

グラフの非可換ゼータ関数の構築と応用

三橋, 秀生 / MITSUHASHI, Hideo

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

科学研究費助成事業 研究成果報告書

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2019-06-14

令和元年6月14日現在

機関番号：32675

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05249

研究課題名(和文) グラフの非可換ゼータ関数の構築と応用

研究課題名(英文) Noncommutative zeta functions of graphs and their applications

研究代表者

三橋 秀生 (MITSUHASHI, Hideo)

法政大学・理工学部・教授

研究者番号：60455095

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、グラフに付随して定まる有向辺に、非可換な量、すなわち行列や四元数のように積の順序を逆にすると結果が異なるような量、で重みづけした重み付きグラフに対するゼータ関数を定め、非可換な量を成分にもつ行列に対する行列式(非可換行列式)などによる表現の導出など、その主要な性質の解明と関連領域への応用を行った。グラフの第1種重み付きゼータ関数と第2種重み付きゼータ関数の二つについて、これまでの理論を重みが四元数の場合へ一般化し、その成果をグラフ上の四元数量子ウォークのスペクトルの解析に応用した。また、第1種重み付きゼータ関数は、四元数を特殊な場合として含む、より一般の場合への拡張を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究成果は、伊原ゼータ関数に始まるグラフのゼータ関数論を大きく発展させるものであり、四元数量子ウォークへの応用にもみられるように、離散数学、代数学、量子モデルなどへの多大な貢献を期待できる。四元数を初めとする非可換量がグラフ重みとして与えられた場合のゼータ関数のあり方を示したもので、グラフのゼータ関数の非可換化という前人未到のテーマへの礎となるものである。グラフの重み付きゼータ関数がグラフ上の量子ウォークの固有値問題に有効であることから、本研究も量子ウォークとの関連、さらには量子情報などとの関連が期待される。

研究成果の概要(英文)：We defined several classes of weighted zeta functions of noncommutative weighted graphs; they are considered to have symmetric directed edges that are weighted by noncommutative quantities such as matrices or quaternions. We obtained main properties of the zeta functions such as determinant expressions. We generalized the theories of first and second weighted zeta functions of graphs to the case of quaternion-weighted graphs and applied them to the analysis of the spectra for quaternionic quantum walks on graphs. We also generalized the theory of first weighted zeta functions to much more general situation that includes the case of quaternions.

研究分野：群の表現論

キーワード：グラフのゼータ関数 四元数 量子ウォーク

様式 C-19, F-19-1, Z-19, CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフのゼータ関数は、伊原により導入された正則グラフに対する伊原ゼータ関数が起源である。伊原ゼータ関数は、セルバークゼータ関数の p -進類似として導入され、母関数型表示と行列式表示を持つことが示された。その後、グラフのゼータ関数は多くの研究者によって大きく発展した。研究代表者は、横浜国立大学の今野紀雄教授、小山工業高等専門学校佐藤巖教授とともに、四元数量子ウォークの研究を機に四元数を重みにもつグラフの非可換ゼータ関数の研究に取り組んでいたが、研究代表者は行列環や四元数環を包括するより一般の非可換環、特にモノイド環の元を重みにもつグラフのゼータ関数を構築し、母関数型表示や準行列式を用いた表示等、グラフのゼータ関数としての主要な性質を解明し、関連領域に応用したいという着想に至った。

2. 研究の目的

行列環や四元数環を包括するより一般の非可換環、特にモノイド環の元を重みにもつグラフのゼータ関数を構築し、母関数型表示や準行列式を用いた表示等、グラフのゼータ関数としての主要な性質を解明し、関連領域に応用することを目的とする。

3. 研究の方法

関連する研究集会やセミナー等に参加し、他の研究機関の研究者達と交流を深め、研究計画の遂行に必要な情報を収集し、文献や論文をもとに考察し、数式処理ソフトなどを用いて具体例を計算しながら研究を進めた。得られた研究成果は学術論文として公表するとともに、研究集会で発表し、他の専門家との討論を行った。

