

# フィルタリングを用いたデフォルト強度の推定精度

蛇口, 紘史 / HEBIGUCHI, Hirofumi

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

58

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2017-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00014365>

# フィルタリングを用いたデフォルト強度の推定精度

## ESTIMATION ACCURACY OF DEFAULT INTENSITIES IN FILTERING

蛇口 紘史

Hirofumi HEBIGUCHI

指導教員 安田 和弘

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

The purpose of this paper is to evaluate estimation accuracy of default intensities through filtering approach under the reduced-form for defaults. Default intensities are driven by unobservable factor processes, and the observable data are constructed by the information set of default state and credit derivative price or credit spread which are driven by the factor process as same as those of default intensities. As the factor process we adopt FS model which was proposed by Frey and Schmidt (2011) and follows a stochastic differential equation driven by a Markov chain. Under this framework, we analytically and numerically discuss effects on default intensity estimation from time discretization and parameter estimation errors of FS model.

**Key Words** : *Stochastic Filter, Time discretization errors, Default intensity estimation, Propagation of errors, Frey and Schmidt model .*

### 1. 序論

本研究はクレジットデリバティブに対する誘導型モデルにおける、デフォルト強度の推定を目的とするものである。

Frey, Runggaldier [12] で、流通市場から得られる、参照体のノイズを含んだクレジットデリバティブの価値またはスプレッドの情報と、デフォルトの情報の二つを用いた連続時間のフィルタリングによるデフォルト強度の推定手法が提案された。そこではデフォルト強度は観測不可能なマルコフ過程に依存しており、ノイズを含んだ観測過程の情報がマルコフ過程の変換された値であるとしている。このような隠れマルコフと呼ばれる不完全な情報を用いたフィルタリング問題は、数理ファイナンスの分野でも応用され注目を浴びているが、[12] ではデフォルト強度のファクタ過程に Frey, Schmidt (FS) [11] で提案された FS モデルと呼ばれるマルコフ連鎖に依存した確率過程のモデルを用いた。このモデルはファクタ過程自身がフィルタリング問題の解であり、デフォルト強度の伝播についても情報の影響で表すことが可能である。その一方で、このモデルのデータから推定されるパラメータは、その構造から推定誤差が含まれる可能性が高いと考えられる。実際に数値としてデフォルト強度の推定結果を得るにあたり、ファクタ過程のパラメータの推定誤差がどの程度フィルタリングによる推定結果に影響を及ぼすかは重要でありしばしば研究対象となるが、この FS モデルについては先行研究では触れられていない。

そこで本研究では [12] で提案されたデフォルト強度の推定方法において、パラメータの推定誤差がフィルタリングを用いた推定結果に与える影響について考察する。また本研究のフィルタリングによる推定量は一般的に確率偏微分方程式

に従うことが知られており、解析解が求まることは稀である。そこで数値的に推定量を求めることに伴い生じる、ファクタ過程の時間の離散化がフィルタリングを用いた推定結果に与える影響についても考える。

特に本論文の解析的な分析に関し、デフォルト強度の推定誤差の分析はファクタ過程の推定誤差の分析に帰着する。つまり確率微分方程式である FS モデルの観測過程に対するフィルタリングの解について誤差を考えることになる。この FS モデルと呼んでいるファクタ過程は Wonham [15] の Wonham フィルタに補正ジャンプ過程の項が加わったモデルとも考えられる。フィルタリングの数値解を得るためには、Kallianpur-Striebel の公式を用いて Kushner-Stratonovich(KS) 方程式から Zakai 方程式と呼ばれる線形確率偏微分方程式に変形し、そこから粒子フィルタを用いるのが一般的である。そのため応用的な側面を考えれば、大きく分けてモデルのパラメータ推定、数値計算法による 2 種類の誤差が推定値には含まれる。フィルタリングの理論は確率論の分野の学問であるが、応用的な分野とともに発展してきたという歴史的な背景もありその誤差の解析的な研究も進んでいる。Handel [13] では連続時間のフィルタリングにおける確率微分方程式の誤差などのロバスト性について解析的な結果を述べている。この論文では Wonham フィルタにおける誤差についても調べられている。更に Wonham フィルタによる推定値の誤差に関しては Chigansky et al. [9] 等でも研究されている。また Vaswani [6] ではモデルのパラメータの誤差が粒子フィルタと呼ばれる数値計算を用いた場合における、分布の誤差について解析的に調べている。Kushner-Stratonovich(KS) 方程式に対し粒子フィルタを用いた場合の分布の誤差評価に関しては Crisan et al. [3] や Sarkar et al.[14] などがある。Zakai 方程式の

シミュレーション及びその誤差に関しては, Florchinger et al. [7] や Gobet et al. [4] で研究されている. また Chigansky [8] では 2006 年までのフィルタリングの誤差の結果の調査結果をまとめている. しかしながら本論文のように二つの観測過程に対するフィルタリングや, 補正ジャンプ過程の項が加わっている確率微分方程式を系過程としている場合の誤差評価については, 現段階では得られていない. 更に FS モデルではそのジャンプ過程の強度が系過程に依存している. ゆえに本論文の解析的な結果は十分な新規性のあるものだと考えられる. またここで紹介したフィルタリングの誤差に関わる論文については, その証明にマリアヴァン解析などのテクニックを使用しているものもあるが, 本論文では確率解析における初等的な結果の使用にとどめている.

数値実験に関しては, Frey, Runggaldier [12] で与えられた粒子フィルタによる推定手法をもとに, パラメータの推定誤差の影響をグラフを交えて考察する. また FS モデルに対する時間の離散化の解析的な結果についても数値的な結果と比べて議論する.

## 2. 観測過程

観測過程の詳細は [12] を参照して頂きたい. フィルトレーション付き完備確率空間確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  として,  $\mathcal{F}_t$  は usual condition を満たすとし, 本節の全ての確率過程は  $\mathcal{F}_t$ -適合であるとする. ここで参照体の数を  $m$  としたクレジットポートフォリオを考える. 参照体  $i$  のデフォルト時刻を  $\mathcal{H}_t$ - 停止時刻  $\tau_i$  として,

$$\mathbf{Y} = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,m})_{t \geq 0}, \quad Y_{t,i} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}},$$

とする. ただし  $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathbf{Y}_s : s \leq t)$  とする. つまり観測過程  $\mathbf{Y}$  がデフォルトの情報であり,  $\mathcal{H}_t$ - 適合である. また  $\tau$  の分布に関して次を仮定する.

