デフォルト連鎖下でのCDSポートフォリオの最適投資戦略

武市, 幸大 / TAKECHI, Yukihiro

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編
(巻 / Volume)
60
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
6
(発行年 / Year)
2019-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00022094

法政大学大学院紀要 理工学・工学研究科編 Vol.60(2019 年 3 月) 法政大学

デフォルト連鎖下での CDS ポートフォリオの最適投資戦略

OPTIMAL INVESTMENT STRATEGIES OF CDS PORTFOLIO UNDER DEFAULT CONTAGION

武市幸大
Yukihiro TAKECHI
指導教員 浦谷規

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

We consider optimal investment problems of CDS portfolio under default contagion. We formulate a stochastic contagion model of default intensity by the jump diffusion process with mean reversion trend. We obtained optimal investment strategies, where investors maximize expected utility function at the maturity time. The optimal portfolio strategies are obtained by the solutions of HJB equation, which is a second order parabolic partial differential equation. We analyze the effect of degeneracy of default intensities and volatility through the numerical examples related to the optimal portfolio.

Key Words *: Default contagion, CDS portfolio, Optimal investment strategies, Stochastic control problem, HJB equation*

1. はじめに

連続時間モデルのポートフォリオ最適化問題を解くために最適な確率的制御技術の使用を開拓した Merton (1969) [1] の研究以来，連続時間の効用最大化問題には大きな関心が寄せられている．Bo (2016) [2] によると，提案されたモデルの大半は株式や債券等からなる市場を扱っており，その価値の不確実性はブラウン運動の連続プロセスによって支配されている．近年の世界的な金融危機であるリーマンショックやユーロ危機にて現状の金融システムに不具合が生じ，デフォルト機能をモデルに含める重要性が概説されてる．その結果多くの研究者がデフォルト市場でのポートフォリオの最適化問題を分析する状況となった．また 2000 年代に Credit Default Swap (CDS) 市場の発達により国や企業の信用性はトレード可能となり，オプションや債券と CDS の両方を扱うトレーディング (ヘッジ) 戦略が非常に普及した．

そこで本研究では Money Market Account (MMA) と複数の参照企業からなる CDS ポートフォリオを考える．CDS とは定期的な保険料と引き換えに，企業や国のデフォルトによる損失を補償するスワップ契約である．その参照企業のデフォルトモデルの設定で，ある企業のデフォルトはポートフォリオ内の他の企業のデフォルト強度の増加を引き起こす構造としている．この構造をデフォルト連鎖と呼ぶ．デフォルト連鎖により生き残った企業を参照する CDS の市場評価の高騰につながり，その結果これらの CDS の瞬間的な価値の増加 (ジャンプ) を引き起こすことになる．本研究ではモデル設定を先行研究である Bo (2016) [2] のものを踏襲する．しかしそのモデルの欠点として，デフォルト強度がポートフォリオ内の参照企業のデフォルト状態のみに従い，デフォルトイベントの発生時にジャンプすることが挙げられる．Azizpour, Giesecke, Schwenkler (2018) [3] によると，適当なデフォルトイベントの影響は時間とともに弱くなり長期的平均に収束すると分析している．よってこのデフォルトモデル設定は現実的ではないと言える．そこでデフォルト強度に長期平均水準に向かって指数関数的に減衰する平均回帰項とブラウン運動からなるボラティリティ項を加えてデフォルトモデルを再構築する．

次に上のデフォルトモデルを用いて最適化問題を考える．CDS ポートフォリオへの最適投資戦略の導出には確率制御のフレームワークを用いる．辻村 (2016) [4] によると，確率制御とは Bellman の最適性の原理に基づいて構築されている理論である．本研究では機関投資家の有限満期における期待効用の最大化を考える．連続時間モデルの確率制御問題における価値関数が満たす Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を導出する．HJB 方程式とは最適化問題の解が満たす必要条件となる偏微分方程式である．本研究での HJB 方程式は 2 階の放物型偏微分方程式で与えられる．価値関数の解の形を特定し，HJB 方程式を満たす最適投資戦略と価値関数の解析解を示す．なお HJB 方程式の十分性については本文 Verification theorem を確認されたい．その後，導出した最適投資戦略の数値例を挙げて，デフォルト連鎖や平均回帰項による影響を分析する．

2. モデル設定

Bo (2016) [2] を参考にモデル設定を行う．モデルは確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ の下で考える．特に断りが無い場合，期待値はリスク中立測度 $\mathbb{Q}$ の下で考え，右下の添え字 t は時刻 t での条件付期待値の省略とする．

(1)　デフォルトモデル

最初に参照企業のデフォルト強度について定義を与える．従来モデルではデフォルト時刻 τ_i を用いて，

$$X_0(t) = (a_0 + a_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq t\}} + a_2 \mathbb{1}_{\{\tau_2 \leq t\}} + \dots) \mathbb{1}_{\{\tau_0 > t\}}, \tag{1}$$

