

リンダール-比率均衡と社会的厚生

廣川, みどり / HIROKAWA, Midori

(出版者 / Publisher)

法政大学経済学部学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

The Hosei University Economic Review / 経済志林

(巻 / Volume)

86

(号 / Number)

3・4

(開始ページ / Start Page)

411

(終了ページ / End Page)

423

(発行年 / Year)

2019-03-20

リンダール-比率均衡と社会的厚生

廣 川 みどり

要旨

公共財を含む経済における均衡概念の代表的なものとして、リンダール-比率均衡が挙げられる。リンダール-比率均衡は、パレート効率的な配分をもたらすことが知られている。しかしながら、パレート効率的な配分は一般には複数存在するため、パレート効率的というだけでは均衡の十分な特徴付けとは言いがたい。パレート効率的な配分は加重ベンサム型の社会的厚生関数を最大化する配分となるため、本稿では、いくつかの例に関してリンダール-比率均衡に対応する加重ウェイトを求めることで、均衡の特徴を考察する。加重ウェイトは、均衡での限界効用を反映し、各人に等しいウェイトをもたらす場合もあれば、公共財への費用負担割合と一致するウェイトをもたらす場合もある。また、初期所得の再分配が社会的厚生にもたらす効果についても考察する。

1 イントロダクション

所得や選好の異なる個人からなる社会で、公共財をどれだけ生産すべきか、その費用をどのように分担すべきか、それらについてのひとつの解答がリンダール均衡、および、それを改良した比率均衡である。

リンダールの基本的なアイデアは「完全競争の価格機構による私的財

のパレート効率的配分を公共財を含む経済においても能う限り模倣しようとしたもの（鈴木 (1982), p.197）」と考えられる。私的財ではすべての個人に同一の価格が与えられるが、公共財については、個人 i ごとに異なる価格 p_i が与えられる。個人 i は、私的財については共通の価格を前提に、公共財については個人ごとの価格を前提とし、私的財／公共財への需要量を決定する。また、生産者も、こうした価格を前提に、利潤を最大化する。その結果、私的財については需要量の和がその生産量に一致し、公共財については各個人の需要量が相互に一致し、さらにその需要量が生産量と一致する状態がリンダール均衡である。リンダール均衡は、私的財経済での競争均衡の対応物と考えられ、パレート効率的な配分をもたらすことが知られている。

さて、公共財の生産についてリンダール均衡は必ずと言ってよいほど言及される概念であるが、リンダールの原論文（Lindahl (1919)）では、均衡概念についての数学的な定義はなく、文章と図でアイディアが記されている。そのため、リンダール以降いくつかの定式化が与えられている。van den Nouweland (2013) はそうした定式化を整理し、リンダールのオリジナルな考え方を適切に表現したものが比率均衡であると指摘している。一般的に取り上げられているリンダールのメカニズムでは公共財の生産量の一定割合 $p_i x$ を個人 i が負担するものと想定する。それに対し、公共財の費用 $C(y)$ の一定割合 $r_i C(y)$ を各個人の費用負担として考えたのが比率均衡である。これにより、超過利潤というやっかいな問題は解消される。公共財の費用関数が線形であるときには、リンダール均衡と比率均衡は一致するため、比率均衡はリンダール均衡を改良したものと考えられる。このため、以降、比率均衡をリンダール-比率均衡と呼び、話を進めていくものとする。

リンダール-比率均衡はパレート効率的な公共財生産量をもたらす。とはいえ、パレート効率的な配分は一般に複数（しばしば無数に）存在するため、それだけでは特徴付けは十分とはいえない。そこで、本稿では、い

いくつかの例を用い、リンダール-比率均衡に対応する社会的厚生関数の重みづけを考えることで、リンダール-比率均衡の特徴付けについて考察する。また、初期所得の再分配がもたらす効果についても考察する。

以下、第2節では、リンダール-比率均衡を再確認し、第3節では、社会的厚生関数を考える。そして、第4節で、いくつかの例によりリンダール-比率均衡の特徴付けを考察し、そののち結語を述べる。