**仮定 1** (Frey, Schmidt [11] の Assumption 1) 任意の  $t_1, \dots, t_m \geq 0$  に対し, 次の式を満たす関数  $\lambda_i : S^{\mathbf{P}} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $i = 1, \dots, m$  が存在する.

$$P(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_m > t_m | \mathcal{F}_\infty^{\mathbf{P}}) = \prod_{i=1}^m \exp\left(-\int_0^{t_i} \lambda_i(\mathbf{p}_s) ds\right).$$

ここで  $\lambda_i(\mathbf{p}_t)$  は参照体  $i$  のデフォルト強度のシグナルであり,  $\mathcal{F}_t$ - 適合である. また  $S^{\mathbf{P}}$  を  $\mathbf{p}$  の状態空間とし,  $\mathcal{F}_s^{\mathbf{P}} = \sigma(\mathbf{p}_s, s \leq t)$  とする.  $\mathbf{Z}$  は前述した市場から得られる観測過程であり, 次の確率過程で与えられるとする.

$$d\mathbf{Z}_t = \mathbf{a}_t(\mathbf{p}_t)dt + v d\beta_t.$$

ここで  $\beta$  は  $l$  次元  $\mathcal{F}_t$ - ブラウン運動でファクタ過程  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$ ,  $\mathbf{Y}$  と独立である. 更に  $v$  は  $l \times l$  の定数行列で, 任意の  $t$  に対して  $\mathbf{a}_t : \Omega \times S^{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}^l$  は  $\mathcal{H}_t$ - 可測で連続かつ有界である. 実際の観測値は離散時間  $t_k = k\Delta$  にノイズ  $\varepsilon$  を含んだ  $\mathbf{z}_{t_k} = \mathbf{a}_t(\mathbf{p}_{t_k}) + \varepsilon_{t_k}$  として観測される. ここで  $(\varepsilon_{t_k})$  は平均 0, 共分散行列を  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$  の i.i.d. な  $\mathbb{R}^l$  値確率ベクトルであり,  $\mathbf{p}$  と独立である. そこでスケールを変えた  $Z_t^\Delta := \Delta \sum_{t_k \leq t} \mathbf{Z}_{t_k}$  が  $\Delta$  を小さくしたときにドンスカーの不変原理から  $\mathbf{Z}$  に近似されるということである.  $\mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}} = \sigma(\mathbf{Z}_s : s \leq t)$  とした時,

$\mathcal{F}_t^I = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}} \subset \mathcal{F}_t$  と表す. よってデフォルト強度の推定量は次の式で表される.

$$\pi_t \lambda := E[\lambda(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I],$$

$$\lambda(\mathbf{p}_t) = \sum_{i=1}^m (1 - Y_{t,i}) \lambda_i(\mathbf{p}).$$

この推定量は  $E[|\lambda(\mathbf{p}_t) - z|^2]$  を最小にする  $\mathcal{F}_t^I$ - 可測な  $L^2$  確率変数  $z$  であり, 一般に  $\lambda(\mathbf{p}_t)$  の非線形フィルタと呼ばれる. この推定量を求めることが本研究の目的の一つである

## 3. FS モデルとデフォルト強度

ここで FS モデルについて述べる. 詳細については [12], [11] で与えられている. 確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P)$  とする.  $\mathcal{F}_t$ - 適合な観測過程  $U_t$  を次の式で与える.

$$U_t = \int_0^t \alpha(\Psi_s) ds + B_t.$$

ここで  $B_t$  は  $\tilde{\mathcal{F}}_t$ - ブラウン運動で,  $\Psi, Y$  と独立であり, 状態空間を  $S^\Psi = \{1, \dots, K\}$  とするマルコフ連鎖  $\Psi$  は経済の状況を表している. この観測過程  $U_t$  に対するフィルタリングの解  $\mathbf{p} = (p_t^1, \dots, p_t^K)_{t \geq 0}$ ,  $p_t^k = P(\Psi_t = k | \mathcal{F}_t)$ ,  $1 \leq k \leq K$ , が FS モデルにおけるファクタ過程であり次の確率微分方程式に従う.

$$dp_t^k = \sum_{i=1}^K Q_{i,k}^\Psi p_t^i dt + \sum_{i=1}^m \gamma_i^k(\mathbf{p}_{t-}) dM_{t,i} + \delta^k(\mathbf{p}_{t-}) dW_t. \quad (1)$$

ここで  $W_t$  は  $\mathcal{F}_t$ - イノベーションブラウン運動,  $Q^\Psi$  は  $\Psi$  の生成行列,  $\nu_i(\Psi_t)$  は  $\tilde{\mathcal{F}}_t$ - デフォルト強度であり,

$$\gamma_j^k(\mathbf{p}) = p^k \left( \frac{\nu_j(k)}{\sum_{n=1}^K \nu_j(n) p^n} - 1 \right),$$

$$\delta^k(\mathbf{p}) = p^k \left( \alpha(k) - \sum_{n=1}^K p^n \alpha(n) \right),$$

$$M_{t,j} = Y_{t,j} - \int_0^t (1 - Y_{s,j}) \lambda_j(\mathbf{p}_s) dt.$$

また  $\nu_i(\cdot), \alpha(\cdot)$  は既知な関数とし, デフォルト強度のシグナル過程は次の式で表すことができる.

$$E[\nu_i(\Psi) | \mathcal{F}_t] = \sum_{k=1}^K \nu_i(k) p_t^k =: \lambda_i(\mathbf{p}_t).$$

ただし観測過程  $U_t$  は実際には観測できないため, 観測過程  $\mathbf{Z}_t$  による  $\mathcal{F}_t^I$  の下でのデフォルト強度の推定を考える. ここでパラメータ推定誤差を含んだファクタ過程を  $\mathbf{p}_t^\varepsilon$  とする. その時デフォルト強度の推定量及び, パラメータ推定誤差を含んだファクタ過程によるデフォルト強度の推定量を次の式で表す.

$$\pi_t \lambda_i = E[\lambda_i(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I] = \sum_{k=1}^K \nu_i(k) E[p_t^k | \mathcal{F}_t^I],$$

$$\pi_t \lambda_i^\varepsilon = E[\lambda_i^\varepsilon(\mathbf{p}_t^\varepsilon) | \mathcal{F}_t^I] = \sum_{k=1}^K \nu_i^\varepsilon(k) E[p_t^{k,\varepsilon} | \mathcal{F}_t^I].$$

したがってデフォルト強度の推定はファクタ過程  $\mathbf{p}$  の推定に帰着する.