と定義する．このデフォルト強度はデフォルトに起因するジャンプ過程のみのプロセスとなっている．新しく考えるデフォルト強度 X を以下の定義とする．

定義 1　参照企業 i $(i = 1, \dots, N)$ のデフォルト強度 X_i は次の確率微分方程式 (SDE)

$$dX_i(t) = (\alpha_i - \beta_i X_i(t))dt + \sum_{k=1}^{K} \sigma_{ik} \sqrt{X_i(t)} dW_k(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} dZ_j(t), \tag{2}$$

に従うとする．ただし，$W(t) = (W_k(t))_{k=1,\dots,K}^{\top}$ は K 次元の独立ブラウン運動とし，$\alpha_i(>0)$ は平均回帰水準，$\beta_i(>0)$ は平均回帰速度，$\sigma_{ik}(>0)$ はブラウン運動のボラティリティ係数とする．$w_{ij}(>0)$ はジャンプ幅とし，企業 j のデフォルトが企業 i のデフォルト強度 X_i へ与える影響の重み付けを表している．またデフォルト強度が非負であるために，$2\alpha_i \geq \sum_{k=1}^{K} \sigma_{ik}^2$ とする．よって $X_i(t)$ はマルコフ性を満たす右連続な関数となる．省略のために任意の x に関して，平均項を $\mu(x) = (\alpha_i - \beta_i x_i)_{i=1,\dots,N}^{\top}$，ボラティリティ項を $\sigma(x) = (\sigma_{jk} \sqrt{x_j})_{j=1,\dots,N,k=1,\dots,K}$，企業 j への重みベクトルを $w_j = (w_{ij})_{i=1,\dots,N}$ としておく．次にデフォルト状態変数を N 次元のデフォルト定義関数 $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_N(t)) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{0,1\}^N$ で表す．ただし企業の同時デフォルトは発生しないとする．また隣接デフォルト状態変数 $Z^j(t)$ を

$$Z^j(t) := (Z_1(t), \dots, Z_{j-1}(t), 1 - Z_j(t), , Z_{j+1}(t) \dots, Z_N(t)), \tag{3}$$

とする．Dynkin の公式を用いて次を定義する．

$$M_i(t) := Z_i(t) - \int_0^{t \wedge \tau_i} X_i(s) ds, \tag{4}$$

は $(\mathbb{Q}, \mathcal{G}_t)$ の局所マルチンゲール項とする．

(2)　CDS モデル

リスクフリーな MMA と N 社の CDS からなる金融市場を考える．取引手数料は考慮しない．市場の金利 r (>0) は一定とし，$B(t) = e^{rt}$ を時刻 t での MMA とする．参照企業 i の CDS 契約の満期を T_i とすると，時刻 t $(\in [0, T_i])$ での企業 i の CDS の価値 $C_i(t)$ を

$$C_i(t) := (1 - Z_i(t)) \Phi_i(t, X(t), Z(t)), \tag{5}$$

とする．ただし $\Phi_i(t,x,z)$ は企業 i の CDS のデフォルト直前までの価値プロセスとし，

$$\begin{aligned}
&\Phi_i(t,x,z) \\
&:= E_t\left[L_i \int_t^{T_i} e^{-\int_t^u r ds} dZ_i(u) - \nu_i \int_t^{T_i \wedge \tau_i} e^{-\int_t^u r ds} du\right] \\
&= E_t\left[L_i Z_i(T_i) e^{-\int_t^{u \wedge \tau_i} r du} - \nu_i \int_t^{T_i \wedge \tau_i} e^{-\int_t^u r ds} du\right] \\
&= L_i \Phi_i^{(2)}(t,x,z) - \nu_i \Phi_i^{(1)}(t,x,z),
\end{aligned} \tag{6}$$

とする．$L_i, \nu_i(>0)$ は定数で，ここで

$$\Phi_i^{(1)}(t,x,z) := E_t\left[\int_t^{T_i \wedge \tau_i} e^{-\int_t^u r ds} du\right] \tag{7}$$

$$\Phi_i^{(2)}(t,x,z) := E_t\left[Z_i(T_i) e^{-\int_t^{T_i \wedge \tau_i} r du}\right], \tag{8}$$

とすると Feynman-Kac の公式より，

$$\begin{aligned}
&d\Phi_i(t,x,z) \\
=&\Big(r(1 - z_i)\Phi_i(t,x,z) - r\nu_i z_i \Phi_i^{(1)}(t,x,z) + \nu_i(1 - z_i)\Big)dt \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \sigma_j(x) dW(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \Big[\Phi_i\Big(t, x(t-) + w_j, z^j(t-)\Big) - \Phi_i\Big(t, x(t-), z(t-)\Big)\Big] dM_j(t),
\end{aligned} \tag{9}$$