2 リンダール-比率均衡

1 私的財 1 公共財の経済で、複数の個人が集まり、公共財生産を行う状況を考えよう。個人の集合を N 、私的財の集合を $X \subset \mathbf{R}_+$ 、公共財の集合を $Y \subset \mathbf{R}_+$ とし、個人 $i \in N$ の効用関数を $U_i: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_+$ で表す。また、私的財の消費量 $x_i \in X$ 、公共財の消費量 $y \in Y$ に対する個人 i の効用を $U_i(x_i, y)$ と表す。 U_i は、 x_i, y 双方の変数について二階偏微分可能の凹関数で、以下を満たすとする： $\partial U_i / \partial x_i > 0$ 、 $\partial^2 U_i / \partial x_i^2 \leq 0$ 、 $\partial U_i / \partial y > 0$ 、 $\partial^2 U_i / \partial y^2 < 0$ 。

個人 i は初期に I_i (ただし $I_i > 0$) だけの私的財を保有し、そこから公共財の費用を負担するものとする。公共財の費用関数 $C: Y \rightarrow \mathbf{R}_+$ は二階微分可能で、以下を満たすとする： $C(0) = 0$ 、 $C'(y) > 0$ 、 $C''(y) \geq 0$ 。

各個人の私的財の保有状態と公共財の生産量の組 $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y) \in X^n \times Y$ を配分とよぶ。配分 (x, y) が実現可能であるとは、

$$C(y) \leq \sum_{i \in N} (I_i - x_i)$$

が成り立つことをいう。

効用関数については、さらに以下の2つの仮定を置く：

仮定 1 任意の i および $x_i > 0, y > 0$ をみたす任意の (x_i, y) に対し

$$U_i(x_i, y) > U_i(I_i, 0),$$

仮定 2 任意の i および $x_i > 0, y > 0$ をみたす任意の (x_i, y) に対し

$$U_i(x_i, y) > U_i(0, C^{-1}(\sum_{i \in N} I_i)).$$

リンダール-比率均衡は、公共財経済での競争均衡概念と考えられる。いま、 r_i を個人 i の費用負担割合（ただし、 $r_i > 0$, $\sum_{i \in N} r_i = 1$ ）とし、費用負担ベクトル $r = (r_1, \dots, r_n)$ を考える。このもとで、リンダール-比率均衡は以下のように定義される。

定義：リンダール-比率(LR)均衡 すべての個人 $i \in N$ について、以下をみたす実現可能な配分と均衡比率ベクトルの組 (x^*, y^*, r^*) をリンダール-比率(LR)均衡という：

$$y^* = \operatorname{argmax}_y U_i(I_i - r_i^* C(y), y) \quad \forall i \in N。$$

私的財における競争均衡メカニズムのもとでは、各個人は価格を所与として効用を最大化する需要量を決定する。また、企業も同様に供給量を決定し、そうした需要量と供給量が一致した状態が競争均衡であった。これに対し、リンダール-比率均衡メカニズムでは、各個人は自分に与えられた費用負担比率のもとで効用を最大化する公共財需要量を定める。常に生産費用が費用負担の和と等しくなるため、生産サイドの決定の問題は発生しない。こうした公共財需要量が全員一致する状態がリンダール-比率(LR)均衡である。Kaneko (1977) は比率均衡（本稿でのLR均衡）を定義し、微分可能性を前提としない一般的な環境のもとで比率均衡の存在を示した。本稿では、後に述べる特徴づけのために、より狭い環境に限定し微分可能性を仮定する。また、簡単化のため内点解としてのLR均衡を仮定し話を進める。

なお、 $r^* = (r_1^*, \dots, r_n^*)$ が与えられたとき、 (x^*, y^*) がLR均衡配分であることの必要十分条件は、以下で与えられる：

$$\frac{\partial U_i(x_i^*, y^*)}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial U_i(x_i^*, y^*)}{\partial x_i} = r_i^* C'(y^*) \quad \forall i \in N。 \quad (1)$$

これは、どの個人にとっても、公共財から得る限界便益と限界費用負担とが等しくなることを意味している。

3 社会的厚生関数

個人 i の効用関数 U_i を α_i (ただし $\sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in N$) で加重したベンサム型社会的厚生関数の最大化問題 (W) を考える :

$$(W) \quad \max_{x,y} \sum_{i \in N} \alpha_i U_i(x_i, y) \text{ s.t., } \sum_{i \in N} (I_i - x_i) \geq C(y)。$$

ここで、各個人の効用関数は凹であるため、その一次結合である $\sum_{i \in N} \alpha_i U_i(x_i, y)$ も凹 (したがって擬凹) となる。また、効用関数の形状および仮定 1, 2 より、(W) の最大値が $\prod_{i=1}^n [0, I_i] \times [0, C^{-1}(\sum_{i=1}^n I_i)]$ の内点解として存在する。

