# 二項モデルを用いた信用取引のモデル化及び期待効用最大化

山村, 和也 / Yamamura, Kazuya

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編
(巻 / Volume)
58
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
8
(発行年 / Year)
2017-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00014367

# 二項モデルを用いた信用取引のモデル化及び期待効用最大化

MODELING OF MARGIN TRADING USING BINOMIAL MODEL
AND EXPECTED UTILITY MAXIMIZATION

山村和也
Kazuya YAMAMURA

指導教員 安田和弘

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

In this paper, we formulate margin trading using a binomial model, and provide some numerical experiment results with respect to expected utility maximization problems with a static strategy under the model. In modeling, margin calls and the interest for margin are taken into account following regulations. In order to obtain its optimum strategy, we use stochastic algorithms, especially the Robbins-Monro method. We capture characteristics of margin trading in terms of leverage and costs through numerical results of the expected utility maximization problem. Furthermore, we compare and discuss results of spot and margin trading in our model.

***Key Words*** *: Margin trading, Expected utility maximization, Stochastic algorithm*

## 1.　はじめに

市場の取引は二分される．現物取引と信用取引である．現物取引とは個人投資家や法人投資家による自己保有株式及び自己資金による売買のことである．一方，信用取引では証券会社から借り入れた株式や資金を用いて売買取引が行われる．つまり，取引の際に信用取引を用いれば，手持ちの資金以上の取引が可能となる．また，売りのポジションから取引を開始できるため，下落相場においても収益をあげることが可能である．しかし，信用取引を利用するためには現金や株式などの有価証券を保証金として差し入れる必要がある．また，大きな収益を得られる機会があるが，コストやレバレッジ効果による大きな損失などが発生する可能性もある．本研究では信用取引のモデルを二項モデルを用いて作成する．その際，取引コストの点から静的な投資戦略を仮定し，追証や信用取引金利などの信用取引に関わる規定を考慮する．さらに，求めたモデルに対しての期待効用最大化問題を扱う．そのうえで，信用取引と現物取引の差に関して，期待効用最大化問題に関する数値実験から評価する．また，信用取引のレバレッジ効果とコストが期待効用にもたらす効果に関して言及する．

## 2.　信用取引

ここではモデル化において考慮すべき信用取引の規定に関して記述する．以下は [1]，[4] を参考にしている．

### (1)　委託保証金

信用取引を行う際には一定額以上の担保金を証券会社に預け入れる必要がある．この預け入れる担保金のことを委託保証金と呼ぶ．投資家は委託保証金を担保として資金や株を証券会社から借り受けて，株式等を買い付ける．この一連の取引を信用取引という．また，信用取引によるポジションに対する委託保証金の割合を委託保証金率という．例えば，700 万円の現金を委託保証金として証券会社に預け入れ，信用取引によって 2000 万円のポジションを建てた場合，委託保証金率は 35% である．

### (2)　追証

信用取引の対象となっている株式等の価格が変動することによって生じた損失は委託保証金から差し引かれる．損失清算後の担保が、ある水準まで減少していた場合，追加で資金を預け入れなければならない．この水準を委託保証金維持率といい，追加で預け入れる資金を追証金という．仮に追証に応じることが出来ない場合，証券会社は注文を出してポジションの決済を行う．そのため，ポジションを維持するためには，必ず追証金を差し入れる必要がある．例えば，委託保証金率が 35% で委託保証金維持率が 30% の契約において，現金 700 万円を委託保証金として信用取引を行い，2,000 万円を全額投資した銘柄がもし 20% 値下がりすれば，損失は 400 万円となる．損失清算後の委託保証金は 300 万円となり，このとき委託保証金率は 15% である．投資家は建玉を維持するためには委託保証金率を委託保証金維持率 (30%) まで回復するために，300 万円を追加入金する必要がある．

## 3.　投資モデル

本節では前節の条件を含有した離散時間モデルを定式化する．取引コストの点からここでは静的な投資戦略を扱う．$N$ を正の整数とし，離散的な時刻 0 から $N$ までを考える．$n$ 期における投資家の資金の合計を $X_n$ とする．投資家は 0 期において初期資金 $X_0 = x$ を比率 $|\alpha|(\alpha \in \mathbb{R})$ を委託保証金として証券会社に預け入れ，$1-|\alpha|$ で安全資産に投資する戦略をとるとする．なお，$\alpha$ は時間によって変化しない静的な戦略とする．また，0 期におけるポジションは自身で設定す

る満期 $N$ 期まで必ず維持するものとする．その際，資産価格の下落により追証が発生した場合，追加で担保を安全資産側への投資から，委託保証金率が投資家が設定した水準に到達するまで支払う．また，安全資産が不足しており，追証金を支払えない場合は借金をして水準に到達するまで支払い，$N$ 期までポジションは維持するものとする．

**(1)　リスク資産**

株価を表すモデルとして二項モデルを採用し，取引を定式化していく．いま，リスク資産は確率 $p$ $(p \in (0,1))$ で $u$ $(u > 1)$ 倍され，確率 $1-p$ で $d$ $(0 < d < 1)$ 倍される二項モデルで表現することとする．また，初期の委託保証金率を $m$ $(0 < m < 1)$ とし，契約上の委託保証金維持率を $l$ $(0 < l \leq m)$ とする．また，追証発生時には投資家が設定する水準 $L(L \geq l)$ まで保証金率を回復する．保証金率が保証金維持率を下回った際に追証が発生する．$n$ 期での信用取引におけるポジションの評価額を $Y_n$ とする．このとき，信用取引における 0 期でのポジションの金額は $Y_0 = \frac{x\alpha}{m}$ で表される．ここで各 $n \geq 1$ に対して，$\mathcal{F}_n$-可測な確率変数 $\mu_n$ を次のように定義する．

$$\mu_n = \begin{cases} u, & \text{確率 } p, \\ d, & \text{確率 } 1-p. \end{cases}$$

ただし，$\mu_n$ は $n$ 期におけるリスク資産の変動を意味し，各 $n$ に対して互いに独立とする．また，$\mu_0 = 1$ とする．確率変数 $\mu_n$ を用いて，$Y_n$ は次のように表す事が出来る．

$$Y_n = Y_0 \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

$\tau_j$ を $j$ 番目の追証が発生する時刻とし，$\xi_j$ をその時の追証額とする．このとき $V_n$ を $n$ 期におけるリスク資産側の資金合計とする．つまり $V_0$ は $x|\alpha|$ である．各期における評価損は委託保証金から差し引かれることに注意して，次のように $V_n$ を表す事が出来る．

$$V_n = x|\alpha| + Y_0 \left( \prod_{i=1}^{n} \mu_i - 1 \right) + \sum_{\tau_j \leq n} \xi_j. \tag{1}$$