の表現を得る．よって企業 i の CDS の価値 $C_i(t)$ のプロセスは上式 (9) および伊藤の公式より，

$$\begin{aligned}
&dC_i(t,x,z) \\
=&(1 - z_i(t))\{r\Phi_i(t,x,z) + \nu_i - L_i x_i\}dt \\
&+ (1 - z_i(t)) \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \sigma_j(x) dW(t) - \Phi_i(t,x,z) dM_i(t) \\
&+ (1 - z_i(t-)) \sum_{j \neq i}^{N} \Big[\Phi_i\Big(t, x(t-) + w_j, z^j(t-)\Big) - \Phi_i\Big(t, x(t-), z(t-)\Big)\Big] \\
&\times dM_j(t),
\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．上式の右辺第 4 項にて他の参照企業に CDS の価値がジャンプするデフォルト連鎖の影響を見ることができる．

(3)　確率測度変換

次章からの最適化問題ではリスクの現実の分布である実確率測度 $\mathbb{P}$ の下で考える．しかしここまでは CDS の価値をリスク中立測度 $\mathbb{Q}$ の下で考えてきた．そこでリスク中立測度 $\mathbb{Q}$ から実測度 $\mathbb{P}$ への変換を考える．

定義 2　関数 $\theta(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ はそれぞれのデフォルト状態 $z \in \mathcal{S}$ おいて $\mathbb{R}^K$ と $(-1, \infty)^N$ の値をとるベクトルとし，以下の関係式

$$W_k^{\mathbb{P}}(t) = W_k(t) - \int_0^t \theta_k(u, X(u), Z(u)) du \tag{11}$$

$$M_j^{\mathbb{P}}(t) = M_j(t) - \int_0^{t \wedge \tau_j} X_j(u) \lambda_j(u, X(u), Z(u)) du, \tag{12}$$

をそれぞれ満たす．また両式は $\mathbb{P}$-マルチンゲールとなる．関数 $\theta(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ はそれぞれ拡散リスク，デフォルトリスクの市場価格を表している．

3.　最適投資問題

投資家の富過程，ポートフォリオプロセスを導入し，確率制御問題を定式化する．HJB 方程式を導き，最適投資戦略を示す．

(1)　富過程とポートフォリオプロセス

投資家はリスクフリーな MMA と N 社の CDS ポートフォリオの動的組み替えによって，有限満期 $T(\le \min(T_1,\dots,T_M))$ での投資家の期待効用の最大化を図る．また投資家は金融商品購入に関わる取引手数料やその他金融資産の購入による資産収入はない (セルフファイナンシング) とする．それぞれの企業 i に対して，時刻 t での CDS の投資比率を $\pi_i(t)$ とする．ただし投資家は CDS をロング (買い) の際には $\pi_i(t) > 0$, ショート (売り) の際には $\pi_i(t) < 0$ の投資する．同様に MMA への投資比率を $\pi_B(t)$ とする．投資比率 $\pi(t) = (\pi_1(t),\dots,\pi_N(t))$ となるプロセスをポートフォリオプロセスとすると，その下で富過程 $V^\pi(t)$ のプロセスは

$$\frac{dV^\pi(t)}{V^\pi(t)} = \sum_{i=1}^N \pi_i(t)\frac{d\left(C_i(t)+D_i(t)\right)}{C_i(t)} + \pi_B(t)\frac{dB(t)}{B(t)}, \tag{13}$$

となる．ただし初期 $t=0$ では $V^\pi(0)=v$ とし，$D_i(t)$ は配当プロセスで

$$D_i(t) = L_iZ_i(t) - \nu_i\int_0^t (1-Z_i(s))ds, \tag{14}$$

で与えられ，$D_i(0)=0$ とする．次に投資比率 $\pi(t)$ の制御量としての定義を与える．

定義 3　制御量の集合 $\mathcal{U}_t(v,x,z)$，$(v,x,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^N\times\mathcal{S}$ を定義する．集合 $\mathcal{U}_t$ は (v,x,z) に関して $\mathcal{G}$-可測な局所有界な取引戦略の集合で，$\pi(t)\in\mathcal{U}_t$ は

$$\begin{aligned}\pi(t) &= (\pi_i(t))_{i=1,\dots,N}\\ &= (\pi_i(t,V^\pi(t-),X(t-),Z(t-)))_{i=1,\dots,N},\end{aligned} \tag{15}$$

となるフィードバック制御関数となる．

任意の $\pi(t)\in\mathcal{U}_t$ な戦略において，確率測度 $\mathbb{P}$ の下で富過程のプロセス $dV^\pi(t)$ は，

$$\begin{aligned}&\frac{dV^\pi(t)}{V^\pi(t)}\\ &= rdt + \sum_{i=1}^N \pi_i(t)(1-z_i(t))\Big\{\sum_{j=1}^N F_{(i,j)}(t,x,z)\sigma_j(x)\theta(t,x,z)\\ &\quad + \sum_{j=1}^N (1-z_j(t-))G_{(i,j)}(t,x,z)x_j\lambda_j(t,x,z)\Big\}dt\\ &\quad + \sum_{i=1}^N \pi_i(t)(1-z_i(t))\sum_{j=1}^N F_{(i,j)}(t,x,z)\sigma_j(x)dW^{\mathbb{P}}(t)\\ &\quad + \sum_{i=1}^N \pi_i(t-)(1-z_i(t-))\sum_{j=1}^N G_{(i,j)}(t,x,z)dM_j^{\mathbb{P}}(t),\end{aligned} \tag{16}$$

