考えられる。

第２は，選好の下限や上限の問題である。公共財に対する選好に下限や上限が存在するという前提は，現実的なもので本稿の分析の一般性を失われるものではないと考える。しかしながら，本稿の分析では，全ての個人

の選好の下限と上限が同じであるという前提で命題を導いており，この前提を修正した場合，命題3と命題4がどのように修正されるかについての分析も重要であろう。

第3は，本橋が提唱する理論的メカニズムと実証実験との関係である。例えば，Chen and Plott (1996) や Chen and Tang (1998) では，CGメカニズムの実証実験を行い，学習理論の観点で望ましい性質（スーパー・モジュラリティ）を満たさない限り，Nash 均衡が達成できない可能性を指摘する。また，本橋が提供するメカニズムでは，各個人の選好について虚偽の報告に罰則をかける提案をしているが，Walker and Halloran (2004) や Sefton, Shupp and Walker (2002) の公共財の自発的供給ゲームに関する実証実験では，公共財の貢献額の増加には罰則よりも報償の方が効果的である可能性を指摘する。他方，Fehr and Gachter (2000) の実証実験では，罰則の方が公共財への貢献額が増加する可能性を指摘する。このため，Nash 均衡や罰則の効果を含め，理論と実証実験との整合性やその解釈には慎重な判断が必要であり，本橋が提唱するメカニズムについても精緻な実証実験を繰り返し行い，現実への適用可能性を検証する必要がある。

参考文献

- Bergstrom, T., Blume, L. and Varian, H. (1986) "On the private provision of a public goods," *Journal of Public Economics* Vol.29, pp.25-49
- Boadway, R., Pestieau P. and Wildasin, D.E. (1989) "Non-cooperative Behavior and Efficient Provision of Public Goods," *Public Finance,* Vol.44(1), pp.1-7.
- Chen, Y. and Plott, C. R. (1996) "The Groves-Ledyard Mechanism: An Experimental Study of Institutional Design," *Journal of Public Economics* Vol.59, pp.335-64
- Chen, Y. and Tang, F. (1998) "Learning and Incentive Compatible Mechanisms for Public Goods Provision: An Experimental Study," *Journal of Political Economy* Vol.106, pp.633-662
- Chiu, J., and Koeppl, T. (2017) "The Economics of Cryptocurrencies -Bitcoin and Beyond," *Working Papers* 1389, Queen's University, Department of Economics.
- Clarke, E. H. (1971) "Multipart Pricing of Public Goods," *Public Choice* Vol.11, pp 17-33
- Fehr, E. and Gachter, S. (2000) "Cooperation and Punishment in Public Goods Experiments," *American Economic Review* Vol.90, pp.980-994
- Groves, T. (1970). *The allocation of resources under uncertainty*. Doctoral dissertation, University of California, Berkeley.
- Groves, T. (1973) "Incentives in Teams." *Econometrica* Vol.41(4), pp.617-631
- Groves, T. and J. Ledyard (1977) "Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the 'Free Rider' Problem," *Econometrica* Vol.45, pp.783-811.
- Itaya,　J. and Schweinberger A.G. (2006) "The Public and Private Provision of Pure Public Goods and The Distortionary Effects of Income Taxation: A Political Economy Approach," *Canadian Journal of Economics,* Vol. 39(3), pp.1023-1040.
- Kesternich, M., Lange, A., and Sturm B. (2014) "The Impact of Burden Sharing Rules on The Voluntary Provision of Public Goods," *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 105(C), pp.107-123.
- Lindahl, E. (1919) "Just Taxation: a positive solution," Reprinted in part in Classics in Theory of Public Finance, R. Musgrave and A. Peacock, Eds., New York, McMillan 1958, pp.168–176.
- Morgan, J.(2000) "Financing Public Goods by Means of Lotteries," *The Review*