(1) 式右辺の 1 項目は 0 期において預け入れた委託保証金を表しており，2 項目によって $n$ 期までの評価損益を加減している．そのうえで，3 項目の $n$ 期までに発生した追証額の総和を差し引き，リスク資産側の資金合計を表している．

**(2)　安全資産**

ここでは安全資産について扱う．$Z_n$ を $n$ 期における安全資産側の資金合計額とする．また，借金額にも利子が伴うものとする．まず 0 期における安全資産額 $Z_0$ は，初期資産 $x$ からリスク資産への投資を除き，次のように表現出来る．

$$Z_0 = (1 - |\alpha|)x.$$

1 期目以降では，利子率 $r(r \in (d-1, 0))$，および，先述した追証額 $\xi_j$ を考慮する必要がある．$Z_n$ は次のように表す事が出来る．

$$Z_n = (1 - |\alpha|)x(1+r)^n - \sum_{\tau_j \leq n} \xi_j (1+r)^{n-\tau_j}.$$

先述した $V_n$ と $Z_n$ を用いて，$n$ 期における投資家の資産合計額 $X_n$ は $X_n = V_n + Z_n$ として表す事が出来る．

**(3)　漸化式による表現**

投資家のリスク資産，安全資産の合計額 $V_n, Z_n$ およびそれらの合計額 $X_n$ は漸化式を用いて次のように表現することも可能である．なお詳細に関しては本論文を確認していただきたい．

**定理 1**

$$\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1}) \\
&\quad + \left( \frac{L}{m} x|\alpha| - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) \right) \\
&\quad \times \mathbf{1} \left( \frac{l}{m} x|\alpha| - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) > 0 \right), \\
Z_n &= Z_{n-1}(1+r) \\
&\quad - \left( \frac{L}{m} x|\alpha| - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) \right) \\
&\quad \times \mathbf{1} \left( \frac{l}{m} x|\alpha| - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) > 0 \right), \\
X_n &= X_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1}) - Y_0 r^n + Z_{n-1} r.
\end{aligned}$$

ただし，$V_n$ と $Z_n$ に含まれる $\mathbf{1}(\cdot)$ は定義関数であり，関数の条件を満たした場合に 1 をとり，満たさない場合には 0 となる．また，定義関数の条件 $\frac{l}{m}x|\alpha| - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) > 0$ の左辺 1 項目は，保証金維持率を金額で表しており，2 項目は $n$ 期における評価損益を $n-1$ 期の保証金から清算した際の保証金を表している．1 項目 $>$ 2 項目 の場合には $n$ 期の保証金率は保証金維持率を下回っており，定義関数は 1 をとり，追証が発生する．1 項目 $<$ 2 項目 の場合は，$n$ 期における保証金率は保証金維持率を上回っており，定義関数は 0 をとり，追証は発生しない．さらに，$\frac{L}{m}x|\alpha|$ は投資家が設定した水準 $L$ に相当する金額を表しており，$V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})$ との差が $n$ 期における保証金率を水準 $L$ まで回復するために必要な金額という点にも注意していただきたい．定義関数との積で $\frac{L}{m}x|\alpha| - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1}))$ を用いることで，追証が発生した場合には保証金率を水準 $L$ まで回復することを表している．

前述の通り，本研究では $N$ 期までポジションを必ず維持することを前提においているが，漸化式による表現においては，数式上は各期間ごとに形式的に決算し，全く同一なポジションを各期に建てることで表現している．これにより，停止時刻を用いずに $V_n, Z_n$ を表現することが可能である．

**(4)　本モデルにおけるいくつかの性質**

ここでは，定理 1 における命題を与える．詳細に関しては本論文を確認していただきたい．

**命題 1** $n$ 期における投資家のリスク資産の合計額 $V_n$ と安全資産合計額 $Z_n$，および総資産 $X_n$ は以下のように和を用いて表す事が出来る．

$$\begin{aligned}
V_n =& V_0 + (Y_n - Y_0) + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{L}{m} x|\alpha| - (V_{i-1} + (Y_i - Y_{i-1})) \right) \\
& \times \mathbf{1} \left( \frac{l}{m} x|\alpha| - (V_{i-1} + (Y_i - Y_{i-1})) > 0 \right), \\
Z_n =& Z_0(1+r)^n - \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{L}{m} x|\alpha| - (V_{i-1} + (Y_i - Y_{i-1})) \right) \\
& \times \mathbf{1} \left( \frac{l}{m} x|\alpha| - (V_{i-1} + (Y_i - Y_{i-1})) > 0 \right), \\
X_n =& x + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} Y_0 r^i + \sum_{i=1}^{n} Z_i r.
\end{aligned}$$

**命題 2** 時刻 $k$ において初めて追証が発生するのは，$\alpha > 0$ の場合は次の条件を満たした場合である．

$$m + d^k - 1 < l.$$

また，$\alpha < 0$ の場合は次の条件を満たした場合である．

$$m - (u^k - 1) > l.$$

**命題 3** 任意の $n$ において $V_n, Z_n, X_n$ は各 $\omega$ ごとに 1 次関数になっている．

## 4. 期待効用最大問題

ここでは，前節にて定式化した取引モデルにおける期待効用最大化問題を考える．

### (1) 効用関数

本研究では，リスク回避的な投資家の効用関数としては，次の対数型効用関数を用いる．

$$U_1(x) = \log(x + \beta_1). \tag{2}$$

ただし，$\beta_1$ $(\beta > 0)$ は真数条件を考慮し，真数が負になることを防ぐ目的で用いたパラメータである．また，リスク愛好的な投資家の効用関数としては，次の効用関数を用いる．

$$U_2(x) = \left(\frac{x}{\delta} + \beta_2\right)^2. \tag{3}$$

ただし，$\delta$ は発散を抑制するためのパラメータであり，$\beta_2$ は $x$ が負の場合でも正しく効用を示すために用いた．

### (2) 期待効用最大化

効用関数 $U$ を用いて，$n$ 期における投資家の資産合計 $X_n$ の期待効用最大化問題を与える．

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} E[U(X_n^\alpha)]. \tag{4}$$

