

### 小標本寿命データのモーメントベクトルを用いた早期故障の検知について

齋藤, 仁貴 / SAITO, Masaki

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

60

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2019-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00022091>

# 小標本寿命データのモーメントベクトルを用いた 早期故障の検知について

ON A DETECTION METHOD OF EARLY FAILURE OCCURRENCE USING SMALL SAMPLE MOMENTS

齋藤 仁貴

Masaki SAITO

指導教員 木村 光宏

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

This thesis proposes a new statistical test method to detect early failure occurrences if the size of a failure time data set is small. The key of our method is to employ a vector test statistics consists of  $j$ -th order sample moments ( $j = 1, 2, \dots, J$ ). Since the existing test methods require a sufficient number of samples, one needs a large amount of cost and time if the highly-reliable items are tested. Therefore in this study, we use the test statistic of  $j$ -th order sample moments of the data set, make the final statistical judgment based on each test result. We investigate whether our method improves the judgment accuracy with small sample size data. The performance of the proposed method is shown by simulation studies.

**Key Words** : statistical test, moment, small sample, sampling cost

## 1. はじめに

### (1) 研究背景

機械等が使用期間中、故障や破損なく、安全にその使命を果たすことは重要であり、想定していた期間動くかを推定する手法はいくつか存在する。しかし、既存の方法では十分な数の標本が必要とされる場合が多いにもかかわらず、特に寿命が長いことが期待される場合では、現実的に多量の故障データを採取することは難しい。この問題に対する1つのアプローチとしては、従来から加速試験 (accelerated test) が知られている。一方、故障データの標本から得られる値が設計上想定していた確率分布に従うかを検定する手法として、適合度検定があり、これまでの適合度検定では、1つのデータセットに対して1つの検定統計量を用いて検定が行われていた。

### (2) 研究目的

本研究では、1つのデータセットに対して検定統計量がサイズ  $J$  のベクトル量、つまり複数の検定統計量を標本  $j$  次モーメントを使った新たな手法を考えることにより、少ない標本数で、想定よりも早期に故障が生じているかの判定を行うことを目的とする。類似の研究 [1] としては、複数のモーメントを1つの関数で変換し、漸近的に標準正規分布に従う検定統計量を用いるものがあるが、本研究の狙いとは異なる。また、前節で述べた加速試験は寿命試験の対象アイテムを、いわゆる過酷な条件下に置いて劣化を早め、得られた寿命データ (アイテムが故障するまでの時間データ) に基づいて寿命分布などを推定し、元の条件下の値に換算するという方法であるが、そこで用いられている経験則に当てはまらない場合に適用することは問題が残る。本研究は、このような加速試験に対する別アプローチとしても位置付けられる。

## 2. モデル

標本が想定していた確率分布  $G$  に従うかを判定するため、帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  を以下のように設定し、次の形式の判定方法を考える。

$H_0$  : データセット  $g_n = \{t_i\}_{i=1}^n$  が確率分布  $G$  に従う。

$H_1$  : データセット  $g_n = \{t_i\}_{i=1}^n$  が確率分布  $G$  に従わない。

ここで、 $n$  は標本数、 $t_i$  は故障時刻データ、 $G$  は指数分布とし、その累積分布関数を  $F(t)$  とする。

### (1) 検定統計量

逆関数法の性質より、 $g_n$  の要素  $t_i$  を  $G$  の分布関数  $F(t)$  に代入することで、それは一様分布からの1つの標本  $u_i$  となる。これより標本  $j$  次モーメント  $m_j$  が、

$$m_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^j, \quad (1)$$

$$\{m_j\}_{j=1}^J \quad (j = 1, 2, \dots, J), \quad (2)$$

と求めることができ、式 (2) を検定統計量として扱う。この検定統計量  $m_j$  は、 $j = 1$  のとき、連続型一様分布の平均の分布に従い、 $j = 2$  のとき、連続型一様分布の2乗和の平均の分布に従い、それぞれ分布関数は知られているが [2]、 $j \geq 3$  のとき、従う分布関数は知られていない。もちろん、 $n$  が大きいときは中心極限定理の効果が表れ、正規分布となるが、本研究では  $n$  が小さい場合を想定する。

### (2) 判定方法

$j \geq 3$  における  $m_j$  の分布関数を求めることは困難であるため、本研究ではシミュレーションによって判定を行う。有意水準を5%とし、期待する期間まで稼働していたかを判定するため、片側検定を行う。ある寿命分布  $G'$  から得られた