と表せる．ただし $F_{(i,j)}(t,x,z), G_{(i,j)}(t,x,z)$ は

$$F_{(i,j)}(t,x,z) := \frac{\dfrac{\partial\Phi_i\big(t,x,z\big)}{\partial x_j}}{C_i\big(t,x,z\big)} \tag{17}$$

$$G_{(i,j)}(t,x,z) := \frac{\Phi_i\big(t,x(t-)+w_j,z^j\big) - \Phi_i\big(t,x(t-),z\big)}{C_i\big(t,x,z\big)}, \tag{18}$$

とする．$F_{(i,j)}$ は CDS の価値 Φ_i の x_j に関する偏微分を，$G_{(i,j)}$ はデフォルトによる CDS の価値の瞬間的な増加 (ジャンプ) でデフォルト連鎖の影響を表している．

(2)　価値関数と HJB 方程式

本論ではリスク回避的な投資家を考える．投資家の効用関数 $U(v)\in[0,\infty)$ を

$$U(v) = \frac{v^\gamma}{\gamma}, \tag{19}$$

とする．ただし $\gamma\in(0,1)$ はリスク回避度とする．投資家の効用関数である $U(v)$ の満期での期待値の最大化を考えるため，価値関数 η は，

$$\eta(t,v,x,z) := \sup_{\pi\in\mathcal{U}_t} E_t^{\mathbb{P}}\Big[U(V^\pi(T))\Big], \tag{20}$$

とする．ここで，$(t,v,x,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^N\times\mathcal{S}$ とし，(t,v,x) に関して $C^{1,2,2}$ 級とする．

ここで伊藤の公式より，$\eta(t,v,x,z)$ は $0\le t<u$ に関して，

$$\begin{aligned}&\eta(u,V^\pi(u),X(u),Z(u))\\ &\quad=\eta(t,V^\pi(t),X(t),Z(t))\\ &\qquad+\int_t^u\left(\frac{\partial}{\partial s}+\mathcal{L}_c^\pi+\mathcal{L}_J^\pi+\mathcal{A}\right)\eta(s,V^\pi(s),X(s),Z(s))ds\\ &\qquad+\mathcal{M}^{\mathbb{P}}(u)-\mathcal{M}^{\mathbb{P}}(t),\end{aligned} \tag{21}$$

の表現を得る．ただしプロセス $\mathcal{M}^{\mathbb{P}} = (\mathcal{M}(t);t\ge 0)$ は $\mathbb{P}$-局所マルチンゲール項であり，オペレータ $\mathcal{L}_c^\pi,\mathcal{L}_J^\pi,\mathcal{A}$ は

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_c^\pi\eta(t,v,x,z)\\ &:=\frac{\partial\eta}{\partial v}v\Bigg[r+\sum_{i=1}^N\pi_i(t)(1-z_i(t))\Big\{\sum_{j=1}^N F_{(i,j)}(t,x,z)\sigma_j(x)\theta(t,x,z)\\ &\quad-\sum_{j=1}^N(1-z_j(t-))G_{(i,j)}(t,x,z)x_j\Big\}\Bigg]\\ &\quad+\sum_{l=1}^N\frac{\partial^2\eta}{\partial v\partial x}v\sum_{i=1}^N\pi_i(t)(1-z_i(t))\sum_{j=1}^N F_{(i,j)}(t,x,z)(\sigma_j\sigma_j^\top)(x)\\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}v^2\sum_{k=1}^K\left(\sum_{i=1}^N\pi_i(t)(1-z_i(t))\sum_{j=1}^N F_{(i,j)}(t,x,z)\sigma_{jk}(x)\right)^2,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_J^\pi\eta(t,v,x,z)\\ &:=\sum_{j=1}^N\Bigg[\eta\Big(t,v+v\sum_{i=1}^N\pi_i(t)(1-z_i(t-))G_{(i,j)}(t,x,z),x+w_j,z^j\Big)\\ &\quad-\eta(t,v,x,z)\Bigg](1-z_j(t-))x_j(1+\lambda_j(t,x,z)),\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\eta(t,v,x,z) &= (\mu(x)^\top+\sigma(x)\theta(t,x,z))D_x\eta(t,v,x,z)\\ &\quad+\frac{1}{2}Tr\left[(\sigma\sigma^\top)(x)D_x^2\eta(t,v,x,z)\right],\end{aligned} \tag{24}$$

とする．$\mathcal{L}_c^\pi$ は $\eta(t,v,x,z)$ の連続的な項を，$\mathcal{L}_J^\pi$ は $\eta(t,v,x,z)$ のジャンプの項を表している．さらにオペレータ $\mathcal{A}$ は $\eta(t,v,x,z)$ の非制御項を表している．上式の Tr はトレースを表す．また動的計画法の原理より $0\le t<u\le T$ に関して

$$\eta(t,v,x,z) = \sup_{\pi\in\mathcal{U}_t}E_t^{\mathbb{P}}\Big[\eta(u,V^\pi(u),X(u),Z(u))\Big], \tag{25}$$