#### 4. 粒子フィルタ

このフィルタリング問題に代表されるような確率偏微分方程式に従う推定量については、確立した数値計算手法はまだ十分に得られておらず研究が継続している分野である。そこで今回のモデルに対してフィルタリングの推定値を得るための手法として、ここでは [12] で紹介された粒子フィルタを用いる。粒子フィルタは観測過程に基づく隠れたファクタ過程の状態を多数の粒子から逐次的に近似し推定量を得る方法で広く知られており、尤度が重要な役割を果たす。

まず初めに [12] で求められた粒子フィルタの尤度を示していく。デフォルト時刻の順番を  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m$  とする。  $t + T_{n-1} \in [T_{n-1}, T_n)$  の場合の  $\mathbf{p}, \mathbf{Y}$  について次の式で定義する。

$$\bar{\mathbf{p}}_t = \mathbf{p}_{t+T_{n-1}}, \quad \bar{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{Y}_{t+T_{n-1}}, \quad T_{n-1} \leq t + T_{n-1} < T_n.$$

ここで粒子の数を  $1 \leq i \leq b$ , 時間の離散化の幅を  $\Delta = t_{k+1} - t_k$ ,  $0 \leq k \leq N-1$  とする。ただし  $T$  を満期とし、  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  とする。Frey, Runggaldier [12] の Theorem3.1 より、  $(t_k, t_{k+1})$  の間にデフォルトが起っていない場合の尤度  $L^i$  は次の式で表される。

$$L^i := \exp \left\{ - \int_0^\Delta \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{p}}_s^i, \mathbf{Y}_{t_k}) ds + \int_0^\Delta \mathbf{a}_{t_k+s}^\top(\bar{\mathbf{p}}_s^i) \Sigma_{\mathbf{Z}}^{-1} d\mathbf{Z}_{t_k+s} - \frac{1}{2} \int_0^\Delta \|\mathbf{a}_{t_k+s}(\bar{\mathbf{p}}_s^i)\|_{\Sigma_{\mathbf{Z}}^{-1}}^2 ds \right\}.$$

ただし

$$\Sigma_{\mathbf{Z}}^{-1} := (vv^\top)^{-1}, \quad \|\mathbf{a}\|_{\Sigma_{\mathbf{Z}}^{-1}}^2 := \mathbf{a}' \Sigma_{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{a},$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^m (1 - y_i) \lambda_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}).$$

更に Frey, Runggaldier [12] の Theorem3.4 より、  $(t_k, t_{k+1})$  の間にデフォルトが起きた場合の尤度  $\tilde{L}^i$  は次の式で表される。

$$\tilde{L}^i = L^i \lambda_\xi(\mathbf{p}^i).$$

ただし  $\xi$  はデフォルトした参照体とする。よってフィルタリングによるデフォルト強度の推定値は、Kallianpur-Striebel(ベイズ)の公式などを使い、既に紹介した尤度を用いることで次の式に近似される。(Frey, Runggaldier[12] の 3 節及び 4 節)

$$E[\lambda(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I] = \frac{E^{R_0}[\lambda(\mathbf{p}_t) N_t | \mathcal{F}_t^I]}{E^{R_0}[N_t | \mathcal{F}_t^I]} \\ \approx \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda(p_{t,i}) \Lambda_t^i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_t^i} \\ = \sum_{i=1}^n \lambda(p_{t,i}) \frac{\Lambda_t^i}{\sum_{i=1}^n \Lambda_t^i}.$$

ただし確率測度  $R_0$  の下で  $Z_t$  はブラウン運動、  $N_t$  は測度変換によるラドン・ニコディム微分であり、詳細は本論文の 4 節で与える。また

$$\Lambda_t^i = \begin{cases} \tilde{L}_t^i & t = \tau_j, \quad 1 \leq j \leq m, \\ L_t^i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次に粒子フィルタを用いたアルゴリズムを紹介する。アルゴリズムは [12] を参照しているが、リサンプリングの部分を省

略し片山 [1] で紹介されているガウシアン粒子フィルタと呼ばれる手法を用いた。片山 [1] ではガウシアン粒子フィルタはアンサンブルカルマンフィルタと粒子フィルタの中間に位置する手法であると述べられている。

#### アルゴリズム 1

1. 初期値  $\{\mathbf{p}_0^1, \dots, \mathbf{p}_0^b\}$  を与える。
2. (時間更新ステップ) 式 (1) に従って粒子  $\{\mathbf{p}_{t_k}^1, \dots, \mathbf{p}_{t_k}^b\}$  を始点  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{t_k}$  として更新する。ただし式 (1) の近似にはオイラー・丸山近似を用いる。
3. (観測更新ステップ, no default)  $(t_k, t_{k+1})$  の間にデフォルトがなければ、観測された  $\mathbf{Z}$  をもとに、  $1 \leq i \leq b$  に対し重み  $L^i$  を与える。ただし確率積分の項はオイラー・丸山近似を用いる。そこで濾波推定値を次の式で求める。

$$E[\mathbf{p}_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_{k+1}}^I] = \frac{\sum_{i=1}^b L^i \bar{\mathbf{p}}_{t_{k+1}}^i}{\sum_{i=1}^b L^i}.$$

更に濾波粒子  $\mathbf{p}_{t_{k+1}} = (\mathbf{p}_{t_{k+1}}^1, \dots, \mathbf{p}_{t_{k+1}}^b)$  を次の式に基づき生成する。

$$\mathbf{p}_{t_{k+1}}^i = E[\mathbf{p}_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_{k+1}}^I] + \sqrt{V_{t_{k+1}}} \varsigma_i.$$