ただし，$X_n^\alpha$ は $X_n$ が $\alpha$ に依存していることを明示するために用いた添え字である．ここでは (4) 式を満たすような $\alpha$ を最適投資戦略と呼ぶ．最適投資戦略を求めるために，$X_n$ の期待効用を微分し，$\frac{d}{d\alpha}E[U(X_n)] = 0$ を満たす $\alpha$ を求める．合成関数の微分により $\frac{d}{d\alpha}E[U(X_n)]$ は次のように書ける．

$$\frac{d}{d\alpha}E[U(X_n^\alpha)] = E\left[U'(X_n^\alpha)\frac{dX_n^\alpha}{d\alpha}\right].$$

$U'(X_n^\alpha)$ に関しては，効用関数が決定すれば容易に求めることが可能である．ここでは $\frac{dX_n^\alpha}{d\alpha}$ について紹介する．定理 1 より $X_n$ の $\alpha$ での微分 $\frac{dX_n^\alpha}{d\alpha}$ は次のように求まる．

$$\begin{aligned}\frac{dX_n^\alpha}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\left\{x + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} Y_0 r^i + \sum_{i=1}^{n} Z_i r\right\} \\ &= \frac{x}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i}\mu_j - \prod_{j=1}^{i-1}\mu_j - r^i\right) + r\sum_{i=1}^{n}\frac{dZ_i}{d\alpha}.\end{aligned} \tag{5}$$

### (3) $\alpha > 0$ の場合

(5) 式を計算するためには，$\frac{dZ_n}{d\alpha}$ を考える必要がある．また，定理 1 から分かるように，$\frac{dZ_n}{d\alpha}$ を求めるためには，$\frac{dV_n}{d\alpha}$ を最初に求める必要がある．ここで，表記を簡略化するために次の記号を用意する．

$$\mathbf{1}_n = \mathbf{1}\left(\frac{l}{m}x\alpha - (V_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) > 0\right),$$

$$a_n = \frac{L}{m}x - \left(x + \sum_{i=1}^{n}\frac{x}{m}\left(\prod_{j=1}^{i}\mu_j - \prod_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)\right).$$

これらを用いて，$\alpha > 0$ の場合，$n$ 期におけるリスク資産側の合計額 $V_n$ の $\alpha$ による微分 $\frac{dV_n}{d\alpha}$ は次のように表現できる．

$$\begin{aligned}\frac{dV_n}{d\alpha} =& x + \frac{x}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i - \prod_{i=1}^{n-1}\mu_i\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_i=1 \\ j_1<j_2<\cdots<j_i}}^{n} a_{j_1}\cdots a_{j_i}\mathbf{1}_{j_1}\cdots\mathbf{1}_{j_i}.\end{aligned}$$

また，$\alpha > 0$ の場合，$n$ 期における安全資産側の合計額 $Z_n$ の $\alpha$ による微分 $\frac{dZ_n}{d\alpha}$ は次である．

$$\begin{aligned}\frac{dZ_n}{d\alpha} =& -x(1+r)^n - \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i}a_{j_i}\mathbf{1}_{j_i} \\ &+ \sum_{i=2}^{n}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_i=1 \\ j_1<j_2<\cdots<j_i}}^{n}(1+r)^{n-i}a_{j_1}\cdots a_{j_i}\mathbf{1}_{j_1}\cdots\mathbf{1}_{j_i}.\end{aligned} \tag{6}$$

なお詳細に関しては本論文を確認していただきたい．

### (4) $\alpha < 0$ の場合

次に $\alpha < 0$ の場合について記述する．なお，この場合は信用売りを意味している．まず、リスク資産側の合計額 $V_n$ の $\alpha$ による微分について紹介する．まず次の記号を用意する．

$$b_n = \frac{L}{m}x + \left(-x + \sum_{i=1}^{n}\frac{x}{m}\left(\prod_{j=1}^{i}\mu_i - \prod_{j=1}^{i-1}\mu_i\right)\right)$$

この記号を用いて，$\alpha < 0$ の場合の $n$ 期におけるリスク資産側の合計額 $V_n$ の $\alpha$ による微分 $\frac{dV_n}{d\alpha}$ は次である．

$$\begin{aligned}\frac{dV_n}{d\alpha} =& -x + \frac{x}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i - \prod_{i=1}^{n-1}\mu_i\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_i=1 \\ j_1<j_2<\cdots<j_i}}^{n} b_{j_1}\cdots b_{j_i}\mathbf{1}_{j_1}\cdots\mathbf{1}_{j_i}.\end{aligned}$$

また，$\alpha < 0$ の場合の $n$ 期における安全資産側の合計額 $Z_n$ の $\alpha$ による全微分 $\frac{dZ_n}{d\alpha}$ は次である．

$$\begin{aligned}\frac{dZ_n}{d\alpha} =& x(1+r)^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \\ &\times \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_i=1 \\ j_1<j_2<\cdots<j_i}}^{n}(1+r)^{n-i}b_{j_1}\cdots b_{j_i}\mathbf{1}_{j_1}\cdots\mathbf{1}_{j_i}.\end{aligned} \tag{7}$$

### (5) N=3 以下の場合

$N = 3$ 以下の場合，解析的に最適投資戦略を求めることが出来る．$\alpha > 0$ と仮定した場合，追証が発生するのは $N = 2$ であれば 1 期目にてリスク資産価格が下がった場合のみであり，$N = 3$ であれば 1 期目と 2 期目にリスク資産価格が下がった場合である．このとき，追証が発生する条件及び追証金額は解析的に求めることが可能である．例えば，1 期目にリスク資産価格が下落し，追証が発生する条件は次のように表すことが出来る．

$$m - \frac{\left(\frac{\alpha x}{m}d - \frac{\alpha x}{m}\right)}{\frac{\alpha x}{m}} < l,$$