が成り立つので，確率制御問題における価値関数は以下の HJB 方程式

$$\sup_{\pi\in\mathcal{U}_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_c^\pi+\mathcal{L}_J^\pi+\mathcal{A}\right)\eta(t,v,x,z)=0, \tag{26}$$

を持ち，終端条件

$$\eta(T, v, x, z) = U(v), \tag{27}$$

を満たす．

(3) HJB 方程式と最適投資戦略

導出した HJB 方程式 (26) から最適投資戦略の具体的な解を示す．価値関数 η は以下のように分解できるとする．

$$\eta(t, v, x, z) = v^{\gamma} Q(t, x, z). \tag{28}$$

関数 $Q(t, x, z)$ は (t, x) に関して $C^{1,2}$ 級とする．よって HJB 方程式は

$$\frac{\partial Q(t, x, z)}{\partial t} + \mathcal{A}Q(t, x, z) + \sup_{\pi \in \mathcal{U}_t} \mathcal{H}(t, x, z, \pi) = 0, \tag{29}$$

となる．終端条件も同様に

$$Q(T, x, z) = \frac{1}{\gamma}, \tag{30}$$

となる．ただしハミルトン関数 $\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t, x, z, \pi)\\
=&\gamma Q(t, x, z)\Bigg[r + \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t)(1 - z_i(t))\Big\{\sum_{j=1}^{N} F_{(i,j)}(t, x, z)\sigma_j(x)\theta(t, x, z)\\
&- \sum_{j=1}^{N}(1 - z_j(t-))G_{(i,j)}(t, x, z)x_j\Big\}\Bigg]\\
&+ \gamma \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial Q(t, x, z)}{\partial x_l} \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t)(1 - z_i(t)) \sum_{j=1}^{N} F_{(i,j)}(t, x, z)(\sigma_j \sigma_j^{\top})(x)\\
&+ \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} Q(t, x, z) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t)(1 - z_i(t)) \sum_{j=1}^{N} F_{(i,j)}(t, x, z)\sigma_{jk}(x)\right)^2\\
&+ \sum_{j=1}^{N}\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t)(1 - z_i(t-))G_{(i,j)}(t, x, z)\right)^{\gamma}\\
&\qquad \times Q(t, x + w_j, z^j)(1 - z_j(t-))x_j(1 + \lambda_j(t, x, z))\\
&- Q(t, x, z) \sum_{j=1}^{N}(1 - z_j(t))x_j(1 + \lambda_j(t, x, z)),
\end{aligned} \tag{31}$$

となり，HJB 方程式 (29) は富過程 $V^{\pi}(t)$ を含まない形になる．

次に最適フィードバック制御関数 $\pi^*(t, x, z)$ を考える．ここでデフォルト数を m $(m = 0, 1, \ldots, N)$ とすると，企業 j_1 から企業 j_m までデフォルトしている状態を $z = 0^{j_1,\ldots,j_m}$ とする．よって最適投資戦略が存在する為に，デフォルト状態 $z = 0^{j_1,\ldots,j_m}$ に関して，$\pi^*(t, x) = (\pi_i^*(t, x)\,;\, i \notin \{j_1, \ldots, j_m\})^{\top}$ は

$$\pi^*(t, x) \in \mathop{\arg\max}_{\pi \in \mathcal{J}^{(N-m)}} \mathcal{H}(t, x, 0^{j_1,\ldots,j_m}, \pi), \tag{32}$$

を満たす．ただし，許容される戦略集合は

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(N-m)} :=&\Bigg\{\pi \in \mathbb{R}^{N-m}\,;\, 1 + \sum_{i \notin \{j_1,\ldots,j_m\}} \pi_i \xi_{ij} \geq 0,\\
&\qquad j \notin \{j_1, \ldots, j_m\},\ \forall \xi_{ij} \in [a_{ij}, b_{ij}]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{33}$$

とする．ただし，$G_{(i,j)}(t, x, 0^{j_1,\ldots,j_m}) \in [a_{ij}, b_{ij}]$ とする．戦略 $\pi \in \mathcal{J}$ とすることで富過程 $V^{\pi}(t)$ が非負とならない．

ここで，デフォルト強度 x にボラティリティ係数 $\sigma(x) = 0$ の条件を加える．そのままでは閉じた解は存在しないためである．よって $\sigma(x) = 0$ の下で最適投資戦略 $\pi^*(t)$ は

$$\pi^*(t, x) = (G^{\top}(t, x))^{-1}\left[\left(\frac{Q(t, x)}{Q_j(t, x)(1 + \lambda_j(t, x))}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1\right]^{\top}_{j \notin \{j_1,\ldots,j_m\}}, \tag{34}$$