ただし  $\varsigma_i$  は  $N(0, I_n)$  に従う白色ノイズベクトルであり、濾波推定誤差共分散行列  $V_{t_k}$  は次の式を満たす。

$$V_{t_k} = \frac{\sum_{i=1}^b L^i \mathbf{X}_{t_{k+1}} \mathbf{X}_{t_{k+1}}^\top}{\sum_{i=1}^b L^i}.$$

ここで  $\mathbf{X}_{t_{k+1}} = \mathbf{p}_{t_{k+1}}^i - E[\mathbf{p}_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_{k+1}}^I]$  である。

4. (観測更新ステップ, default)  $(t_k, t_{k+1})$  の間にデフォルトが起これば、  $\tilde{L}^i = L^i \lambda_\xi(\mathbf{p}^i)$  としてステップ 3 と同様に計算する。ただし  $\xi$  はデフォルトした参照体とする。

**注意 1** ここではファクタ過程のフィルタが  $\sum_{i=1}^K E[\mathbf{p}^i | \mathcal{F}_t^I] = 1$  を満たすように  $E[\mathbf{p}^K | \mathcal{F}_t^I] = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} E[\mathbf{p}^i | \mathcal{F}_t^I]$  とする。

#### 5. 解析的考察

この節で誤差に関わる解析的な結果を記す。証明に関しては本論文にて与え、ここでは省略することとする。デフォルト強度の推定値の誤差評価を行うために、ファクタ過程のフィルタリングの解を確率微分方程式で表現する。Lemma 3.2 (Frey, Schmidt [11]) と Theorem3.3 (Frey, Schmidt [11]) から次の結果が得られる

**命題 1**  $1 \leq k \leq K$  に対し  $P(\Psi_t = k | \mathcal{F}_t^I) = \hat{p}_t^k$  は次の確率微分方程式で表現できる。

$$d\hat{p}_t^k = \sum_{i=1}^K Q_{i,k}^\Psi \hat{p}_t^i dt + \sum_{i=1}^m \gamma_i^k(\hat{\mathbf{p}}_{t-}) d\widehat{M}_{t,i} + \delta^k(\hat{\mathbf{p}}_{t-}) dm_t^Z. \quad (2)$$

ここで  $m_t^Z = \frac{1}{v}(Z_t - \int_0^t \widehat{a}_s ds)$  は  $\{\mathcal{F}_t^I\}$ - ブラウン運動であり

$$\gamma_i(\widehat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{(\widehat{\lambda}_i)_{t-}} ((\widehat{\mathbf{p}}_t \widehat{\lambda}_i)_{t-} - \widehat{\mathbf{p}}_{t-} (\widehat{\lambda}_i)_{t-} + (R_i(\cdot) \widehat{\lambda}_i)_{t-}), \quad (3)$$

$$R_i(\cdot) = \mathbf{p}_{\tau_i} - \mathbf{p}_{\tau_i-}, \quad (4)$$

$$\delta(\widehat{\mathbf{p}}) = (\widehat{\mathbf{p}}_t \widehat{a})_t - \widehat{\mathbf{p}}_t (\widehat{a})_t, \quad (5)$$

$$\widehat{M}_{t,j} = Y_{t,j} - \int_0^t (1 - Y_{s,j}) \widehat{\lambda}_j(\widehat{\mathbf{p}}_s) dt. \quad (6)$$

ただし,  $\gamma_i(\widehat{\mathbf{p}}) = \gamma_i(\widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$  とする. さて, ここから  $1 \leq k \leq K$  に対し  $E[f(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I]$  の確率微分方程式を簡略化のため次の式で表すこととする.

$$d\widehat{\mathbf{p}}_t^k = A^k(\widehat{\mathbf{p}}_t) dt + \sum_{i=1}^m \gamma_i^k(\widehat{\mathbf{p}}_t) d\widehat{M}_{t,i} + \delta^k(\widehat{\mathbf{p}}_t) dm_t^Z. \quad (7)$$

ここで解析的な結果を得るために次に仮定する.

**仮定 2** 関数  $\mathbf{a}(\cdot) : S^{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbb{R}^l, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in [0, 1]^K$  かつ  $\sum_{k=1}^K p_{i,k} = 1, i = 1, 2$  に対して, 次を満たす定数  $C > 0$  が存在する.

$$|\mathbf{a}(\mathbf{p}_1) - \mathbf{a}(\mathbf{p}_2)| \leq C|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|.$$

**仮定 3** 関数  $\mathbf{a}(\cdot) : S^{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbb{R}^l, \mathbf{p} \in [0, 1]^K$  かつ  $\sum_{k=1}^K p_k = 1$  に対して, 次を満たす  $C > 0$  が存在する.

$$|\mathbf{a}(\mathbf{p})| \leq C.$$

次の数学的条件が Frey, Schmidt[11] と Frey, Runggaldier[12] による推定手法の下で満たされる.

**補題 1**  $\mathbf{p} \in [0, 1]^K$  かつ  $\sum_{k=1}^K p_k = 1$  に対して, 次を満たす定数  $C > 0$  が存在する.

$$|\lambda(\mathbf{p})| \leq C,$$

$$|A(\mathbf{p})| \leq C,$$

$$|\gamma_i(\mathbf{p})| \leq C,$$

$$|\delta(\mathbf{p})| \leq C.$$

**補題 2** (リプシッツ条件, 増大度条件)  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in [0, 1]^K$  かつ  $\sum_{k=1}^K p_{i,k} = 1, i = 1, 2$  に対して, 次を満たす定数  $C > 0$  が存在する.

$$|A(\mathbf{p}_1) - A(\mathbf{p}_2)| + |\delta(\mathbf{p}_1) - \delta(\mathbf{p}_2)| \leq C|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|,$$

$$|A(\mathbf{p}_1)| + |\delta(\mathbf{p}_1)| \leq C(1 + |\mathbf{p}_1|),$$

$$|\gamma_i(\mathbf{p}_1) - \gamma_i(\mathbf{p}_2)| \leq C|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|,$$

$$|\gamma_i(\mathbf{p}_1)| \leq C(1 + |\mathbf{p}_1|).$$

### (1) 時間の離散化が与える誤差

連続時間でのデフォルト強度の推定手法を考えていたが, 観測できる情報は実際には離散的に得られる. またファクタ過程についても解析解は求まらないため, 粒子フィルタによる数値計算を用いる際に離散近似する必要がある. そこでここでは Euler・丸山近似を用いてファクタ過程を離散近似した場合の, 確率微分方程式の近似定理を求め, 時間の離散化幅  $\Delta$  がデフォルト強度の推定に与える影響について考える.