上式を変形して，

$$m - d < l. \tag{8}$$

上式左辺は，1 期目における評価損をポジションに対する比率で表し，保証金率 $m$ との差を表している．前述の通り，評価損を差し引いた保証金率が保証金維持率を下回れば追証が発生する．(8) 式を用いて，この場合の追証金額は次のように書ける．

$$\left\{\frac{L}{m}\alpha x - \left(\alpha x + \left(\frac{\alpha x}{m}d - \frac{\alpha x}{m}\right)\right)\right\}\mathbf{1}(m - d < l). \tag{9}$$

(9) 式と同様にして他の場合の追証発生条件とその金額を表すことが出来る．本研究ではリスク資産を二項モデルを用いて表現しているため，満期における資産合計額を追証の有無で場合分けすることで全てを書くことが可能である．ただし，$\alpha > 0$ であれば資産価格が下がった場合にのみ追証を考慮すればよい．解析的に得られた資産合計を用いて計算した期待効用は $\alpha$ の関数となる．$N = 3$ 以下の場合であれば，期待効用に対して $\alpha$ で微分を行い，解の公式を用いることで，最適投資戦略を解析的に得ることが出来る．

## 5. シミュレーションと数値計算例

ここで $\alpha$ に依存した確率変数 $H^\alpha$ を次のように定める．ただし，$H^\alpha$ は $H$ が $\alpha$ に依存していることを明示する目的で用いている．

$$H^\alpha = U'(X_n^\alpha)\frac{x}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i}\mu_j - \prod_{j=1}^{i-1}\mu_j - r_i\right) + r^i\sum_{i=1}^{n}\frac{dZ_i}{d\alpha}.$$

ただし，$\frac{dZ_i}{d\alpha}$ は $\alpha > 0$ の場合は (6) 式，$\alpha < 0$ の場合は (7) 式とする．期待効用最大化問題を解くためには $E[H^\alpha] = 0$ を満たす最適投資戦略 $\alpha$ を求める必要がある．本研究では Stochastic Algorithm (SA) を用いて，$\alpha$ を計算する．

### (1) Stochastic Algorithm

SA は確率的勾配降下法の一つで，様々な問題に適応することが出来る．確率的勾配降下法は目的関数が期待値で表された最適化問題に対して有効なアルゴリズムである．以降は Graham et al.[6] を参考にしている．本研究では $\alpha$ に依存した $H^\alpha$ の期待値 $E[H^\alpha]$ が 0 となる $\alpha$ を求める際に用いる．SA では次のように $\alpha$ を更新する．

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \gamma_{n+1}H^{\alpha_n}, \quad n \geq 0.$$

ただし，$\gamma_n$ は次の性質を満たす数列とする．

$$\gamma_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0, \quad \sum_{n\geq 1}\gamma_n = \infty.$$

本研究では $\gamma_n$ として次を用いた．

$$\gamma_n = \frac{\gamma_0}{n^t} \tag{10}$$

(10) 式のように $\gamma_n$ を仮定した場合，Robbins-Monro 法と呼ばれる．Bardou et al.[5] では Robbins-Monro 法を用いて VaR を計算しているが，Robbins-Monro 法における，$t$ の値として $\frac{1}{2} < t < 1$ を用いることで効率的な計算が可能であることを示している．

### (2) 最適投資戦略に関する数値計算例

ここでは SA を用いて計算した期待効用最大化問題に関するグラフを与える．まず，基本となるパラメータセットを与える．半々の確率でリスク資産の価値は上昇または下降し，そのときの上昇率は 1.5 倍，下降率は 0.7 倍である．委託保証金率は 35%，追証が発生する閾値である委託保証金維持率は 30% とした．さらに，追証が発生した場合は保証金率を $L$ の水準 30% まで回復し満期まで取引を続けるものとする．また，期間は 6 期間を考え，金利はいずれの期間においても一定で 5% とする．また，効用関数はリスク回避的な投資家の効用関数である対数型効用関数 (2) 式を用いた．Stochastic Algorithm の試行回数 10 万回，初期値は $\gamma_0 = 1, t = 0.75, \alpha_0 = 0.5$ として得た値を最適投資戦略とする．以降，特に断りのないパラメータ以外は基本パラメータセット (表 1) を用いて計算されている．

表 1 基本パラメータセット

| パラメータ | 値 |
|---|---|
| $p$ | 0.5 |
| $u$ | 1.5 |
| $d$ | 0.7 |
| $x$ | 100 |
| $m$ | 0.35 |
| $l$ | 0.3 |
| $L$ | 0.3 |
| $r$ | 0.05 |
| $N$ | 6 |

最初に上昇確率 $p$ を変化させた際の最適投資戦略を与える．(図 1)

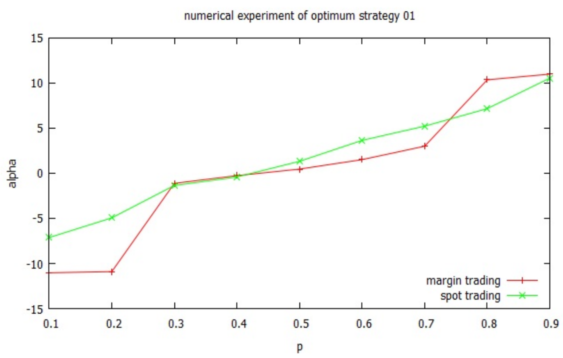


図 1 確率 $p$ を変化させた際の数値実験結果

図 1 は縦軸に $\alpha$，横軸にはリスク資産の上昇確率 $p$ を $0.1 \leq p \leq 0.9$ の範囲において 0.1 刻みで変化させた際の数値計算結果を示している．なお，$p = 0$ および $p = 1.0$ の場合は裁定機会となるため評価していない．前節で紹介した通り，本研究ではリスク資産は確率 $p$ ($p \in (0, 1)$) で $u$ ($u > 1$) 倍され，確率 $1 - p$ で $d$ ($0 < d < 1$) 倍される二項モデルで表現している．そのため $p$ の値が大きくなるほど，最適投資戦略も正に増加していく．一方で，$p$ が小さい場合では，リスク