となる．

4. HJB 方程式と価値関数

上の最適投資戦略 $\pi^*(t)$ の下で HJB 方程式の解である価値関数を見ていく．もし参照企業のデフォルト数 m が $m = N$ の時，つまり参照企業の全てがデフォルトしている場合，HJB 方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}\right) Q(t, x, 1) + \gamma r Q(t, x, 1) = 0, \tag{35}$$

となり，終端条件 $Q(T, x, 1) = \gamma^{-1}$ を満たす．上式は一意の解が存在し，$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^N$ に関して

$$Q(t, x, 1) = \frac{1}{\gamma} e^{\gamma r(T-t)}, \tag{36}$$

となる．次にデフォルト数が $m = 0, 1, \ldots, N-1$ のときを考える．そのために定理 4 を紹介する．

定理 4 (Bo (2018) [5] より) デフォルト状態 $z = 0^{j_1,\ldots,j_m,j}, j \notin \{j_1, \ldots, j_m\}$ の時，HJB 方程式を満たすような正の解 $Q(t, x, 0^{j_1,\ldots,j_m,j})$ を持つと仮定する．その時にデフォルト状態 $z = 0^{j_1,\ldots,j_m}$ において，HJB 方程式を満たすような正の解 $Q(t, x, 0^{j_1,\ldots,j_m})$ が存在する．

また最適投資戦略 $\pi^*(t)$ より，デフォルト状態 $z = 0^{j_1,\ldots,j_m}$ に関して HJB 方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}\right) Q(t, x) + a(t, x)Q(t, x) + b(t, x)Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t, x) = 0, \tag{37}$$

の 2 階の放物型偏微分方程式の形となり，終端条件 $Q(T, x) = \gamma^{-1}$ を満たす．ただし係数 a, b は

$$a(t, x) := \gamma r - \sum_{j \notin \{j_1,\ldots,j_m\}} x_j(1 + \lambda_j(t, x) - \gamma) \tag{38}$$

$$b(t, x) := (1 - \gamma) \sum_{j \notin \{j_1,\ldots,j_m\}} x_j \left\{Q_j(t, x + w_j)(1 + \lambda_j(t, x))\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{39}$$

とする．よって

$$Q(t, x) = \hat{Q}^{1-\gamma}(t, x), \tag{40}$$

とおくと，HJB 方程式を満たす解は一意に存在し，

$$\begin{aligned}
\hat{Q}(t, x) =&\gamma^{-\frac{1}{1-\gamma}} \exp\left(\frac{1}{1-\gamma}\int_t^T a(u, x(u))du\right)\\
&+ \frac{1}{1-\gamma}\int_t^T \left\{b(s, x(s)) \exp\left(\frac{1}{1-\gamma}\int_t^s a(u, x(u))du\right)\right\} ds,
\end{aligned} \tag{41}$$

となる．

5. 数値計算

参照企業数 $N = 2$ の時の数値例で最適投資戦略を分析する．CDS の価値のシミュレーションと価値関数の数値計算から最適投資比率を計算する．パラメータ設定は Bo (2016) [5] を参考にしている．まずそれぞれの CDS の満期を $T_i = 2$，市場の金利 $r = 0.05$，共通のリスク要因であるブラウン運動の次元は $K = 2$ 次元とする．またデフォルト強度の初期値を $x_2 = 1.0$ とし，企業 2 (企業 1) がデフォルトした際における企業 1 (企業 2) のデフォルト強度 $x_1(x_2)$ へのジャンプ幅は $w_1 = 1.0$ ($w_2 = 1.0$) とする．平均回帰項ついてはそれぞれ $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ とすると，平均回帰水準は $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = 1.0$ となる．ボラティリティ係数は $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$ とする．一方 CDS について保険料を $\nu = 0.6$，保険金を $L = 1.0$ とする．その他ブラウン運動から生じるリスクプレミアムは $\theta_1 = \theta_2 = 0.1$，参照企業のデフォルトから生じるリスクプレミアムをデフォルト前 $\lambda = -0.4$，デフォルト後 $\lambda = -0.5$ とする．投資家のリスク回避度を $\gamma = 0.25$ とする．なおボラティリティ係数に関して，CDS の価値のシミュレーションにて上記のパラメータの値を用いている．一方で価値関数 $Q(t, x, z)$ の数値計算では $\sigma(x) = 0$ としているため，本研究での数値計算にはモデルリスクを含んでいる．