of Economic Studies Vol.67(4), pp.761–784

- Varian, H. (1994) "A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed," *The American Economic Review* Vol.84(5), pp. 1278-1293
- Sefton, M., Shupp, R. and Walker, J. (2007) "The effect of Rewards and Sanctions in Provision of Public Goods," *Economic Inquiry* Vol.45(4), pp.671-690
- Slavov, S. N. (2014) "Public Versus Private Provision of Public Goods," *Journal of Public Economic Theory,* Vol.16(2), pp.222-258.
- Villanacci, A., and Zenginobuz Ü. (2006) "Pareto Improving Interventions in A General Equilibrium Model with Private Provision of Public Goods," *Review of Economic Design,* Vol. 10(3), pp.249-271.
- Warr, P. G. (1982) "Pareto optimal resistribution and private charity," *Journal of Public Economics* Vol.19, pp.131-138
- Walker, J. M. and Halloran, M. A. (2004) "Rewards and Sanctions and the Provision of Public Goods in One-Shot Settings," *Experimental Economics* Vol. 7, pp.235-247
- Warr, P. G. (1983) "The private provision of a public goods is independent of the distribution of income," *Economic Letters* Vol.13, pp.207-211
- 山重 慎二（2013）「家族と社会の経済分析 日本社会の変容と政策的対応」東京大学出版会

補論A

（12）式から，Nが十分に大きいとき，マイニング報酬 β' の偏微分（$\partial\beta'/\partial\alpha_j{}'$）は以下のように変形できる。

$$\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha_j{}'}=\frac{\partial}{\partial\alpha_j{}'}\left(1-\frac{1+\frac{1}{\bar{\alpha}'}}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j'}}\right)=\frac{1}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j'}}\left(\frac{1}{\bar{\alpha}'}\right)^2\frac{1}{N}-\left(1+\frac{1}{\bar{\alpha}'}\right)\left(\frac{1}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j'}}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha_j{}'}\right)^2$$

$$=\frac{1}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j'}}\left[\left(\frac{1}{\bar{\alpha}'}\right)^2\frac{1}{N}-\left(1+\frac{1}{\bar{\alpha}'}\right)\frac{1}{1+\Sigma_j\frac{1}{\alpha_j'}}\left(\frac{1}{\alpha_j{}'}\right)^2\right]$$

$$\approx\frac{N}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left[\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)^2-\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left(\frac{1}{\alpha_j{}'}\right)^2\right]$$

$$\approx\frac{N}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)\left[\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)-\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left(\frac{1}{\alpha_j{}'}\right)^2\right]$$

$$\approx\frac{N}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)\left[\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)-\frac{1}{[(1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'})\alpha_j{}'+1]\alpha_j{}'}\right]$$

$$\approx\frac{N}{1+\frac{1}{\alpha_j'}+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left(\frac{1}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)\frac{1}{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\left[\left(\frac{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}{\Sigma_{k\neq j}\,\alpha'_k}\right)-\frac{1}{\left[\alpha_j{}'+\frac{1}{1+\Sigma_{k\neq j}\frac{1}{\alpha_k'}}\right]\alpha_j{}'}\right]$$

補論B

（12）式から，Nが十分に大きいとき，マイニング報酬 β' は以下のように変形できる。

$$\beta'=1-\frac{1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})\frac{N-1}{N}+\frac{\alpha_j'}{N}}}{1+\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)(N-1)+\frac{1}{\alpha_j'}}=1-\frac{1}{N}\frac{1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})+\frac{1}{N}(\alpha'_j-(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta}))}}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)+\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{\alpha_j'}-\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)\right)}$$

$$=1-\frac{1}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\frac{1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})[1+\frac{1}{N}(\alpha'_j-(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta}))/(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})]}}{1+\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{\alpha_j'}-\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)\right)/\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}$$

$$\approx1-\frac{1}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\left[1+\frac{\left[1+\frac{1}{N}\frac{(\alpha'_j-(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right]}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right]\left[1-\frac{1}{N}\frac{\left(1+\frac{1}{\alpha_j'}-\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)\right)}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\right]$$

$$\approx1-\frac{1}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\left[\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)-\frac{(\alpha_j{}'-(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta}))}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}\frac{1}{N}\right]\left[1-\frac{1}{N}\frac{\left(1+\frac{1}{\alpha_j'}-\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)\right)}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\right]$$