$\phi_t = \sup\{t_k; t_k \leq t\}$  を用いて Euler・丸山近似によるファクタ過程を次の式で表す.

$$\widehat{p}_t^\Delta = p_0 + \int_0^t A(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta) ds + \int_0^t \gamma(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta) d\widehat{M}_{s,i}^\Delta + \int_0^t \delta(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta) dm_s^Z.$$

また  $1 \leq i \leq K$  に対し, Euler・丸山近似によるデフォルトインディケータ過程を  $Y_{t,i}^\Delta = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq [\frac{t}{\Delta}] \Delta\}}$  とする. ただし  $[\cdot]$  を  $\cdot$  の整数部分とする. この時, ファクタ過程と Euler・丸山近似によるファクタ過程の差は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \widehat{p}_t - \widehat{p}_t^\Delta &= \int_0^t \{A(\widehat{\mathbf{p}}_s) - A(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta)\} ds \\ &\quad + \int_0^t \{\gamma(\widehat{\mathbf{p}}_s) d\widehat{M}_{s,i} - \gamma(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta) d\widehat{M}_{s,i}^\Delta\} \\ &\quad + \int_0^t \{\delta(\widehat{\mathbf{p}}_{s-}) - \delta(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta)\} dm_s^Z \\ &= \widetilde{A}_t + \widetilde{M}_t. \end{aligned}$$

ただし

$$\widetilde{A}_t = \int_0^t \{A(\widehat{\mathbf{p}}_s) - A(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta)\} ds,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_t &= \int_0^t \{\gamma(\widehat{\mathbf{p}}_s) d\widehat{M}_{s,i} - \gamma(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta) d\widehat{M}_{s,i}^\Delta\} \\ &\quad + \int_0^t \{\delta(\widehat{\mathbf{p}}_{s-}) - \delta(\widehat{\mathbf{p}}_{\phi_s}^\Delta)\} dm_s^Z \end{aligned}$$

とする. この時, 次の補題が得られる.

**補題 3** 次の式を満たす定数  $C > 0$  が存在する.

$$E \left[ \int_0^T |\widehat{p}_s^\Delta - \widehat{p}_{\phi_s}^\Delta|^2 ds \right] \leq C\Delta. \quad (8)$$

**補題 4** 任意の  $s \in [0, T], 1 \leq i \leq m$  に対して次の式を満たす定数  $C > 0$  が存在する.

$$E[|Y_{s,i} - Y_{s,i}^\Delta|^2] \leq C\Delta. \quad (9)$$

これらの補題から次の定理が得られる.

**定理 1** 次の式を満たす正の定数  $C$  が存在する.

$$E \left[ \sup_{0 < t \leq T} |\widehat{p}_t - \widehat{p}_t^\Delta|^2 \right] \leq C\Delta e^{CT} = C\Delta. \quad (10)$$

この定理は確率微分方程式  $\widehat{\mathbf{p}}_t$  のオイラー・丸山近似  $\widehat{\mathbf{p}}_t^\Delta$  が  $\frac{1}{2}$  次の強近似であることを意味する. またデフォルト強度の推定に関し次の結果が得られる.

**定理 2** 次の式を満たす正の定数  $C$  が存在する.

$$E \left[ \sup_{0 < t \leq T} |\lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t^\Delta)|^2 \right] \leq C\Delta. \quad (11)$$

更に, これらの結果から次が導き出される.

**系 1**  $t \in [0, T]$  に対し次を満たす定数  $C$  が存在する.

$$E[|\widehat{p}_t - \widehat{p}_t^\Delta|^2] \leq C\Delta, \quad (12)$$

$$E[|\lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t^\Delta)|^2] \leq C\Delta, \quad (13)$$

$$E \left[ \int_0^T |\widehat{p}_t - \widehat{p}_t^\Delta|^2 dt \right] \leq C\Delta, \quad (14)$$

$$E \left[ \int_0^T |\lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t^\Delta)|^2 dt \right] \leq C\Delta, \quad (15)$$

$$|E[\widehat{p}_t] - E[\widehat{p}_t^\Delta]| \leq C\Delta, \quad (16)$$

$$|E[\lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t)] - E[\lambda(\widehat{\mathbf{p}}_t^\Delta)]| \leq C\Delta. \quad (17)$$

## (2) FS モデルのパラメータ推定誤差が与える影響

ここでは FS モデルにおける、マルコフ連鎖の生成行列が推定誤差を含んだ場合の結果を示す。マルコフ連鎖の生成行列が推定誤差を含んでいる場合のファクタ過程のフィルタリングの解を次の確率微分方程式で表すとす。

$$\begin{aligned} \hat{p}_t^{k,\epsilon\Psi} = & p_0^k + \int_0^t A^{k,\epsilon\Psi}(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi}) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t \gamma_i^k(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi}) d\widehat{M}_{s,i}^{\epsilon\Psi} \\ & + \int_0^t \delta^k(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi}) dm_s^Z. \end{aligned} \quad (18)$$

ただし

$$\begin{aligned} A^{k,\epsilon\Psi}(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi}) = & \sum_{i=1}^K Q_{i,k}^{\Psi,\epsilon,\Delta} p_s^{i,\epsilon\Psi}, \\ \widehat{M}_{s,i}^{\epsilon\Psi} = & Y_{\{\tau_i \leq t\}} - \int_0^t (1 - Y_{\{\tau_i \leq s\}}) \lambda_i(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi}) ds. \end{aligned}$$