資産の価格は下降する確率が大きいため負の投資戦略が最適投資戦略として計算された．特に，$p$ が小さい場合に信用取引と現物取引の投資戦略に大きな差が出た．これは信用取引を用いた場合には信用売りが可能であり，現物取引よりも負への大きな投資が最適な投資戦略という結果を得た理由と考える．また，信用取引では極端に上昇するか下降した場合において高い収益を得ることが可能である．そのため，上昇確率と下降確率のバランスがとれたシチュエーションでは投資比率は 0 に近い値をとる．これはリスク回避的な投資家の効用関数による影響とも考えられる．

次に，リスク資産の上昇率および下降率を変化させた際の信用取引の $\alpha$ に関する計算結果を与える．(表 2)

表 2 リスク資産の上昇率および下降率を変化させた際の $\alpha$ に関する計算結果

| $u\backslash d$ | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | -7.479 | -6.623 | -4.965 | 0.553 |
| 1.2 | -3.527 | -3.505 | -2.953 | 3.661 |
| 1.3 | -1.750 | -1.709 | -0.713 | 5.811 |
| 1.4 | -0.973 | -0.895 | 1.108 | 7.197 |
| 1.5 | -0.695 | -0.403 | 2.623 | 8.123 |
| 1.6 | -0.395 | 0.003 | 3.806 | 8.772 |
| 1.7 | -0.197 | 0.512 | 4.732 | 9.247 |
| 1.8 | -0.048 | 1.050 | 5.462 | 9.607 |
| 1.9 | 0.067 | 1.560 | 6.043 | 9.888 |
| 2 | 0.128 | 2.026 | 6.505 | 10.113 |

表 2 は $u$ を $1.1 \leq u \leq 2$ の範囲において 0.1 刻みで変化させた計算結果である．また，そのときの下降率 $d$ は $d = 0.25, d = 0.5, d = 0.75, d = 1.0$ と 0.25 刻みで 4 パターンに対して数値実験を行った．まず，$d$ がどの場合においても $u$ が大きいほど投資比率 $\alpha$ も正に大きくなることが分かる．これは一般的な感覚から考えても妥当である．特に顕著に表れているのが $d = 1.0$ の場合である．このとき，リスク資産は上昇するか現状を維持するかであり，投資期間中にリスク資産価格が大きく上昇する可能性が高く，大きな正のポジションが期待効用を最大化するという結果が得られた．全く逆のシチュエーションである $d = 0.25$ の場合では，リスク資産価格が大きく下落するため，よほどの上昇率でない限りは負のポジションが最適という結果であった．これらに関しては信用取引において広く知られている見解を具体的な数値として得ることが出来ている．

次に保証金率 $m$ と最適投資戦略の関係について示したグラフを与える．図 2 は縦軸に $\alpha$，横軸に委託保証金率 $m$ を $0.3 \leq m \leq 0.75$ まで 0.05 単位で変化させた結果である．委託保証金率が高まれば，取引期間中に委託保証金維持率を下回る可能性が減少する．追証のリスクが小さくなるため，正の投資比率によって期待効用の最大化が可能であるという結果を得たと考える．しかし，増加がある程度なだらかなのは，委託保証金率が増加することで信用取引におけるポジションの実質自己負担割合が増加しているからである．つまり，レバレッジ効果が弱まるため，単純に大きな正の投資戦略では効用を大きく出来ない．委託保証金率を増加することでリスク資産への投資比率を減少させずに，過剰な信用取引を抑制できる．実際,『信用取引に係る委託保証金の率の引上げ措置等に関するガイドライン』[2],『日々公表銘柄の指定等に関するガイドライン』[3] を発行している．尚，本ガイドラインは平成 29 年 2 月 1 日により細かく改正された．このことからも，保証金率が信用取引において重要な位置づけにあると言える．

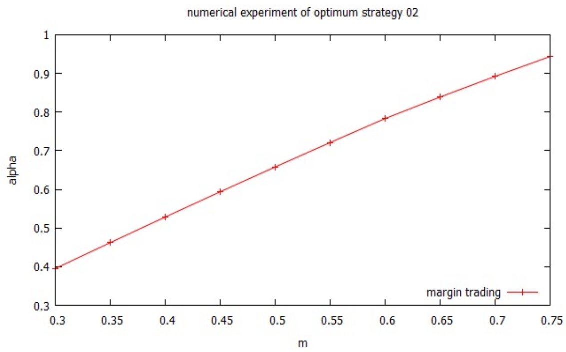


図 2 委託保証金率 $m$ を変化させた際の数値実験結果

次に金利が計算結果に与える影響について示したグラフを与える．(図 3)

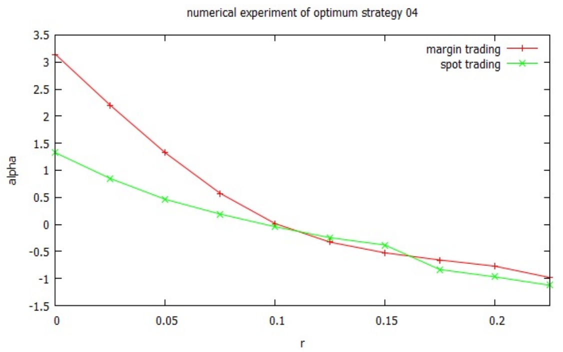


図 3 金利 $r$ を変化させた際の数値実験結果

図 3 は縦軸に $\alpha$，横軸に金利 $r$ を 0 から 0.225 まで 0.025 刻みで変化させた際に得られた計算結果である．金利が大きくなるほどに投資比率は減少し，およそ $r = 0.1$ において投資比率は負となる結果を得た．特に $r = 0$ において，信用取引と現物取引の投資比率に差が見られる．信用取引の場合，証券会社から借り入れた資金には利子の支払いが必要となる．しかし，$r = 0$ の場合では，利子コストが全くかからないため，正の大きな投資戦略を最適投資戦略として得た．これが $r$ が小さい場合において信用取引と現物取引で投資比率に差が生じた理由と考える．

最後に $L$ が計算結果に与える影響について示したグラフを与える．水準 $L$ は 3 節で紹介した通り，追証が発生した際に保証金率を投資家が定めた水準 $L$ まで回復することを目的に用いている．追証が発生した際に保証金率を高めに回復すれば，次の追証が発生するまでの期間を延ばすことが可能となる場合がある．しかし，余分に安全資産側の投資金額から充填しなければならない．一方で，$L$ を小さくとった場合，評価損が発生するたびに追証が発生する可能性もある．

