

# Cole-Coleモデル解析のための周波数依存型 LOD-FDTD法

日下, 恭毅 / KUSAKA, Yasuki

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

59

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

2

(発行年 / Year)

2018-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00021557>

## Cole-Cole モデル解析のための周波数依存型 LOD-FDTD 法

FREQUENCY-DEPENDENT LOD-FDTD METHOD  
FOR THE ANALYSIS OF THE COLE-COLE MODEL

日下 恭毅

Yasuki KUSAKA

指導教員 柴山純

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

The purpose of this article is to develop an LOD-FDTD method for the efficient analysis of the Cole-Cole model, which is free from the CFL condition. The Z-transform technique is utilized to translate the Cole-Cole expression into the Z domain, in which a Taylor series expansion is applied to approximating the fractional order differentiators. To demonstrate the effectiveness of the present method, we analyze the response of THz radiation to a dry skin expressed by the Cole-Cole model. The computation time is reduced to 70% of the explicit method, when the time step is chosen five times as large as that of the stability limit, maintaining an acceptable accuracy.

**Key Words** : Cole-Cole model, locally one-dimensional (LOD) FDTD, FDTD method, Z transform

## 1. はじめに

有限差分時間領域 (FDTD) 法を用いて解析を行う場合、媒質によっては誘電率の周波数分散性を考慮する必要がある。例えば光波帯で金属を用いる場合、Drude モデルや Drude-Lorentz モデルなどにより周波数分散性が考慮される。マイクロ波帯からテラヘルツ帯で水を扱う際は Debye モデル、生体などに対しては Cole-Cole モデルがしばしば利用されている [1]。これらの周波数分散性を取り扱うために様々な手法を用いて FDTD 法は拡張されてきた [2]-[6]。しかしながら FDTD 法は陽解法であるため Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件を満たす必要があり、時間刻み幅 ( $\Delta t$ ) に制限を受ける。

他方、筆者らのグループは  $\Delta t$  に制限を受けない局所 1 次元 (LOD)FDTD 法を開発し、Drude モデルや Drude-Lorentz モデルなど様々な分散モデルを解析してきた [7]-[11]。しかしながら、Cole-Cole モデルへの拡張は未検討であった。

本稿では、LOD-FDTD 法を Cole-Cole モデルを解析するための周波数依存型に拡張する [12],[13]。Cole-Cole モデルを含む媒質を解析し、計算精度及び計算時間を陽的 FDTD 法と比較する。

## 2. 本論

Z 変換を用いた 2 次元 LOD-FDTD 法の定式化を行う。Cole-Cole モデルを以下に示す。

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{m=1}^n \frac{\Delta\varepsilon_m}{1 + (j\omega\tau_m)^{1-\alpha_m}} + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} \quad (1)$$

ここで、 $\varepsilon_\infty$  は周波数が無限大での比誘電率、 $n$  は極数、

$\Delta\varepsilon_m$  は対応する周波数範囲での誘電率変化、 $\tau_m$  は緩和時間、 $\alpha_m$  は緩和の広がりを示すパラメータ、 $\sigma$  は導電率である。Cole-Cole モデルでは緩和時間の指数が小数になることが特徴的である。ここではテイラー展開で近似する方法を採用する [14]。以下では、 $n = 2$  とした場合の 1st step における  $E_z$ 、 $H_y$  成分 (TM 波) の計算式のみを示す。

$$E_z^{n+\frac{1}{2}} = E_z^n + \frac{c\Delta t}{2A} \left( \frac{\partial H_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial H_y^n}{\partial x} \right) + \frac{1}{A} (I_z^{n-1} - I_z^n) - \sum_{m=1}^2 \frac{B_m}{A} (1 - \alpha_m) \left[ S_{m,z}^n + \left( \frac{\alpha_m}{2} - 1 \right) S_{m,z}^{n-1} - \frac{\alpha_m}{2} S_{m,z}^{n-2} \right] \quad (2)$$

$$S_{m,z}^n = B_m \left[ (1 - \alpha_m) S_{m,z}^{n-1} + \frac{1}{2} \alpha_m (1 - \alpha_m) S_{m,z}^{n-2} \right] + \frac{\Delta\varepsilon_m}{1 + \left( \frac{\tau_m}{\Delta t} \right)^{1-\alpha_m}} E_z^n \quad (3)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}} = H_y^n + \frac{c\Delta t}{2\mu_r} \left( \frac{\partial E_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial E_z^n}{\partial x} \right) \quad (4)$$

ここで

$$A = \varepsilon_\infty + \frac{\sigma\Delta t}{\varepsilon_0} + \sum_{m=1}^2 \frac{\Delta\varepsilon_m}{1 + \left( \frac{\tau_m}{\Delta t} \right)^{1-\alpha_m}}$$

$$B_m = \frac{\left( \frac{\tau_m}{\Delta t} \right)^{1-\alpha_m}}{1 + \left( \frac{\tau_m}{\Delta t} \right)^{1-\alpha_m}}$$

$$I_z^n = \frac{\sigma\Delta t}{\varepsilon_0} E_z^n + I_z^{n-1}$$

である。上式で、 $c$ は光速、 $\mu_r$ は比透磁率である。また  $E$  と  $H$  の振幅を揃えるため、界は正規化されている。 $E$  の計算式に  $S$  と  $H$  を代入して陰的に、引き続き  $H$  の計算式を陽的に解く。