4. 研究成果

有限単純連結グラフに対して、その対称有向グラフの各有向辺上に四元数重みをもつ場合の(第1種)四元数重み付きゼータ関数の橋本型行列式表示、伊原型行列式表示及び母関数表示に関する研究を完成させた。そして、本研究で定めた四元数重み付きゼータ関数の定義が、行列式表示の可能性や有理性などから自然で妥当であることを検証した。さらに、有限連結単純グラフ上の量子ウォークのスペクトル問題に決定的役割を果たすグラフの第2種重み付きゼータ関数の(有向)辺上の重みを四元数とした場合のゼータ関数を、(第1種)四元数重み付きゼータ関数の橋本型行列式表示を修正する形で定義し、その伊原型行列式表示やオイラー積表示を導出した。導出に際しては、(第1種)四元数重み付きゼータ関数と同様に Study 行列式ゼータ関数を扱ったが、変数は四元数とし、オイラー積の収束性についても議論した。モノイド元を重みにもつ場合の非可換重み付きゼータ関数については、オイラー積を用いた定義と橋本型行列式表示については概ね完成した。伊原型行列式表示については導出の途中段階であり、もう少し議論が必要である。グラフ上の量子ウォークについては、第2種重み付きゼータ関数を右固有値問題へ応用するためにそれまで課していた条件から、重み付き隣接行列と重み付き次数行列の同時三角化可能性へと緩和し、第2種重み付きゼータ関数の四元数量子ウォークへの適用範囲を拡大した。

有限連結グラフの重み付きゼータ関数の四元数化された行列式表示を自己ループのある場合に拡張し、自己ループを持つ四元数量子ウォーク (Grover walk) の右スペクトルを、重み付き隣接行列と重み付き次数行列の右スペクトルから計算する公式を得た。さらに、二重に重みづけされた自己ループを許す有限連結グラフに対する行列式表示公式を導き、これを応用して Szegedy type の四元数量子ウォークの右スペクトル問題を判別作用素のスペクトルから導出する公式を得た。さらに、Szegedy type の四元数量子ウォークの右スペクトルのうち、判別作用素に由来するものに対応する固有ベクトルを計算する手法を確立した。また、モノイド元を重みにもつ非可換重み付きゼータ関数について、その指数母関数型母関数表示を得ることに成功した。その母関数の係数は、第2種ベキ和非可換対称関数で記述できることがわかり、非可換重み付きゼータ関数と非可換対称関数の間に密接な関係があることを発見した。さらに、四元数重み付きゼータ関数を非可換重み付きゼータ関数で記述することにも成功した。

電気回路理論に由来する resistance distance は、グラフのラプラシアンを用いて定義され、さらに、グラフの Kirchhoff index は、resistance distance とグラフの complexity を用いて定義される。Kirchhoff index にはいくつかの種類があるが、それらのある一次結合と、グラフの伊原ゼータ関数の主要部の2階微分の間に関係があることが近年発見された。これに基づき、我々はグラフの Kirchhoff index を重み付きグラフの場合に一般化して定義し、重み付きグラフのゼータ関数との関係を求めた。そして、ラプラシアンや complexity も重み付きの場合に一般化されて成り立つことを示した。また、有限グラフ上の四元数 Grover walk の左固有値問題にグラフの第2種四元数重み付きゼータ関数の行列式等式を応用して、左固有値の決定を四元数二次方程式の解を求める問題に帰着し、四元数 Grover walk の左固有値集合を求めた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

① 三橋秀生, “Zeta functions of quaternion weighted graphs”, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, No. 2086, pp. 59-72, 2018

- URL: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2086-07.pdf>
- ② 三橋秀生, 森田英章, 佐藤巖, “組合せ論的ゼータと非可換対称関数”, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, No. 2075, pp. 50-66, 2018
URL: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2075-06.pdf>
- ③ Hideo Mitsuhashi, Hideaki Morita, Iwao Sato, “The weighted Kirchhoff index of a graph”, Linear Algebra and its Applications, 査読有, Vol. 547, pp. 1-18, 2018
doi: 10.1016/j.laa.2018.01.037
- ④ Norio Konno, Kaname Matsue, Hideo Mitsuhashi, Iwao Sato, “Quaternionic quantum walks of Szegedy type and zeta functions of graphs”, Quantum Information and Computation, 査読有, Vol. 17, No. 15&16, pp. 1349-1371, 2017
doi: 10.26421/QIC17.15-16
- ⑤ Norio Konno, Hideo Mitsuhashi, Iwao Sato, “Quaternionic Grover Walks and Zeta Functions of Graphs with Loops”, Graphs and Combinatorics, 査読有, Vol. 33, pp. 1419-1432, 2017
doi: 10.1007/s00373-017-1785-4
- ⑥ Norio Konno, Hideo Mitsuhashi, Iwao Sato, “The Discrete-time Quaternionic Quantum Walk and the Second Weighted Zeta Function on a Graph”, Interdisciplinary Information Sciences, 査読有, Vol. 23, pp. 9-17, 2017
doi: 10.4036/iis.2017.A.02
- ⑦ Norio Konno, Hideo Mitsuhashi, Iwao Sato, “The quaternionic second weighted zeta function of a graph and the Study determinant”, Linear Algebra and its Applications, 査読有, Vol. 510, pp. 92-109, 2016
doi: 10.1016/j.laa.2016.08.007
- ⑧ Norio Konno, Hideo Mitsuhashi, Iwao Sato, “The quaternionic weighted zeta function of a graph”, Journal of Algebraic Combinatorics, 査読有, Vol. 44, pp. 729-755, 2016
doi: 10.1007/s10801-016-0686-6