図 4 は縦軸に $\alpha$，横軸には水準 $L$ を制度上の最低設定である 0.3 から 0.5 刻みで 0.75 まで変化させた際の結果を示している．数値実験の結果から，リスク資産に評価損が発生した場合は必ず追証が発生する $L=0.3$ において，最も高い投資比率であることが分かる．以降は $L$ が増加するほどに投資比率はなだらかに減少している．

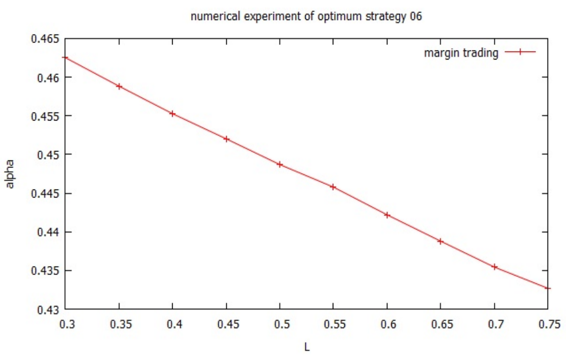


図 4 水準 $L$ を変化させた際の数値実験結果

**(3) 期待効用に関する数値計算例**

ここでは，5.2 節において与えた最適投資戦略による期待効用の変化に関して紹介する．ただし，縦軸第一軸は期待効用を表し，第二軸は確実等価額を表している．

最初に上昇確率 $p$ を変化させた際の期待効用を与える．図 5 は図 1 で得た最適投資戦略による期待効用の変化を表している．グラフからほとんどすべての点で信用取引の期待効用が現物取引の期待効用を上回っている．信用取引の期待効用は $p=0.5$ において最小の値をとり，$p$ が増加減少するほどに効用は大きくなる．$p=0.5$ 付近では最適投資比率が 0 に近く，リスク資産の価値が上昇も下降もしづらいシチュエーションでは効用を大きくしづらいということが分かる．さらに，$p=0.5$ では信用取引と現物取引の期待効用は，ほぼ同じ値をとる．このことからも，信用取引は変動が激しい相場において効果的であることが分かる．

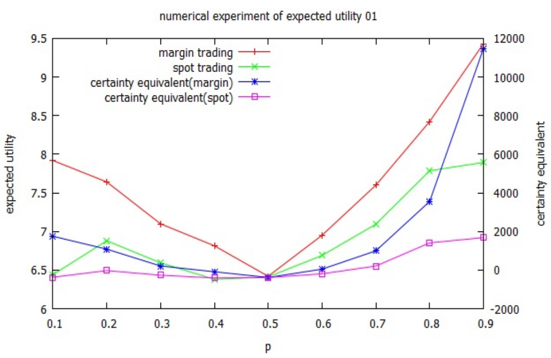


図 5 確率 $p$ を変化させた際の数値実験結果

次に，リスク資産の上昇率および下降率を変化させた際の信用取引の計算結果を与える．表 3 は表 2 にて与えた最適投資戦略における期待効用を表している．また，リスク資産の上昇率および下降率を変化させた際の現物取引における，最適投資戦略の数値実験結果は本論文にて確認いただきたい．

表 3 を見ると，$d=1.0$ 以外では $u$ が中間程度の場合に期待効用が下がり，$u=1.1$ 及び $u=2.0$ に近づくにつれて期待効用は大きくなる．これは，信用取引を用いた場合，リスク資産が極端に下落または上昇するほど収益を得ることが出来るからである．$d=1.0$ の場合では，リスク資産の価格が下降することがないため，$u=1.1$ から $u$ が大きくなるほど期待効用も大きくなっている．一方，現物取引では信用取引と異なり，売りのポジションから取引を開始できないため，リスク資産の価格が高くなり易い状況において期待効用が大きくなっている．また，全体的に信用取引の方が現物取引よりも期待効用が大きいことが分かる．

表 3 リスク資産の上昇率および下降率を変化させた際の信用取引における計算結果

| $u\backslash d$ | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 8.145 | 8.177 | 7.897 | 7.672 |
| 1.2 | 7.970 | 7.884 | 7.697 | 7.939 |
| 1.3 | 7.800 | 7.733 | 7.637 | 8.290 |
| 1.4 | 7.720 | 7.669 | 7.705 | 8.618 |
| 1.5 | 7.893 | 7.647 | 7.847 | 8.908 |
| 1.6 | 7.873 | 7.653 | 8.025 | 9.166 |
| 1.7 | 7.865 | 7.681 | 8.215 | 9.398 |
| 1.8 | 7.864 | 7.732 | 8.405 | 9.609 |
| 1.9 | 7.868 | 7.799 | 8.588 | 9.803 |
| 2 | 7.893 | 7.878 | 8.764 | 9.983 |

表 4 リスク資産の上昇率および下降率を変化させた際の現物取引における計算結果

| $u\backslash d$ | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 6.337 | 6.382 | 6.866 | 6.370 |
| 1.2 | 6.276 | 6.383 | 6.556 | 6.625 |
| 1.3 | 6.306 | 6.370 | 6.386 | 7.035 |
| 1.4 | 6.392 | 6.417 | 6.387 | 7.409 |
| 1.5 | 6.448 | 6.427 | 6.487 | 7.730 |
| 1.6 | 6.491 | 6.469 | 6.637 | 8.009 |
| 1.7 | 6.555 | 6.534 | 6.807 | 8.256 |
| 1.8 | 6.600 | 6.528 | 6.979 | 8.478 |
| 1.9 | 6.853 | 6.764 | 7.145 | 8.681 |
| 2 | 7.311 | 7.182 | 7.305 | 8.867 |

次に保証金率 $m$ と期待効用の関係について示したグラフを与える．図 6 は図 2 で与えた委託保証金率 $m$ を変化させた際の最適投資戦略による，期待効用の変化を表している．保証金率が増加するほど，期待効用は小さくなっている．これは，前述の通り，レバレッジ効果が弱ったことから生じた結果だと考える．しかしながら，最大値は $m=0.3$ のときに 6.414 であり，最小値は $m=0.75$ のときに 6.414 である．金額にして 3.2 程度の差である．保証金率の増加は期待効用への影響を比較的与えずに，投資比率を大きくすることが可能である．