計算精度を評価するため、Cole-Cole モデルを含む媒質を解析する。解析モデルを図 1 に示す。ここで  $x$  軸方向には周期境界条件を適用している [15]。乾燥した皮膚を Cole-Cole モデル [16] として扱い、空間の刻み幅を  $\Delta x = 0.5 \mu\text{m}$ 、 $\Delta z = 0.1 \mu\text{m}$  に選ぶ。入射波には横方向に一樣な振幅をもつパルス波を用い、 $+z$  方向に励振する。パルス波の中心周波数を 1.5 THz に設定する。

図 2 に 4 ps 経過後の  $z$  軸断面の界振幅を示す。比較のため、陽的 FDTD 法の結果も併記する。なお、陽的 FDTD 法で取り得る最大の時間刻み幅を  $\Delta t_{\text{CFL}}$  とし、 $\Delta t/\Delta t_{\text{CFL}}$  を CFLN と定義する。THz 波の一部が皮膚に侵入し、一部が反射していることがわかる。ここで、CFLN=1 において、LOD-FDTD 法の結果は陽的 FDTD 法の結果と一致する。また、CFLN を 5 及び 10 に選んでも、波形が保たれている。最後に、Core i7-4790 プロセッサ (3.6 GHz) を搭載した PC を用いた際の計算時間について言及する。LOD-FDTD の計算時間は、CFLN = 5 で陽的 FDTD 法の計算時間の約 70 %となる。

### 3. 結び

LOD-FDTD 法を Cole-Cole モデルを解析するための周波数依存型に拡張した。CFLN=5 に選んでも陽的 FDTD 法の結果とよく一致しており、計算時間を約 70 %に短縮できることを明らかにした。

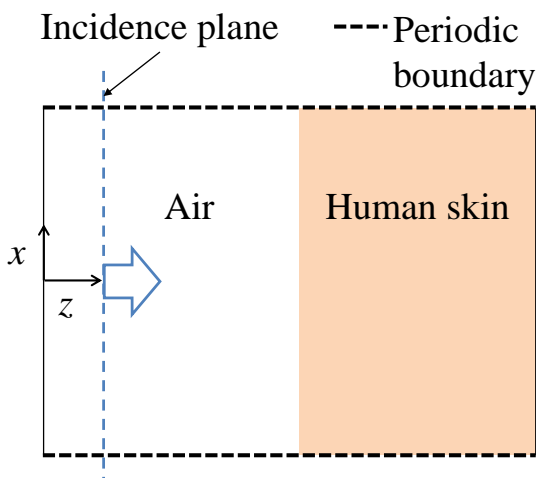


図 1 解析モデル

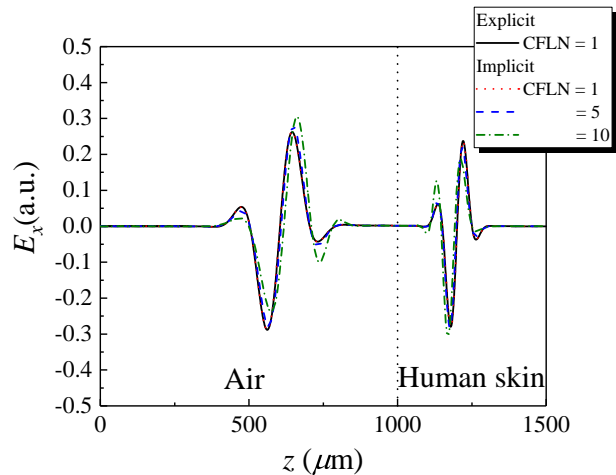


図 2  $E_x$  の界振幅

### 参考文献

- 1) J. Shibayama *et al.*, *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 19, pp. 1046-1047, 2005.
- 2) R. J. Luebbers *et al.*, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 39, no. 1, pp. 29-34, 1991.
- 3) D. F. Kelly and R. J. Luebbers, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, no. 6, pp. 792-797, 1996.
- 4) R. Siushansian and J. LoVetri, *IEEE Microw. Guided Wave Lett.*, vol. 5, no. 12, pp. 426-428, 1995.
- 5) T. Kashiwa and I. Fukai, *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 3, no. 6, pp. 203-205, 1990.
- 6) D. M. Sullivan, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, no. 10, pp. 1223-1230, 1992.
- 7) J. Shibayama *et al.*, *Electron. Lett.*, vol. 44, no. 16, pp. 949-950, 2008.
- 8) J. Shibayama *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 46, no. 1, pp. 40-49, 2010.
- 9) J. Shibayama *et al.*, *IEICE Trans. Electron.*, vol. E95-C, no. 4, pp. 725-732, 2012.
- 10) J. Shibayama *et al.*, *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 25, no. 10, pp. 965-968, 2013.
- 11) 柴山, 日下 他, 信学総大, C-15-10, 2017.
- 12) 柴山, 日下 他, 信学総大, C-15-20, 2016.
- 13) J. Shibayama, Y. Kusaka *et al.*, *PIERS*, Shanghai, p. 1781, 2016.
- 14) S. Su *et al.*, *Bioelectromagn.*, vol. 26, no. 5, pp. 389-397, 2005.
- 15) J. Shibayama *et al.*, *IEEE Antennas Wireless Propagat. Lett.*, vol. 8, pp. 890-893, 2009.
- 16) S. Gabriel *et al.*, *Phys. Med. Biol.*, vol. 41, no. 11, pp. 2271-2293, 1996.