$$\approx 1-\frac{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\left[1-\frac{(\alpha'_j-(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta}))}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}\frac{1}{N}\right]\left[1-\frac{1}{N}\frac{(1+\frac{1}{\alpha_j'}-\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right))}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\right]$$

$$\approx 1-\frac{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\left[1-\frac{1}{N}\left(\frac{(\alpha_j'-(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta}))}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}+\frac{(1+\frac{1}{\alpha_j'}-\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right))}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\right]$$

$$\approx 1-\frac{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)}{N\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\left[1-\frac{1}{N}\left(\frac{\alpha'_j}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}+\frac{\frac{1}{\alpha_j'}}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}\right)\right]+$$ （α_j' に依存しない項）

補論C

$\mathrm{f}(\alpha'_j)\equiv\frac{\alpha'_j}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}+\frac{\frac{1}{\alpha_j'}}{\left(\frac{\sigma}{\theta}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}$ とすると, $\mathrm{f}(\underline{\theta})-\mathrm{f}(\bar{\theta})$ は以下のように同値変形できる。

$$\mathrm{f}(\underline{\theta})-\mathrm{f}(\bar{\theta})>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{\theta}}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}+\frac{\frac{1}{\underline{\theta}}}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}>\frac{\bar{\theta}}{\left(1+\frac{1}{(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})}\right)(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2}+\frac{\frac{1}{\bar{\theta}}}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})}{\left(\frac{\sigma}{\underline{\theta}}+\frac{(1-\sigma)}{\bar{\theta}}\right)}>\frac{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}{\left((\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})^2+(\sigma\underline{\theta}+(1-\sigma)\bar{\theta})\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})}{\left(\frac{1}{\bar{\theta}}+(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})\sigma\right)}>\frac{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}{\left((\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)^2+(\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{\bar{\theta}}+(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})\sigma\right)}{(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})}<\frac{\left((\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)^2+(\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)\right)}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\bar{\theta}}}{(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})}+\sigma<\frac{(\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}+\frac{\bar{\theta}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}-\sigma$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\bar{\theta}}}{(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\bar{\theta}})}-\frac{\bar{\theta}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}+2\sigma<\frac{(\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}}-1}-\frac{\frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}}}{\frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}}-1}+2\sigma<\frac{(\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma-1<\frac{(\bar{\theta}-(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma)^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma-1<(\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma^2-2\bar{\theta}\sigma+\frac{\bar{\theta}^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\theta}-\underline{\theta})\sigma^2-2(1+\bar{\theta})\sigma+1+\frac{\bar{\theta}^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}>0$$

$$\Leftrightarrow \sigma<\frac{(1+\bar{\theta})-\sqrt{(1+\bar{\theta})^2-(\bar{\theta}-\underline{\theta})(1+\frac{\bar{\theta}^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})})}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}\ \text{or}\ \sigma>\frac{(1+\bar{\theta})-\sqrt{(1+\bar{\theta})^2-(\bar{\theta}-\underline{\theta})(1+\frac{\bar{\theta}^2}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})})}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

$$\Leftrightarrow \sigma<\frac{(1+\bar{\theta})-\sqrt{1+\bar{\theta}+\underline{\theta}}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}\ \text{or}\ \sigma>\frac{(1+\bar{\theta})-\sqrt{1+\bar{\theta}+\underline{\theta}}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

ここで，$\sigma\epsilon[0,1]$ であることを踏まえると，上記の関係式は以下と同値になる。

$$\Leftrightarrow \sigma<\frac{(1+\bar{\theta})-\sqrt{1+\bar{\theta}+\underline{\theta}}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}$$

上限 $\bar{\theta}$ が十分に大きい値のとき，この不等式の右辺は以下となる。

$$\lim_{\bar{\theta}\to\infty}\frac{(1+\bar{\theta})-\sqrt{1+\bar{\theta}+\underline{\theta}}}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}=\lim_{\bar{\theta}\to\infty}\frac{\bar{\theta}-\sqrt{\bar{\theta}}}{\bar{\theta}}=1$$