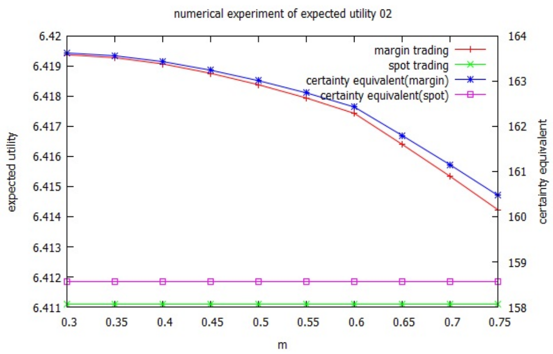


図 6 委託保証金率 $m$ を変化させた際の数値実験結果

次に金利が期待効用に与える影響について示したグラフを与える．(図 7)

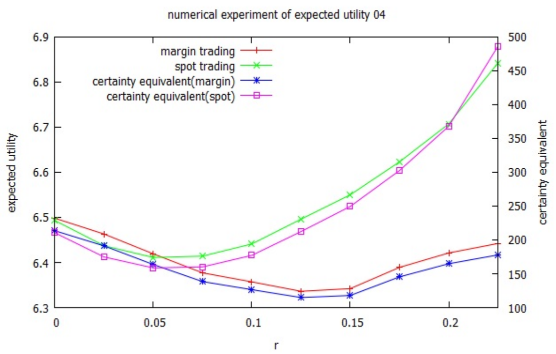


図 7 金利 $r$ を変化させた際の数値実験結果

図 7 は金利が変化させた際の期待効用の変化に関して表している．$r$ が 0.05 程度になるまでは信用取引も現物取引も同等の期待効用を示している．$r > 0.05$ では信用取引の効用が現物取引の効用を大きく下回っている．特に，$r = 0.225$ において最も期待効用に差がある．これは証券会社からの借入金の利子が大きく期待効用を減少させていると考えられる．金利が高い場合には信用取引は有効ではないということが数値計算結果から分かる．

最後に $L$ を変化させた際の期待効用に関して示したグラフを与える．(図 8)

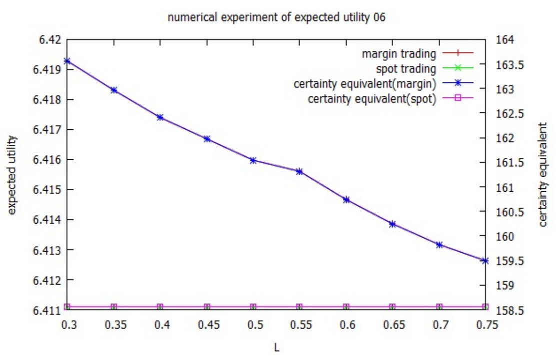


図 8 水準 $L$ を変化させた際の数値実験結果

図 8 から，最適投資戦略と同様に水準 $L$ を高めに設定した場合，期待効用は減少することが分かる．期待効用最大化においては，追証が発生した場合には委託保証金維持率まで保証金率を回復する戦略が好ましいことが数値実験結果から分かる．理由として，本モデルでは追証金は安全資産から支払う．また，安全資産が不足しており，追証金を支払えない場合は借金をして支払うことを仮定している．そのため，$L$ が大きい場合，借金額や借金に対する利子コストが期待効用を減少させる原因になっていると考える．また，計算に用いた投資期間は $N = 6$ であり，過剰に $L$ を大きく設定した場合，次の追証の発生を先延ばしに出来る恩恵を十分に受けないまま満期を迎えている可能性も十分に存在しているためと考える．

**(4) 追証に関する数値計算例**

ここでは，追証に関する数値実験の結果を与える．具体的には，最適投資戦略を用いて期待効用を計算する際に，パラメータの変動によって追証の発生回数がどの程度変化するのかを紹介する．いま，投資期間は $N = 6$ を考えており，各期末において追証の有無を考慮する必要がある．さらに，期待効用を求める際にはモンテカルロ法を試行回数 10 万回で用いている．したがって，期待効用を求める際には 60 万回の追証の可能性が存在している．ここでは，6 期間での平均追証回数を評価する．ただし，断りのないパラメータは基本パラメータセットを用いて計算している．まず，リスク資産の上昇率及び下降率 $u, d$ を変化させた際の結果を与える．(表 5)

表 5 リスク資産の上昇率及び下降率を変化させた際の追証に関する計算結果

| $u, d$ | 1.2,0.5 | 1.5,0.7 | 1.8,0.75 |
|---|---|---|---|
| 投資比率 | -3.505 | 0.463 | 5.462 |
| 平均追証回数 | 1.048 | 1.532 | 1.155 |
| 期待効用 | 7.884 | 6.419 | 7.130 |

表 5 はリスク資産価格の傾向として，$u = 1.2, d = 0.5$ の下降傾向，基本パラメータ，$u = 1.8, d = 0.75$ の上昇傾向の 3 パターンを用意し，追証の発生回数とそのときの投資戦略及び期待効用を示している．表を見ると，追証の発生回数が期待効用に影響を与えていることが分かる．$u = 1.2, d = 0.5$ では売りのポジションを建てており，追証が発生する可能性があるのは資産価格が上昇した際である．この場合では，資産が下落し易いパラメータで計算しているため，追証の回数は他と比べて少ない．同様の理由から，$u = 1.8, d = 0.75$ の場合でもリスク資産価格は上昇傾向にあり追証の回数は少ない．一方で，$u = 1.5, d = 0.7$ の場合では，買いのポジションを建てており，リスク資産の上昇幅と下降幅が近いため追証の回数が一番多くなっていると考える．

次に，リスク資産の上昇確率 $p$ を変化させた際の結果を与える．表 6 はリスク資産価格の変動確率として，$p = 0.2$ の下落し易い場合，$p = 0.5$ の基本パラメータ，$p = 0.8$ の上昇し易い場合を用意した．表 5 と同様の理由から，類似した結果が得られたと考える．しかし，追証の発生回数は表 5 と比格して，格段に少なくなっている．追証の発生回数に関しては，リスク資産価格の変動幅よりも変動確率が大きな影響を与えていることが数値実験結果から分かる．