この時  $\hat{p}_t^k - \hat{p}_t^{k,\epsilon\Psi}$  は次の確率微分方程式に従う。

$$\begin{aligned} \hat{p}_t^k - \hat{p}_t^{k,\epsilon\Psi} = & \int_0^t \{A^k(\hat{\mathbf{p}}_s) - A^{k,\epsilon\Psi}(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi})\} ds \\ & + \sum_{i=1}^m \int_0^t \{\gamma_i^k(\hat{\mathbf{p}}_s) d\widehat{M}_{s,i} - \gamma_i^k(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi}) d\widehat{M}_{s,i}^{\epsilon\Psi}\} \\ & + \int_0^t \{\delta^k(\hat{\mathbf{p}}_s) - \delta^k(\hat{\mathbf{p}}_s^{\epsilon\Psi})\} dm_s^Z. \end{aligned}$$

この時、次の結果が得られる。

**命題 2**  $p^{i,*}$  を  $\mathbf{p}^*$  の第  $i$  成分とする。任意の  $t \in [0, T]$ ,  $A, A^{\epsilon\Psi} \in \mathbb{R}^{K \times K}$  に対して、次の式を満たす定数  $C > 0$  が存在する。

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |\hat{p}_t^{\epsilon\Psi} - \hat{p}_t^{\epsilon\Psi}|^2] \leq C|A - A^{\epsilon\Psi}|^2. \quad (19)$$

ただし

$$\begin{aligned} |A - A^{\epsilon\Psi}| = & \sup \left\{ |(A - A^{\epsilon\Psi})\mathbf{p}^*| : \right. \\ & \left. 0 \leq p^{i,*} \leq 1, \sum_{i=1}^K p^{i,*} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

## 6. 数値実験結果と考察

ここでは観測過程  $Z$  を一次元とし、ファクタ過程の誤差を含んだパラメータと、時間の離散化の幅の大きさが推定値に与える影響を考察する。また [12] に従い観測ノイズを定数  $\sigma_\epsilon$  を用いて  $v = \sigma_\epsilon \sqrt{\Delta}$  と設定し、ファクタの初期値は既知としている。各パラメータを表 1 で与える。次にマルコフ連鎖

表 1 Parameters

Parameters	Value
満期	$T = 5(\text{年})$ .
ファクタの次元	$K = 4$ .
参照体数	$m = 100$ .
観測ノイズ	$\sigma_\epsilon = 0.1, \text{ or } 0.3$ .

鎖の生成行列を次の行列で与える。

$$Q^\Psi = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

誤差  $\epsilon_\Psi$  を含んだ生成行列については、生成行列の定義を満たすような次の行列を用いる。

$$\hat{Q}^\Psi = \begin{bmatrix} -0.5 - \epsilon_\Psi & 0.5 + \epsilon_\Psi & 0 & 0 \\ 0.2 + \epsilon_\Psi & -0.5 - 2\epsilon_\Psi & 0.3 + \epsilon_\Psi & 0 \\ 0 & 0.3 + \epsilon_\Psi & -0.5 - 2\epsilon_\Psi & 0.2 + \epsilon_\Psi \\ 0 & 0 & 0.5 + \epsilon_\Psi & -0.5 - \epsilon_\Psi \end{bmatrix}.$$

また誤差を含んだデフォルト強度のパラメータは、誤差を  $\epsilon_\nu$  として  $\nu_i'(k) = \nu_i(k) + \epsilon_\nu$  として表す。フィルタリングの推定誤差を平均二乗誤差を次の尺度で評価する。

$$MISE^s = E \left[ \int_0^T (\lambda(\mathbf{p}_t) - \pi_t \lambda)^2 dt \right], \quad (20)$$

$$MISE^\epsilon = E \left[ \int_0^T (\pi_t \lambda - \pi_t \lambda^\epsilon)^2 dt \right], \quad (21)$$

$$MISE^{s,\epsilon} = E \left[ \int_0^T (\lambda(\mathbf{p}_t) - \pi_t \lambda^\epsilon)^2 dt \right], \quad (22)$$

$$MISE^\Delta = E \left[ \int_0^T (\pi_t \lambda - \pi_t \lambda^\Delta)^2 dt \right], \quad (23)$$

$$MISE^{\epsilon,\Delta} = E \left[ \int_0^T (\pi_t \lambda^\epsilon - \pi_t \lambda^{\epsilon,\Delta})^2 dt \right], \quad (24)$$

$$MSSE^\Delta = E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} (\pi_t \lambda - \pi_t \lambda^\Delta)^2 \right], \quad (25)$$

$$MSSE^{\epsilon,\Delta} = E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} (\pi_t \lambda^\epsilon - \pi_t \lambda^{\epsilon,\Delta})^2 \right]. \quad (26)$$

これらの尺度に  $R$  がついた場合は平方根を表し、 $M$  がない場合は期待値をとっていないものとする。また  $\pi_t \lambda^\Delta$  は時間の刻み幅を  $\Delta$  とした、オイラー・丸山近似によるファクタ過程  $\hat{p}^\Delta$  から得られるデフォルト強度の推定量であり、 $\pi_t \lambda^{\epsilon,\Delta}$  はパラメータが誤差を含んだ場合のオイラー・丸山近似によるファクタ過程  $\hat{p}^{\epsilon,\Delta}$  から得られるデフォルト強度の推定量である。これらの推定量はそれぞれ次の式で表される。

$$\pi_t \lambda^\Delta := E[\lambda_i(\mathbf{p}_t^\Delta) | \mathcal{F}_t^I] = \sum_{k=1}^K \nu(k) \hat{p}_t^{k,\Delta},$$

$$\pi_t \lambda^{\epsilon,\Delta} := E[\lambda_i^\epsilon(\mathbf{p}_t^{\epsilon,\Delta}) | \mathcal{F}_t^I] = \sum_{k=1}^K \nu^\epsilon(k) \hat{p}_t^{k,\epsilon,\Delta}.$$

時間に関する積分については  $T = n\Delta$  として数値積分を用いて計算する。尚、時間の離散化の影響の数値計算においてシグナル過程  $\lambda(\mathbf{p}_t)$  及び、デフォルト強度のフィルタリングの解  $\pi_t \lambda$  については解析的な解が求まらないため、本論文で行う数値計算で用いる最小離散化時間間隔  $\Delta^{min} = 0.002$  による数値結果を用いることとする。