標本データセットを  $g'_n = \{t'_i\}_{i=1}^n$  とする.  $t'_i$  を設計時に想定していた寿命分布  $G$  の分布関数に代入すると, 一様分布からの1つの標本  $u'_i$  が得られる. 上記と同じように  $u'_i$  から,

$$m'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u'^j_i, \quad (3)$$

$$\{m'_j\}_{j=1}^J \quad (j = 1, 2, \dots, J), \quad (4)$$

を求め,  $m'_j$  が棄却域に入るとき, 帰無仮説  $H_0$  を棄却する. これを  $j$  毎に行い, それぞれモーメント毎の検定の組み合わせによって最終的な判定を行う [3].  $J = 10, n = 15, \lambda' = 1.5$  の検定結果の一部を表 1 に示す. 表中の○は,  $m'_j$  が棄却域に入り, 帰無仮説  $H_0$  を棄却し, 対立仮説  $H_1$  を採択することを意味し, ×は  $m'_j$  が棄却域に入らず, 帰無仮説  $H_0$  を採択することを意味する. この様に○の数をデータ毎に求め, 判定に用いる. 最終的な判定方法として, 第 1~第  $J$  次モーメントによる検定全てが棄却された場合の「全て棄却」, 1つでも棄却された「1つ以上棄却」,  $J/2$  以上棄却された「半数以上棄却」の 3 パターンを比較する.

表 1:  $j$  毎の検定結果の例.

$j$	No.						
	1	2	3	4	5	6	...
1	×	○	×	×	○	×	
2	×	○	×	○	×	×	
3	×	○	×	○	×	×	
4	×	○	×	○	×	×	
5	×	○	○	○	×	×	...
6	×	○	○	○	×	×	
7	×	○	○	○	×	×	
8	×	○	○	○	×	×	
9	×	○	○	○	×	×	
10	×	○	○	○	×	×	

### 3. モデル解析

本研究では, 擬似乱数を用いて, 標本を生成し, それを用いてシミュレーションを行い, 提案モデルの有用性について検証する. 1回の検定を1試行とし, 試行回数は10000回とした. また, 試行回数内, 棄却された回数の割合をここでは棄却率(%)と呼び, これを用いて, 比較を行うとする.

$$\text{棄却率} = \frac{\text{棄却された回数}}{\text{試行回数}} \times 100 \quad (5)$$

#### (1) 標本数の大きさによる比較

##### a) 検出力

設計上想定する寿命分布を指数分布 ( $\lambda = 1.0$ ) とし, 最大次数  $J$  を,  $J=10$  で固定する. 標本データは寿命分布を指数分布 ( $\lambda' = 1.5$ ) とした標本を使用する. 標本数による精度の変化を, アンダーソン-ダーリング検定, クラメル・フォンミーゼス検定 [4], K-S(コルモゴロフ-スミノフ) 検定, カイ二乗検定, ワトソン  $U^2$  検定 [5] の 5 つの検定との比較を図

1 に示す. 図 1 を見ると, 全ての検定において, 標本数  $n$  の増加に伴い, 棄却率も大きくなる. 「全て棄却」を見ると, 既存の検定であるアンダーソン-ダーリング検定, クラメル・フォンミーゼス検定とほぼ同等の検出力を持つように見える. 「1つ以上棄却」では, 標本数によらず, 他の検定と比べて棄却率が大きい. これは, 1つのデータセットに対して, 検定の回数が, 標本第 1 次モーメントによるものから第 10 次モーメントまでの 10 回あり, その内 1 回でも棄却すれば良いので, 棄却する機会が多くなり, 棄却率が大きくなると考えられる. 「半数以上棄却」においては, 「全て棄却」, 「1つ以上棄却」の中間の値より若干大きい値となり, 標本数によらず, 既存の検定より検出力は高くなる.

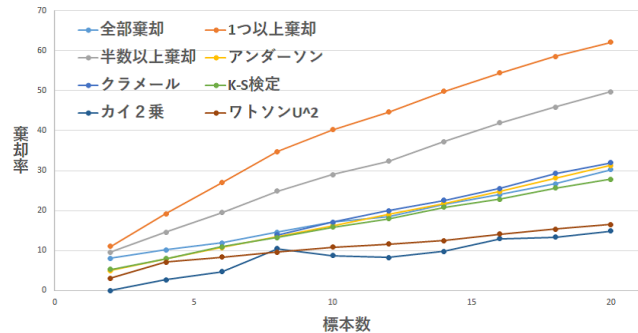


図 1: 標本数毎の棄却率 ( $\lambda' = 1.5, J = 10$ ).