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が与えられたとき、 (x^*, y^*) が (W) を最大化する配分であることの必要十分条件は、以下で与えられる :

$$\left(\sum_{i \in N} \alpha_i \frac{\partial U_i(x_i^*, y^*)}{\partial y} \right) \Bigg/ \frac{\partial U_i(x_i^*, y^*)}{\partial x_i} = \alpha_i C'(y^*) \quad \forall i \in N。 \quad (2)$$

(2) 式の左辺は、他の個人の費用負担を所与としたときに「公共財生産により社会的厚生が 1 単位増加する」ために、自らの私的財をどれだけ供出してもよいか、の限界代替率を示している。そうした「社会的厚生の限界的増加の主観的価値」と「その個人への加重 \times 限界費用」とが等しくなるというのが、(2) の条件である。

(2) より、第 i 行第 j 列の成分を $(\partial U_j / \partial y) / (\partial U_i / \partial x_i)$ とする $n \times n$ 行列を A 、 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha$ 、 α の転置ベクトルを α' 、 n 次の単位行列を E と置くと (2) は次のように書き直すことができる :

$$(A - C'(y)E) \alpha' = 0。 \quad (3)$$

このもとで、以下の定理が成立する。

定理 第 i 行第 j 列の成分を $(\partial U_j / \partial y) / (\partial U_i / \partial x_i)$ とする $n \times n$ 行列を A 、 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha$ 、 n 次の単位行列を E と置くと、以下が成り立つ :

(a) 社会的厚生関数の加重ベクトル α が自明でない解を持つ必要十分条件は

$$|A - C'(y)E| = 0.$$

(b) (a) の条件は、以下のサムエルソン条件 (S) と同値になる。

$$(S) \quad \sum_{i \in N} \frac{\partial U_i}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = C'(y).$$

証明 (2) 式を行列で表現すると $AA' = C'(y)\alpha'$ となるため (a) はただちに導かれる。(b) については補遺に記す。

4 リンダール-比率 (LR) 均衡と社会的厚生関数の加重

前節の (3) では、社会的厚生関数の加重ベクトル α を与える連立方程式を示した。ここで、LR均衡を所与としたときの社会的厚生関数の加重ベクトルがどのようなものになるのかをいくつかの例から考察する。

例 1 $N = \{1, 2, 3\}$, $U_i = k_i\sqrt{y} + x_i$, $x_i = I_i - r_i C(y)$, $C(y) = y$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ とする。各個人の最大化条件は $(k_i/2)(1/\sqrt{y}) = r_i$ であり、 $y = (k_i/2r_i)^2$ となるが、これを与える y が各人共通であること、および $r_1 + r_2 + r_3 = 1$ より、均衡比率は $(r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (1/6, 1/3, 1/2)$ となり、そのもとでの公共財生産量は $y^* = 9$ となる。

また、均衡において $\partial U_1/\partial y = 1/6$, $\partial U_2/\partial y = 1/3$, $\partial U_3/\partial y = 1/2$ であり、すべての i について $\partial U_i/\partial x_i = 1$, また $C'(y) = 1$ であるため、この比率均衡に対応する社会的厚生関数の加重 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ は、

$$\begin{pmatrix} 1/6 - 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 - 1 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 - 1 \end{pmatrix} \alpha = 0$$

の解の転置ベクトル (ただし $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$) で与えられるので $\alpha^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ を得る。

例1では、均衡比率が私的財の初期保有量と独立に決まることに注意しよう。このケースでは、効用関数は線形分離可能な形になっていて、私的財の限界効用は常に一定となっている。すなわち、所得効果がゼロで、各個人は十分に大きな所得を保有している状態と考えられる。

費用負担の限界不効用が公共財の量に依存しないため、個人の決定は公共財からの限界便益にのみ依存することになる。より高い限界便益の個人はより多くの公共財量を需要する。全員の公共財需要量を一致させるためには、より高い限界便益の個人により多くの費用負担比率が課されることになる。これにより、各個人が十分に大きな所得を保有しているときには、応益的な費用負担があてられることになる。

さらにこの例では、LR 均衡が単純なベンサム型社会的厚生関数の最大化の帰結をもたらすことに注意しよう。実際、社会的厚生関数の最大化条件 (2) において、 $\partial U_i/\partial x_i$ が一定であることから、 α_i が全員に共通であるため、 $\alpha^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ が得られる。これは、例1についてだけでなく、一般に、効用関数が線形分離可能 ($U_i = u_i(y) + x_i$ のケース)、すなわち、所得効果がゼロの場合であれば、公共財からの効用の形状に関わらず成立する。この帰結は、Kaneko (2017) の応用例でも指摘されている。