図 1 から図 4 では対数のスケールで  $\Delta$  がデフォルト強度に及ぼす影響を示している。  $f(\Delta) \leq C\Delta$  とした場合次のことが示せる。

$$\log \sqrt{f(\Delta)} \leq \log \sqrt{C\Delta} = \frac{1}{2} \log C - \frac{1}{2} \log \frac{1}{\Delta}.$$

よって数値結果の  $\log \sqrt{f(\Delta)}$  のグラフの傾きが  $-\frac{1}{2}$  より大きければ 5 節の理論的な結果より誤差のオーダーが悪くな

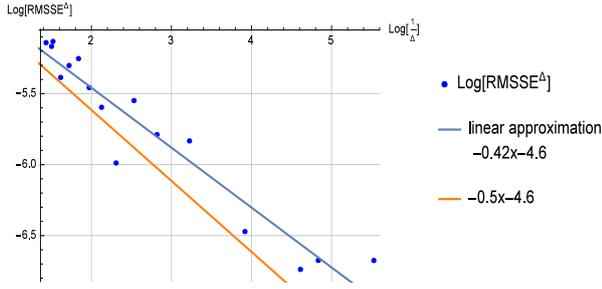


図 1  $\Delta$  に対する  $RMSSE^\Delta$  の変化.  $\sigma_\epsilon = 0.3$ .

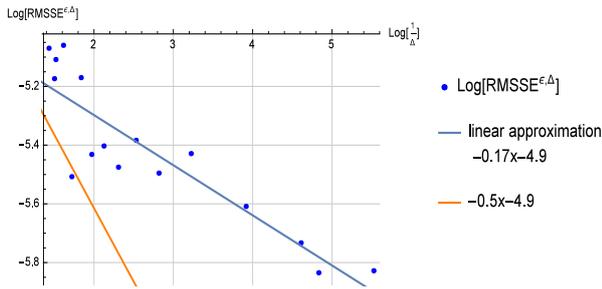


図 2  $\Delta$  に対する  $RMSSE^{\epsilon, \Delta}$  の変化.  $\sigma_\epsilon = 0.3, \epsilon_\nu = 0.01, \epsilon_q = 1$ .

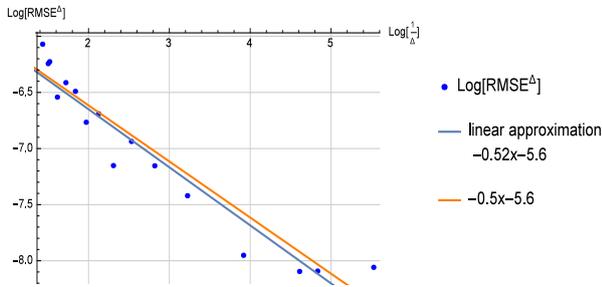


図 3  $\Delta$  に対する  $RMSSE^\Delta$  の変化.  $\sigma_\epsilon = 0.3$ .

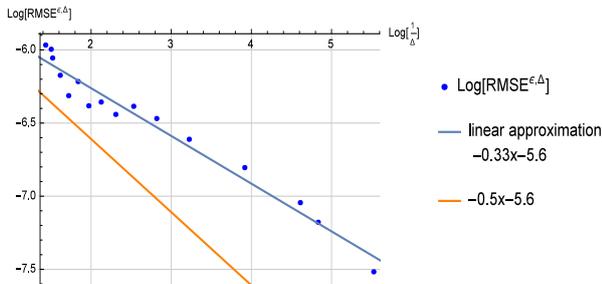


図 4  $\Delta$  に対する  $RMSSE^{\epsilon, \Delta}$  の変化.  $\sigma_\epsilon = 0.3, \epsilon_\nu = 0.01, \epsilon_q = 1$ .

り、グラフの傾きが  $-\frac{1}{2}$  より小さければ誤差のオーダーが理論的な結果の範囲内であったと言える。

図 1 から図 4 の結果において、 $\log f(\Delta)$  のグラフの傾きが  $-\frac{1}{2}$  を下回っているのは図 3 における  $RMSSE^\Delta$  のみであり、その他は  $-\frac{1}{2}$  より大きい傾きを取る。これはシミュレーションにおける粒子フィルタのモンテカルロ計算による誤差の影響と考えられる。とくに図 2 と図 4 の結果においては、FS モデルのパラメータの誤差の影響で  $\log f(\Delta)$  のグラフの傾きが、大きい値をとっていると考えられる。また 2 では  $\log RMSSE$  をプロットした点が直線的ではなく、カーブしているようにも見え、収束していくような振る舞いをするようにも感じられる。これは、パラメータに誤差が含まれているために、時間の離散幅を細かくしたところで真値には収束しないことを暗示している。図 3 における  $RMSSE^\Delta$  の結果においては、傾きが  $-\frac{1}{2}$  を下回っているが、わずかな誤差である。また FS モデルにおけるジャンプの影響が、sup による数値的な誤差を理論の結果から遠ざけている原因と考えられ、 $RMSSE$  より積分による  $RMISE$  の方がより解析的な結果に近いものとなった。