#### b) 誤検知率

次に, 使用する標本データの寿命分布を, 設計上の分布と同じ  $\lambda' = 1.0$  の指数分布とし, 標本数毎に求めたものを表 2 に示す.

表 2: 標本数毎の誤検知率 ( $\lambda' = 1.0, J = 10$ ).

$n$	全て棄却	1つ以上棄却	半数以上棄却
2	4.12	5.81	4.85
4	3.51	6.94	5.23
6	2.72	7.76	5.10
8	2.43	8.13	5.04
10	1.87	8.70	5.13
20	1.69	8.90	5.14
40	1.62	9.10	5.19
60	1.56	9.32	5.46
80	1.67	9.07	5.19
100	1.61	8.92	5.02

※ 表の値は百分率.

有意水準を 5% としているので, 棄却率は 5% が期待される. 既存の検定において, カイ二乗検定については小標本の場合 5% に位置していなかったが, その他の検定では, 標本数によらず概ね 5% に位置する. 表 2 を見ると, 「半数以上棄却」では, 標本数によらず, 概ね 5% に位置している. 一方, 「1つ以上棄却」は, 標本数が大きくなるにつれて, 棄却率は上昇しているように見える. 帰無仮説  $H_0$  が正しいのに, 帰無仮説を棄却する確率が上がる. つまり, 標本数が大きくなる

につれて、誤検知率が高くなるのがわかる。対して、「全て棄却」を見ると、標本数の増加に伴い、棄却率は小さくなる。設計上想定していた分布と、同一な分布に従って得られた標本を用いているので、有意水準の5%になることが必要だが、このような結果となった。これは、モーメント毎の検定統計量が、同じ標本から求められており、独立ではないため、それぞれの  $m_j$  では、棄却率が5%になっていても、最終的な検定の数や組み合わせによって、棄却率が変動したものと考えられる。また、標本数が増加するほど、「1つ以上棄却」は棄却率が大きくなり、「全て棄却」では、棄却率は小さくなると考えたが、 $n = 40$  周辺で棄却率の上昇、及び下降は止まり、値がその周辺で停滞しているように見える。

(2) 最大モーメント数の大きさによる比較

a) 検出力

最大モーメント数の大きさによる棄却率の変化を見るため、前述では、 $J = 10$  で固定していたが、本節では最大モーメント数である  $J$  を変化させ、標本数  $n = 20$  で固定する。前節と同じパラメータ設定とし、最大モーメント数による精度の変化を、図2に示す。「全て棄却」を見ると、最大モーメント数  $J$  が大きくなるにつれて棄却率が小さくなるのがわかる。 $J$  が小さい場合、既存の検定で最も検出力の高かったクラメル・フォンミーゼス検定より、棄却率は高かったが、 $J \geq 8$  においては下回る結果となった。「1つ以上棄却」では、 $J$  の増加に伴い、棄却率も増加する。これは、 $J$  が大きくなることで、検定を行う回数が多くなるため、棄却域に落ちる確率が上がるのだと考えられる。「半数以上棄却」においては、「全て棄却」と「1つ以上棄却」の間に位置しているが、 $J$  が小さいときでは、「1つ以上棄却」に近い傾向があり、 $J$  が大きくなるにつれて、「全て棄却」に近づき、棄却率は僅かだが減少し続けている。 $J > 40$  においては、計算に使用しているPCのメモリ不足により計算が不可であったため、棄却率が収束するかについては不明である。

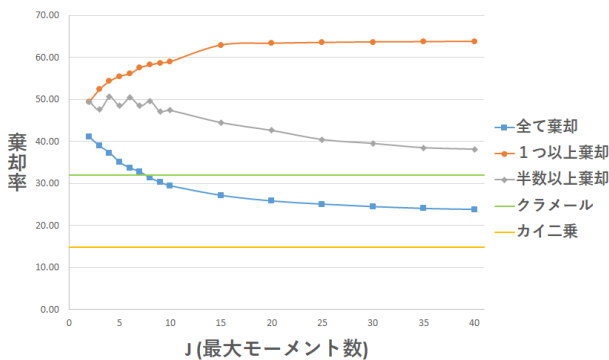


図2: 標本数毎の棄却率 ( $\lambda' = 1.5, J = 10$ ).

b) 誤検知率

標本データの従う寿命分布を、設計上と同じ  $\lambda' = 1.0$  の指数分布とし、 $J$  毎に棄却率を求めたものを表3に示す。「1つ以上棄却」は、 $J$  の増加に伴い、棄却率は上昇し、「全て棄却」では、棄却率は減少し、両者とも有意水準5%から離れていくことがわかる。また、 $J$  が大きくなるにつれて、棄却率の上り幅、及び下がり幅が小さくなるのが確認でき、ある値に漸近的に近づいてるように思える。「半数以上棄却」を見ると、 $J$  が大きくなるにつれて、5%に近づいているように

見える。

表3: 最大モーメント数毎の棄却率 ( $\lambda' = 1.0, n = 20$ ).