表 6 確率 $p$ を変化させた際の追証に関する計算結果

| $p$ | 0.2 | 0.5 | 0.8 |
|---|---|---|---|
| 投資比率 | -10.905 | 0.463 | 10.357 |
| 平均追証回数 | 0.606 | 1.532 | 0.312 |
| 期待効用 | 7.640 | 6.419 | 8.423 |

**(5) リスク愛好的な効用関数に関する数値計算例**

ここでは，効用関数に (3) 式のリスク愛好的な投資家の効用関数を用いた場合における，数値計算例を与える．特に，リスク回避的な投資家の効用関数を用いた場合との差に関して言及する．まず，委託保証金率 $m$ を変化させた際の数値実験結果を与える．(図 9)(図 10)

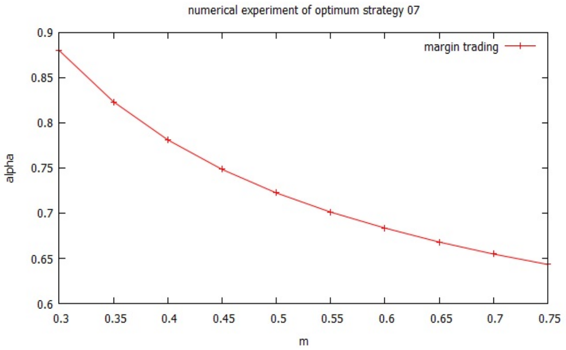


図 9 保証金率 $m$ を変化させた際の最適投資戦略に関する数値実験結果

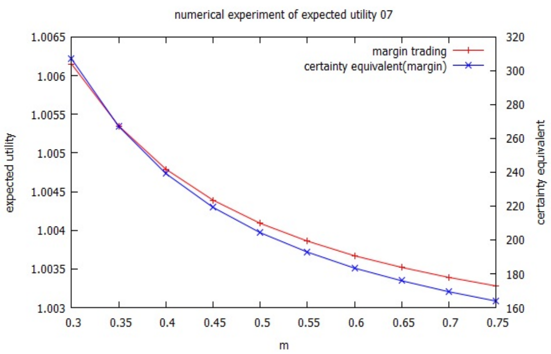


図 10 保証金率 $m$ を変化させた際の期待効用に関する数値実験結果

図 9 は縦軸に $\alpha$，横軸に委託保証金率 $m$ を $0.3 \leq m \leq 0.75$ まで 0.05 単位で変化させた結果である．数値実験の結果から，保証金率が増加することで最適投資戦略は減少していくことが分かる．一方で，同様の数値実験をリスク回避的な効用関数を用いて行った図 2 の結果では，$m$ が増加するほど，投資比率は正に大きくなるという結果を得た．また，図 10 は同様に $m$ を変化させた際の期待効用に関する数値実験結果を示している．第一縦軸は期待効用を表し，第二縦軸は確実等価額を表している．数値実験の結果から，保証金率 $m$ が増加することで期待効用及び確実等価額は急激に小さくなることが分かる．リスク回避的な効用関数での同様の数値実験 (図 6) においても，$m$ が増加することで期待効用が減少していることが分かるが，確実等価額で約 3 程度と，リスク愛好的な場合よりも減少がなだらかである．その理由として考えられるのは，保証金率 $m$ が増加することで，信用取引のポジションに対する自己資本の比率が増し，レバレッジ効果が弱まっていることが要因と考える．同じリターンであればリスクが大きい資産を好むのがリスク愛好的な投資家であり，レバレッジ効果が弱まることが投資比率にも影響したと推考する．そのため，$m = 0.3$ というリスクが非常に高い状況において，リスク愛好的な場合は約 $\alpha = 0.88$ もの大きな正の投資比率において，最も高い効用を示している．

## 6. おわりに

本研究では信用取引の制度を考慮したうえで，信用取引のモデル化及び期待効用の最大化を行った．効用関数としてはリスク回避的な投資家及びリスク愛好的な投資家の効用関数を扱った．モデル化においては，信用取引において広く知られている見解を具体的な数値として得ることが出来ている．期待効用最大化問題に関しては，全体的に信用取引を用いた場合の期待効用が現物取引の期待効用を上回る結果を得た．これは，レバレッジ効果により取引結果の幅が広がったためと考える．また，各パラメータが期待効用に与える影響についても数値計算結果を示すことが出来た．特に，信用取引と現物取引の差に関して特徴を良く示せている．また，数値実験において，リスク愛好的な効用関数を用いた場合，保証金率 $m$ 以外ではリスク回避的な場合と同じ傾向が見られた．

今後の課題としては 2 点を挙げる．まず，本研究では追証の発生を明確に理解するために，リスク資産に二項モデルを仮定したが，Black-Scholes モデル等の連続型のモデルに対しても同様の評価を行いたい．次に，本研究では取引コストの点から静的な投資戦略を採択したが，実際の取引では市場の値動きを見定めてポートフォリオを組み替える，動的な投資戦略が一般的である．今後はこれらの課題を考慮した信用取引のモデル化に取り組みたい．

## 参考文献

1) 東京証券取引所株式部信用取引グループ，信用取引制度の概要，2016 年 1 月更新, http://www.jpx.co.jp/equities/trading/margin/outline/(2016/11/23 アクセス)
2) 日本取引所グループ，信用取引に係る委託保証金の率の引上げ措置等に関するガイドライン，2017 年 2 月 1 日改定, http://www.jpx.co.jp/rules-participants/rules/doc/agreement/(2017/02/01 アクセス)
3) 日本取引所グループ，日々公表銘柄の指定等に関するガイドライン，2017 年 2 月 1 日改定, http://www.jpx.co.jp/rules-participants/rules/doc/agreement/(2017/02/01 アクセス)
4) みずほ証券 : 信用取引のご案内，https://www.mizuho-sc.com/product/stock/shinyou_info.html (2016/5/24 アクセス).
5) O. Bardou, N. Frikha, G. Pagès, Computing VaR and CVaR using Stochastic Approximation and Adaptive Unconstrained Importance Sampling, Monte Carlo Methods Apr.,15(3), pp.173-pp210, 2009.
6) C. Graham, D. Talay, Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp.213-pp230, 2013.