[学会発表] (計 19 件)

- ① 佐藤巖, 三橋秀生, 森田英章, “The weighted Kirchhoff index of a graph”, 日本数学会年会, 東京工業大学, 2019 年 3 月
- ② 佐藤巖, 三橋秀生, 森田英章, “The weighted Kirchhoff index of a graph”, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2018 年 12 月
- ③ 三橋秀生, 今野紀雄, 佐藤巖, “有限グラフ上の四元数 Grover walk の左スペクトルについて”, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2018 年 12 月
- ④ 三橋秀生, “四元数 Grover 行列の左固有値”, Workshop of Graphs and Analysis, 日本大学軽井沢研修所, 2018 年 10 月
- ⑤ 今野紀雄, 三橋秀生, 佐藤巖, “有限グラフ上の四元数量子ウォークの左固有値について”, 日本数学会秋季総合分科会, 岡山大学, 2018 年 9 月
- ⑥ 佐藤巖, 三橋秀生, 森田英章, “A weighted generalized Bartholdi zeta function of a digraph”, 日本数学会年会, 東京大学, 2018 年 3 月
- ⑦ 三橋秀生, “Quaternionic quantum walks of Szegedy type on graphs”, Workshop of Graphs and Analysis, 日本大学軽井沢研修所, 2018 年 2 月
- ⑧ 三橋秀生, “Zeta functions of quaternion weighted graphs”, 代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 12 月
- ⑨ 今野紀雄, 三橋秀生, 佐藤巖, “グラフの第 2 種重み付きゼータ関数の四元数化”, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2017 年 12 月
- ⑩ 三橋秀生, 森田英章, 佐藤巖, “組合せ論的ゼータ関数と非可換対称関数”, 表現論と組合せ論, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 10 月
- ⑪ 佐藤巖, 三橋秀生, 森田英章, “A generalized Bartholdi zeta function of a graph”, 日本数学会秋季総合分科会, 山形大学, 2017 年 9 月
- ⑫ 三橋秀生, 今野紀雄, 松江要, 佐藤巖, “有限グラフ上の四元数 Szegedy ウォークと第 2 種重み付きゼータ関数”, 日本数学会秋季総合分科会, 山形大学, 2017 年 9 月
- ⑬ 三橋秀生, 今野紀雄, 佐藤巖, “有限グラフの第 2 種四元数重み付きゼータ関数”, 2017 日本数学会年会, 2017 年 3 月, 首都大学東京
- ⑭ 三橋秀生, “重み付きグラフのゼータ関数の四元数化”, 量子論にまつわる数学と数論の連携探索, 2017 年 3 月, 早稲田大学
- ⑮ 三橋秀生, “グラフの第 2 種重み付きゼータ関数の四元数化”, Workshop of Graphs and Analysis, 日本大学軽井沢研修所, 2017 年 2 月
- ⑯ 三橋秀生, 今野紀雄, 佐藤巖, “四元数重み付きグラフのゼータ関数と四元数行列式”, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2016 年 12 月
- ⑰ 三橋秀生, “量子ウォークとクリフォード代数”, 量子ウォークの代数的考察と光学との融合, 佐世保工業高等専門学校, 2016 年 9 月
- ⑱ 三橋秀生, “四元数重み付きグラフのゼータ関数”, グラフゼータと量子ウォークの諸相, 室

蘭工業大学, 2016 年 8 月

⑱三橋秀生, “有限グラフ上の四元数重み付きゼータ関数と四元数行列式”, 第 33 回代数的組合せ論シンポジウム, ピアザ淡海 (滋賀県), 2016 年 6 月

[その他]

ホームページ等

<https://ai.ws.hosei.ac.jp/wp/staff/mitsuhashi/>

<http://kenkyu-web.i.hosei.ac.jp/Profiles/103/0010203/profile.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名 :

ローマ字氏名 :

所属研究機関名 :

部局名 :

職名 :

研究者番号 (8 桁) :

(2) 研究協力者

研究協力者氏名 : 佐藤 巖

ローマ字氏名 : (SATO, iwao)

※科研費による研究は, 研究者の自覚と責任において実施するものです. そのため, 研究の実施や研究成果の公表等については, 国の要請等に基づくものではなく, その研究成果に関する見解や責任は, 研究者個人に帰属されます.