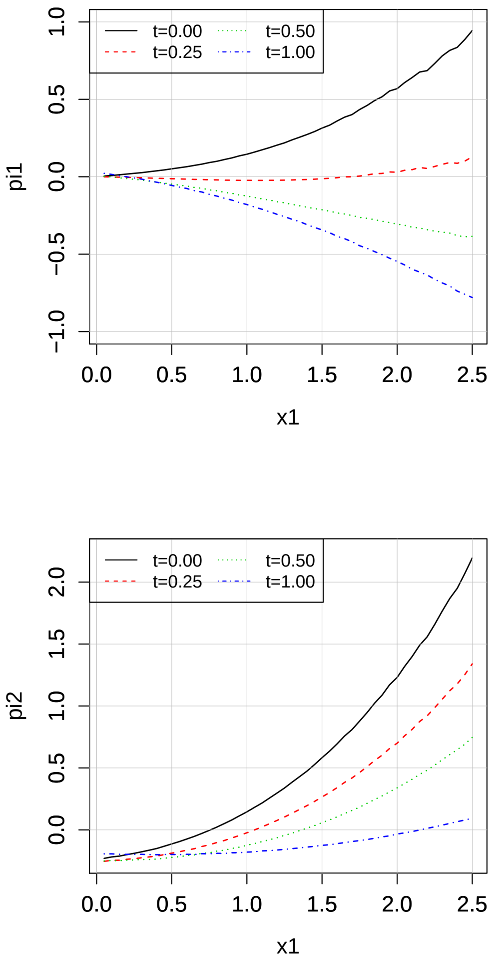

図 1 . 各時刻における最適投資比率 π_1, π_2

図 1 はデフォルト前 ($z = (0, 0)$) の各時刻において，縦軸に最適投資比率 π_1, π_2，横軸にデフォルト強度の初期値 x_1 で比較したグラフである．上段では企業 1 の CDS への投資比率 $\pi_1(t, x_1, x_2 = 1.00)$ を，下段は企業 2 の CDS への投資比率 $\pi_2(t, x_1, x_2 = 1.00)$ を示している．両グラフから満期までの期間が長い場合には CDS を買い入れる傾向があり，期間が短くなるにつれ買いから売りに投資ポジションを変えることがわかる．これは残存期間が長い方がデフォルトの不確実性が高いためである．また初期値 x_1 が低い場合買い売り共に比率が小さいが，x_1 が高い場合 π_1 ではどの時刻でも買いまたは売りの比率が大きくなることがわかる．特には π_2 では大きく買いポジションを取っており，デフォルト強度の初期値 x_1 に大きく依存していることがわかる．企業 1 のデフォルト強度が高いと CDS の価値が高く，デフォルト連鎖も考慮したポジションをとるためである．

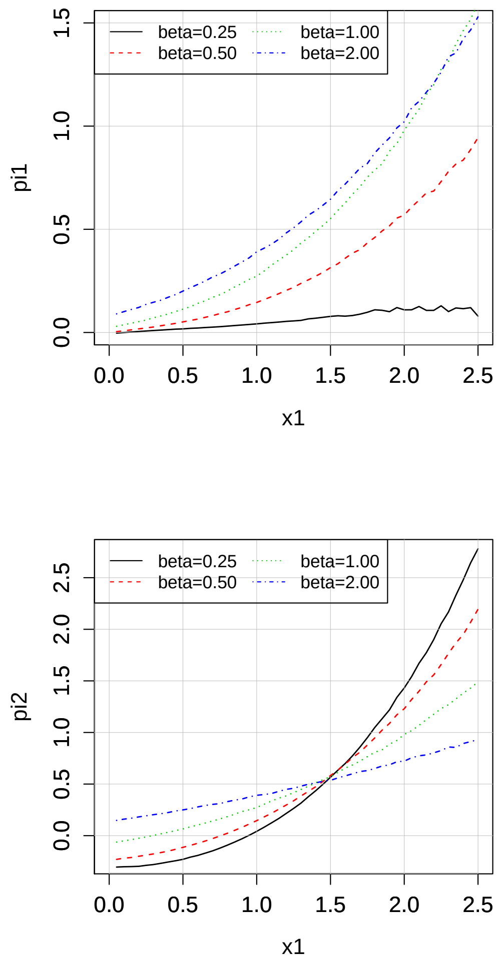

図 2 . 回帰速度 β による最適投資比率 π_1, π_2 の感度分析

図 2 は初期時刻 $t = 0$，デフォルト強度の初期値 x_1 における平均回帰速度 β による影響を感度分析したグラフである．図 1 と同様に上段では企業 1 の CDS への投資比率 $\pi_1(t = 0, x_1, x_2 = 1.00)$ を，下段は企業 2 の CDS への投資比率 $\pi_2(t = 0, x_1, x_2 = 1.00)$ を示している．上段 π_1 のグラフよ

り平均回帰速度 β が高いと，低い場合と比べて買い入れる比率が大きくなることがわかる．下段 π_2 のグラフより平均回帰速度 β が低い場合，デフォルト強度 x_1 に強く依存することがわかる．デフォルト強度 x_1 が低いとより売りのポジションを取り，高いとより買いのポジションを取る．これは平均回帰速度 β が高いとデフォルト強度 x_1 が平均 (1.00) に早く収束してしまうため，現在のデフォルト強度の影響が小さくなるためである．反対に平均回帰速度 β が小さいと平均回帰が遅れることで長期間大きなデフォルト強度に晒されてしまうためである．