$J$	全て棄却	1つ以上棄却	半数以上棄却
2	3.51	6.62	6.67
4	3.07	8.02	5.98
6	2.39	8.51	6.24
8	1.93	8.65	6.27
10	1.66	8.90	5.92
15	1.47	9.46	4.97
20	1.38	9.75	5.09
25	1.35	9.90	4.93
30	1.32	9.96	4.97
35	1.29	9.99	5.01
40	1.28	10.04	4.99

(3) 標本数、最大モーメント数毎の棄却率

設計上想定する分布と同じ指数分布 ( $\lambda' = 1.0$ ) に従う標本データを用いたものを図3に示す。図中の平面は棄却率5%の位置を意味しており、近いほど有意水準5%の検定として機能する。標本数が多くなるにつれて、「1つ以上棄却」と「全て棄却」の差が大きくなり、有意水準5%から遠ざかっているように見える。また、「半数以上棄却」においては、標本数、最大モーメント数によらず、棄却率がほぼ5%に近い値に位置することわかる。よって、判定方法に「半数以上棄却」を採用することが、3パターンの中では、最も検定として扱うのに適していると考えられる。

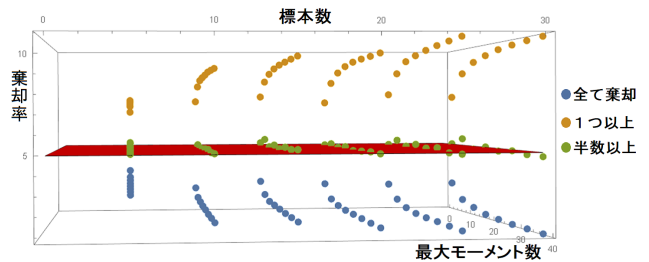


図3: 標本数、最大モーメント数毎の棄却率 ( $\lambda' = 1.0$ ).

4. 棄却数の割合

$J = 30$  とした標本  $j$  次モーメントで検定を行うとき、 $J$  個中いくつ棄却することが多いか、 $\lambda' = 1.5$  の指数分布に従う標本を、それぞれの棄却数の割合を標本数毎に求めたものを図4に示す。図4を見ると、標本数によらず、棄却数=25付近から、棄却数が多くなる確率が著しく高くなる。標本数が少ない場合、棄却数が小さいときの傾きが大きくなり、棄却数の割合の偏りが大きい。一方、標本数が多くなると、この傾きが小さくなり、棄却数の割合のパラつきが小さくなるように見え、さらに標本数が多くなると、棄却数が1から29までの割合が小さくなるのがわかる。これは、標本数が多

くなるにつれて、精度が向上し、「全て棄却」である棄却数30に集中するためだと考えられる。

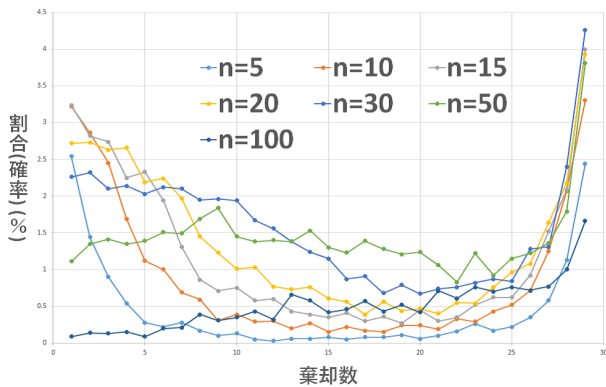


図4: 標本数毎の棄却数の割合 ( $\lambda' = 1.5$ ).