例 2 $N = \{1, 2, 3\}$, $U_i = \sqrt{y} + \sqrt{x_i}$, $x_i = I_i - r_i C(y)$, $C(y) = y$, $I_1 = 27$, $I_2 = 16$, $I_3 = 7$ とする。 $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1/3$, $r_3 = 1/6$ のとき、比率均衡が存在し、そのもとでの公共財生産量は $y^* = 36$ となる。実際、各個人の最大化条件は $(1/\sqrt{y}) = r_i/\sqrt{I_i - r_i y}$ であり、 $y = I_i/(r_i^2 + r_i)$ となるが、所与の I_i, r_i のもとでは、この y が各人共通となり、そのもとでの均衡配分は $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y^*) = (9, 4, 1, 36)$ となる。

また、均衡において、すべての i について $\partial U_i/\partial y = 1/12$, $\partial U_1/\partial x_1 = 1/6$, $\partial U_2/\partial x_2 = 1/4$, $\partial U_3/\partial x_3 = 1/2$, また $C'(y) = 1$ であるため、このリンダール-比率均衡に対応する社会的厚生関数の加重 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ は、

$$\begin{pmatrix} 1/2-1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3-1 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6-1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

の解の転置ベクトル（ただし $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ）で与えられるので $\boldsymbol{\alpha}^* = (1/2, 1/3, 1/6)$ を得る。

この例では、(3)の行列を用いて加重を求めたが、LR均衡の条件(1)と社会的厚生関数の最大化条件(2)より、LR均衡の均衡比率 $r^* = (r_1^*, \dots, r_n^*)$ に対して、

$$r_i^* = \alpha_i \times \frac{\partial U_i(x_i^*, y^*)}{\partial y} \bigg/ \sum_{i \in N} \left(\alpha_i \times \frac{\partial U_i(x_i^*, y^*)}{\partial y} \right) \quad \forall i \in N \quad (4)$$

が成り立つような $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ を与えれば、LR均衡配分と社会的厚生関数を最大化する配分とは一致する。なお、上の式では、 x_i についての条件は消えるが、式の成立には関係する。例2では、公共財の限界効用が私的財の量に依存せず、全員等しいことから、 $\partial U_i(x_i^*, y^*)/\partial y$ は i に依存しないことに注意しよう。このことと、 $\sum_{i \in N} r_i = 1$ 、 $\sum_{i \in N} \alpha_i = 1$ から、ただちに $\alpha_i = r_i$ が従う。

例2では、公共財からの限界効用がどの個人も同一であるため、個人の負担については応能的な負担が生じ、その負担比率が、加重ウェイトに反映されているものと考えられる。

ここで、例2の帰結を利用し、所得再分配の効果についての数値例をみていくことにする。

例3 $N = \{1, 2\}$, $U_i = \sqrt{y} + \sqrt{x_i}$, $x_i = I_i - r_i C(y)$, $C(y) = y$, $I_1 = 12$, $I_2 = 30$ とする。 $r_1 = 1/3$, $r_2 = 2/3$ のとき、比率均衡が存在し、そのもとでの公共財生産量は $y^* = 27$ となる。実際、各個人の最大化条件は $(1/\sqrt{y}) = r_i/\sqrt{I_i - r_i y}$ であり、 $y = I_i/(r_i^2 + r_i)$ となるが、所与の I_i , r_i のもとでは、この y が各人共通となり、そのもとでの均衡配分は $(x_1^*, x_2^*, y^*) = (3, 12, 27)$ となる。

例2における考察より、加重ベクトルは均衡比率と等しいため $(\alpha_1, \alpha_2) =$

$(1/3, 2/3)$ となる。このもとでの社会的厚生は $(1/3) \times (\sqrt{27} + \sqrt{3}) + (2/3) (\sqrt{27} + \sqrt{12}) = 14/\sqrt{3}$ となる。

いま、ここで事前に所得の再分配がなされ、各人の初期保有が等しく $I_1 = I_2 = 21$ となったとする。対称性により、 $r_1 = r_2 = 1/2$ のとき比率均衡が存在し、均衡配分は $(x_1^*, x_2^*, y^*) = (7, 7, 28)$ となる。また、加重ベクトルは $(1/2, 1/2)$ となり、そのもとでの社会的厚生は $2 \times (1/2) (\sqrt{28} + \sqrt{7}) = 3\sqrt{7}$ となる。