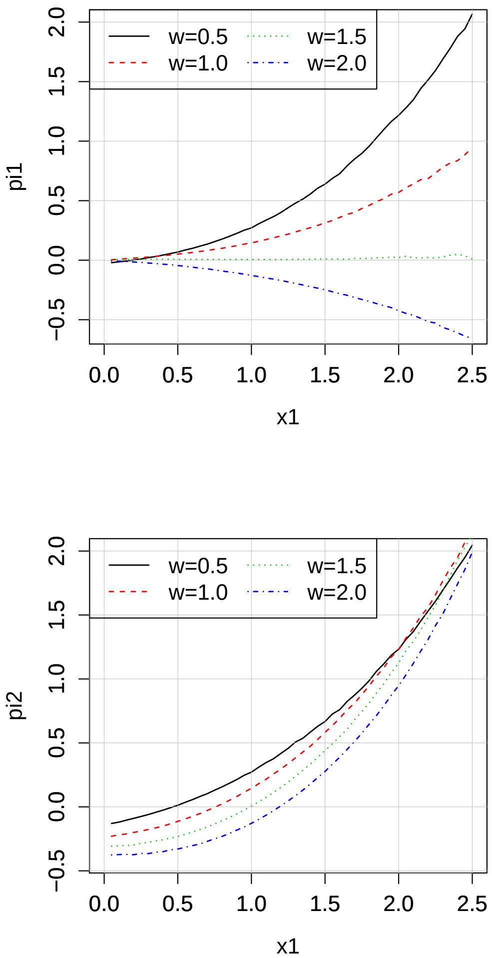

図 3 . ジャンプ幅 w による最適投資比率 π_1, π_2 の感度分析

図 3 は初期時刻 $t = 0$，デフォルト強度の初期値 x_1 におけるジャンプ幅 w による影響を感度分析したグラフである．先と同様に上段では企業 1 の CDS への投資比率 $\pi_1(t = 0, x_1, x_2 = 1.00)$ を，下段は企業 2 の CDS への投資比率 $\pi_2(t = 0, x_1, x_2 = 1.00)$ を示している．上段 π_1 のグラフよりデフォルト強度 x_1 が低い場合あまり差はないが，一方デフォルト強度の初期値 x_1 が高い場合ジャンプ幅が大きくなるにつれポジションが買いから売りに転じる．また下段 π_2 のグラフからデフォルト強度 x_1 が小さい場合売りのポジションを取り，一方デフォルト強度の初期値 x_1 が高い場合買いポジションを取る．ジャンプ幅が大きい場合デフォルトが発生した時のデフォルト連鎖が大きいため，CDS の価値が大きく増加する．デフォルト強度の初期値 x_1 が高い場合 π_2 で大きく買い入れる一方，π_1 で売りポジションを取ることで π_2 のヘッジをしているわかる．これは企業 1 の CDS の価値が高く，相対的に価値が低い企業 2 の CDS へ投資した方が最適と判断していることがわかる．

以上のグラフより，デフォルト連鎖のため，デフォルト強度の初期値 x_1 の影響は企業 1，企業 2 の最適投資比率 π_1, π_2 の両方に現れることがわかる．平均回帰速度が高いとデフォルト強度の初期値 x_1 の影響を受けづらくなり，投資比率も小さい傾向がある．またジャンプ幅においてはデフォルト連鎖の影響の大きさを表し，デフォルト強度の初期値 x_1 により企業 1 への投資ポジションが大きく変わる．またジャンプ幅が大きいほど企業 1 と企業 2 で逆のポジションを取る．このように，投資家はポートフォリオ全体の影響を分析し，投資ポジションを判断する必要がある．

6. 終わりに

本研究ではデフォルトイベント発生時に参照企業のデフォルト強度が瞬間的に増加し，その後平均回帰水準に向かって指数的に減衰するデフォルトモデルを考えた．そのデフォルト連鎖リスクを含んだデフォルト強度を用いて，CDS ポートフォリオにおける確率制御問題の HJB 方程式を導出した．またその HJB 方程式を満たす最適投資戦略と価値関数の解析解を示した．その後に最適投資戦略の数値例でデフォルト連鎖が最適な投資比率に与える影響を分析した．平均回帰速度やジャンプ幅が投資ポジションに大きな影響が与えることが確認できる．このモデルによって投資家の CDS ポートフォリオへの投資ポジションとその規模を示すことができる．

参考文献

[1] R. C. Merton (1969), Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, The Review of Economics and Statistics, 51, 3, 247-257

[2] L. Bo, A. Capponi (2016), Optimal investment in credit derivatives portfolio under contagion risk. Mathematical Finance, 26, 785-834

[3] S. Azizpour, K. Giesecke, G. Schwenkler (2018), Exploring the sources of default clustering. Journal of Financial Economics, 129, 154-183

[4] 辻村 元男, 前田 章 (2016)，確率制御の基礎と応用, ファイナンスライブラリー 14, 朝倉書店

[5] L. Bo, A. Capponi, P. C. Chen (2018), Credit portfolio selection with decaying contagion, Mathematical Finance, 29, 1-37