### 5. 単位コストあたりの棄却率に基づく最適標本数

サンプルを十分に多く採れば、判定の精度を高めることが可能だが、本研究での前提として、サンプルの採取にコストが掛かるため、サンプル数は小さく抑えることが望ましいと考えている。そこで、単位コストあたりの棄却率を求めることで、費用対効果が最大となる標本数を求める。最大モーメント数は15程度で有意水準とほぼ近い値となるので、 $J = 15$ とし、また標本数が少ないとき、「半数以上棄却」は線形性を持つと仮定し、 $\lambda' = 1.5$ の場合の回帰直線を求める。棄却率をy軸とし、回帰式を求めると、

$$y = 1.8378n + 7.3405, \quad (6)$$

が得られる。ここで、コスト関数を、

$$C(b, n) = \exp[n/b], \quad (7)$$

と仮定し、式(6)を式(7)で割ることで、単位コスト当たりの棄却率を求め、パラメータ  $b$  毎に比較したものを図5に示す。図5を見ると、極大値である単位コストあたりの棄却率が最も高い標本数は、 $b$ の増加に伴い大きくなるのがわかる。

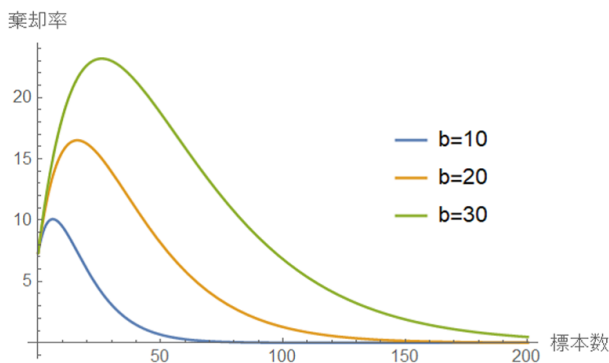


図5:  $b$  毎の単位コストあたりの棄却率。

もし実際の寿命試験環境において、式(7)の  $b$  の値を見積もることができれば、図5に倣って最適標本数を求めること

ができる。また、式(6)に振る舞いの似た関数であれば、上記の議論は可能であろう。

### 6. 考察

提案手法の「1つ以上棄却」では、標本数、及び最大モーメント数が大きくなるにつれて、検出力はある程度まで上昇し、既存の検定よりも著しく高かったが、第一種の過誤の値も同時に上がったため、精度が向上したとは言えない。「全て棄却」では、標本数が大きくなるにつれて、検出力は上昇するが、既存の検定と同程度の検出力を有していた。また、第一種の過誤の値は下がっていき、有意水準5%から離れていったため、仮説検定として扱うのは難しいと考えられる。加えて、最大モーメント数の増加に伴い、検出力、誤検知率共に下降する傾向があった。これは、検定の個数が増えるため、それに伴って、統計検定量の数も増えるので、全ての棄却域に入る確率が下がるのだと考えられる。一方、「半数以上棄却」では、標本数によらず、既存の検定よりも高い検出力を持ち、誤検知率である第一種の過誤の値も、有意水準に近い結果となった。また、最大モーメント数の増加に伴い、僅かに検出力は小さくなる結果となった。以上のことから、判定方法の3つのパターンの内、「半数以上棄却」を採用することが適すと考えられる。

次に、「半数以上棄却」における、単位コストあたりの棄却率を求めた。極大値を求めることで、最も費用対効果が大きくなる標本数が得られるが、判定を誤ることで生まれるコスト等があるため、その得られた標本数で判定を行うことが、必ずしも最適とは限らないと考えられる。

### 7. おわりに

本研究では、標本数が少ない場合でも早期故障の検知が行えるよう、標本  $j$  次モーメントを用いた新たな手法を提案した。最終的な判定方法として、3つのパターンを比較し、それぞれの有用性について検証を行った。今後の課題として、寿命分布を指数分布を用いて判定を行っていたものを、他の分布にも適応できるよう拡張性を持たせ、モデルを一般化することである。また、標本を採る際に掛かるコストを考えたが、判定を見誤ったことによって起きる故障に掛かるコストを踏まえた、モデルを考えることで、より有用性が高まることが期待できる。

### 参考文献

- [1] G. Li and A. Papadopoulos, "A note on goodness of fit test using moments", *Statistica*, anno LXII, No. 1, 2002.
- [2] I. Weissman, "Sum of squares of uniform random variables", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 129, pp. 147-154, 2017.
- [3] 齋藤仁貴 他, 「標本  $j$  次モーメントを用いた適合度検定について」, *日本 OR 学会中国・四国地区 SSOR アブストラクト集*, p. 16, 2017.
- [4] T. W. Anderson, "On the distribution of the two-sample Cramer-Von Mises criterion", *The Annals of Mathematical Statistics*, 33, 3, 1148-1159, 1962.
- [5] G. S. Watson, "Goodness-of-fit tests on a circle. II", *Biometrika*, 49, 1 and 2, pp. 57, 1962.