なお、所得の再分配前後での社会的厚生を比較すると、 $14\sqrt{3} \approx 8.08$ 、 $3\sqrt{7} \approx 7.94$ となり、後者のほうが低くなっている。

例3により、事前の所得の再分配が社会的厚生を低める場合があることがわかる。その理由は、以下のように考えられる。例3では、所得再分配後、公共財生産量は微増している。個人1にとっては、公共財生産量が増えたことと費用負担比率が上がったことで、費用負担額は増えるものの、再分配による私的財増加の効果が大きいため、私的財、公共財双方から得られる効用は上昇する。一方、個人2にとっては、公共財の生産量が上がったことによる効用の増加は微少であるのに対し、再分配による私的財減少の効果が大きい。個人2の加重ウェイトは $2/3$ から $1/2$ へと下がるため、個人2の効用の減少が与える効果は弱められるのだが、それ以上に再分配による私的財減少の効果が大きいため、全体としての社会的厚生の値は下がったと考えられる。

もちろん、数値例は効用関数の形状や初期条件に依存し、事前の所得の再分配が社会的厚生を高める場合もありうるだろう。ここでは一例を見ただけで、事前の所得の再分配が社会的厚生にどう働くかは（少なくとも、この加重線形型の社会的厚生関数のもとでは）判断できない。

さて、ここでの社会的厚生関数の加重は、定数として与えられているものではなく、均衡での限界効用の値に依存している。すなわち、定数の係数を持つ線形の社会的厚生関数を最大化したものではない。LR均衡が、事後的にある加重の社会厚生関数を最大化していると思わせること、そし

て、その係数がどのようなものであるのかを、ここでは、いくつかの例を用いて考察した。

なお、こうした社会的厚生関数は、通常の意味での社会的厚生関数と区別するために「根岸の社会的厚生関数」と呼ばれる。(林(2012) p.59)

5 結語

LR 均衡はパレート効率的な配分をもたらすが、それがどのような配分なのかについては、あまり注目されてこなかった。本論では、それを線形の社会的厚生関数の加重ウェイトという点から考察した。

本稿は Kaneko (2017) と Negishi (1960) のふたつの論文にヒントを得たものである。

Kaneko (2017) では、論文の副産物として、所得が十分に大きい場合、すなわち所得効果がゼロである場合、LR 均衡が、個人の(ウェイトの等しい)効用和を最大にするものであると指摘している。

本稿では、そのケースやそれ以外のケースにおいて、LR 均衡が与えられたときに、それに対応する社会的厚生関数の加重ウェイトがどのようになるか、いくつかの例を用いて考察した。

また、Negishi (1960) は、私的財の競争均衡の存在を示すために、社会的厚生関数を考えた。競争均衡均衡に対応する社会的厚生関数の重みづけは、各個人の所得の限界効用の逆数となる。公共財経済でも、本文の(2)式が成立し、事後的には、LR 均衡に対応する社会的厚生関数の重みづけは、各個人の所得の限界効用の逆数となっている。とはいえ、ここでの社会的厚生関数の加重は、定数として与えられているものではなく、均衡での限界効用の値に依存している。すなわち、定数の係数を持つ線形の社会的厚生関数を最大化したものではない。

なお、本稿では LR 均衡の存在を経由し、社会的厚生関数の加重を考察した。Negishi (1960) では、社会的厚生関数の議論から競争均衡の存在を

示している。公共財経済でのパラレルな存在証明は今後の課題としたい。

さて、本稿では、LR 均衡に対応する社会的厚生関数の加重を考察してきたが、公平性についての議論は十分とは言いがたい。(2) 式から、社会的厚生関数が、所得の高い個人に高いウェイトをおく（あるいは所得の低い個人に低いウェイトをおく）ものに見えるが、これは、単純に LR 均衡が所得の高い個人を優遇するということとは異なる。というのは、第 1 に、LR 均衡は、ある程度のマイノリティを保護した多数決ゲームの帰結となっており、公共財からの効用が各自等しいときには、むしろ応能主義的な費用負担（すなわち、所得の低い個人には低い費用負担）を負わせる均衡でもあることが知られている。また繰り返しになるが、第 2 に、ここでの社会的厚生関数の加重は、定数として与えられているものではなく、LR 均衡の限界効用の値に依存し、それには、第 1 で述べた費用負担を差し引いた（たとえば、所得の高い個人からは高い費用負担をおわせた）あとでの限界効用の値が関係している。そのため、加重ウェイトと公平性の問題については、より細やかな議論が必要となり、それも今後の課題としたい。

参考文献

- [1] Kaneko, M. (1977) "The ratio equilibrium and a voting game in a public goods economy," *Journal of Economic Theory*, Vol.16, No. 2, pp. 123-136.
- [2] Kaneko, M. (2017) "Approximate quasi-linearity for large incomes," WINPEC Working Paper Series No.E1702.
- [3] Lindahl, E. (1919) "Just taxation—a positive solution," Translated from German (Die Gerechtigkeit der Besteuerung, Lund 1919, Part 1, Chapter 4, pp.85-98: Positive Lösung," in *Classics in the Theory of Public Finance*, (Eds. Musgrave, R.A. and A.T. Peacock) (1958) Macmillan.
- [4] Negishi, T. (1960) "Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive Economy," *Metroeconomica*, Vol.12, No. 2-3, pp. 92-97.
- [5] van den Nouweland, A. (2013) "Lindahl and equilibrium," mimeo.
- [6] 林貴志 (2012) 『マクロ経済学-動学的一般均衡理論』 ミネルヴァ書房。
- [7] 鈴木興太郎 (1982) 『経済計画理論』 筑摩書房。

補遺：定理 1 (b) の証明

記号の簡単化のために $(\partial U_j / \partial y) / (\partial U_i / \partial x_i) = m_{i,j}$ と置くと

$$|A - C'(y)E| = \begin{vmatrix} m_{1,1} - C'(y) & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} - C'(y) & \cdots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n-1} - C'(y) & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{n,n} - C'(y) \end{vmatrix}$$

と表される。

第 n 行に $(\partial U_n / \partial x_n) / (\partial U_i / \partial x_i)$ をかけて第 i 行 ($i=1, \dots, n-1$) から差し引いても行列式の値は変化しないこと、および、 $m_{n,j} \times (\partial U_n / \partial x_n) / (\partial U_i / \partial x_i) = m_{i,j}$ となることに注意すれば、以下が得られる。

$$|A - C'(y)E| = \begin{vmatrix} -C'(y) & 0 & \cdots & 0 & C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \\ 0 & -C'(y) & \cdots & 0 & C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -C'(y) & C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right) \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{n,n} - C'(y) \end{vmatrix} \quad (1)$$

ここで、行列式 $|A - C'(y)E|$ の第 n 行第 n 列の余因子 B_{nn} と第 n 行第 j ($j \neq n$) 列の余因子 B_{nj} とが以下の形で表されることを示そう。

$$B_{nn} = (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1},$$

$$B_{nj} = (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right). \quad (2)$$

B_{nn} は (1) より直ちに $(-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1}$ となることがわかる。 B_{nj} ($j \neq n$) については、まず B_{n1} を考えると、

$$B_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \\ -C'(y) & \cdots & 0 & C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -C'(y) & C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right) \end{vmatrix}$$

となるが、ここで B_{n1} の第 1 行目を余因子展開すると

$$\begin{aligned} B_{n1} &= (-1)^{2n+1} C'(y) \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \begin{vmatrix} -C'(y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -C'(y) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

となる。同様に、 $|A - C'(y)E|$ の第 n 行第 j 列 ($j=2, \dots, n-1$) の余因子 B_{nj} は

$$B_{nj} = (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} \times \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} / \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right)$$

となり、(2) が成立することが示された。

なお、 $m_{n,j} \times (\partial U_n / \partial x_n) / (\partial U_j / \partial x_j) = m_{j,j}$ であるから、 $j=1, \dots, n-1$ について

$$m_{n,j} B_{nj} = (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} m_{j,j}$$

が成り立つ。このことと、(1)、(2) より、

$$\begin{aligned} |A - C'(y)E| &= (m_{n,n} - C'(y)) B_{nn} + \sum_{j=1, \dots, n-1} m_{n,j} B_{nj} \\ &= (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} (m_{n,n} - C'(y)) + \sum_{j=1, \dots, n-1} (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} m_{j,j} \\ &= (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} \left(\sum_{j=1, \dots, n} m_{j,j} - C'(y) \right) \\ &= (-1)^{3n-1} (C'(y))^{n-1} \left(\sum_{j=1, \dots, n} \left(\frac{\partial U_j}{\partial y} / \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) - C'(y) \right) \end{aligned}$$

が導かれ、 $|A - C'(y)E| = 0$ の成立とサムエルソン条件 (S) とは同値となることが示された。 ■