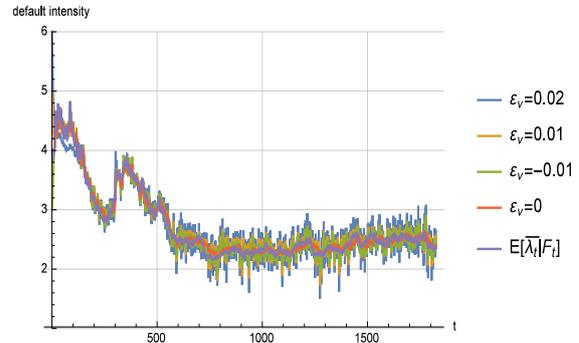


図 5  $\nu$  のみに誤差が含んでいる場合のデフォルト強度。

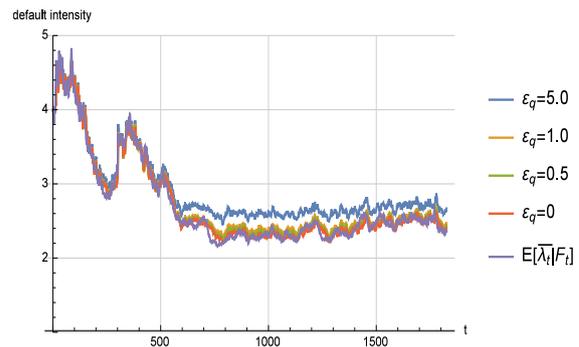


図 6  $Q^\Psi$  のみに誤差が含んでいる場合のデフォルト強度。

ここからファクタ過程のパラメータ推定誤差が及ぼす影響について考察する。ここではクレジットデリバティブに関する情報が日ごとに観測できた場合を想定し、 $\Delta = \frac{1}{365}$  とした。図 7 と図 8 は、それぞれファクタ過程のシグナルとフィルタリングの結果を時系列で表している。これらの結果からデフォルト強度の推定に関して、パラメータに誤差がな場合については良い推定結果が得られた。デフォルトの情報  $\mathbf{Y}$

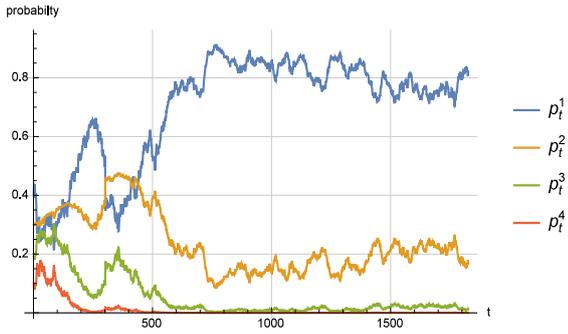


図 7 シグナル  $\mathbf{p}_t$ .

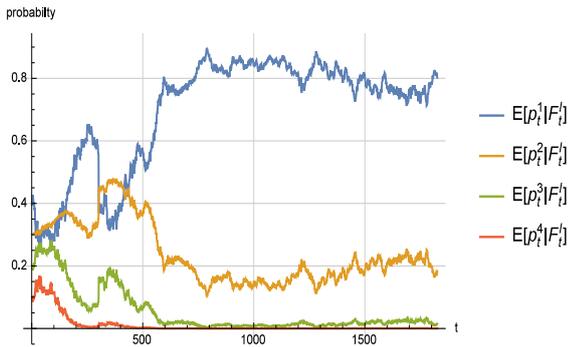


図 8  $E[\mathbf{p}_t | \mathcal{F}_t^I]$ .

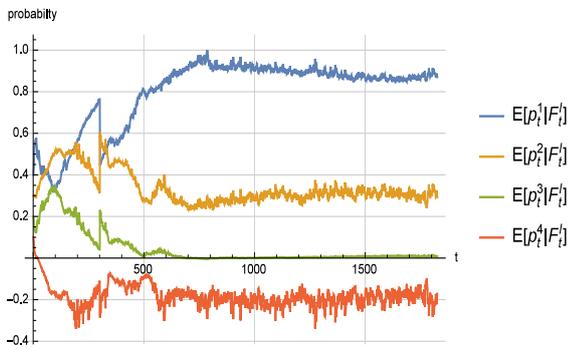


図 9  $E[\hat{\mathbf{p}}_t | \mathcal{F}_t^I]$ ,  $\epsilon_\nu = 0.01$ ,  $\epsilon_q = 0$ .

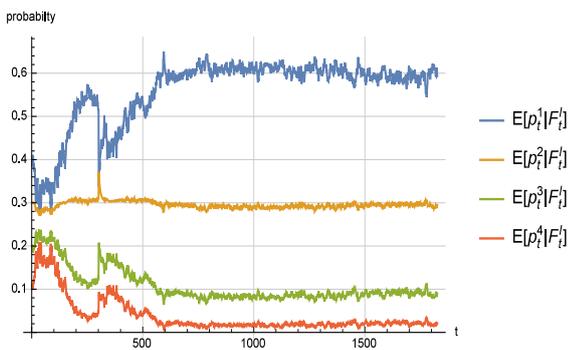


図 10  $E[\hat{\mathbf{p}}_t | \mathcal{F}_t^I]$ ,  $\epsilon_\nu = 0$ ,  $\epsilon_q = 20$ .

を除いた観測過程は 1 次元であり、そこから 4 次元のファクタ過程を推定できた点については十分な結果である。FS モデルのパラメータに誤差が含まれた場合について、デフォルト強度のパラメータ  $\nu_i(k)$  の誤差が大きくなければ、図 5 と図 9 で示した通り観測ノイズを上手く処理できず推定誤差が大きくなるが、軌道がシグナルから逸れる傾向は見受けられなかった。生成行列に誤差が含まれた場合は、誤差が大きくなるにつれ推定値がシグナルから離れていくことが図 6 と図 10 から確認できる。これは生成行列に誤差を含むことにより、 $\mathbf{p}_t$  のドリフト部分の定常分布が変わることによって考えられる。またデフォルト強度のパラメータ  $\nu_i(k)$  と生成行列  $Q^\nu$  の両方に誤差が含まれた場合についても、パラメータ推定誤差が小さければ、推定値が大きくずれることは起こりづらいといえる。しかしながらファクタ過程  $\mathbf{p}$  の推定は上手くできないことが现阶段で分かっている。図 9 はパラメータ  $\nu$  が誤差を含んだ場合のファクタ過程のフィルタリングの結果である。  $\epsilon_\nu = 0.01$  の時、ファクタ  $p_t^4$  は負の値をとっている。これはパラメータ  $\nu$  に誤差が含まれた結果、 $p_t^1, p_t^2, p_t^3$  が上手く推定されなかったために、 $p_t^4 = 1 - (p_t^1 + p_t^2 + p_t^3)$  にし寄せが行ったためであると考えられる。ファクタが負の値を取りうる点がある点がパラメータ  $\nu$  による誤差の特徴であり、このような現象は生成行列に誤差を含んだ場合には見受けられなかった。図 10 は生成行列に誤差を含んだ場合のファクタ過程のフィルタリングの結果である。ここでは  $\epsilon_q = 20$  という極端な場合の結果を示したが、ファクタの推定は上手くいかなくなっている。この現象は生成行列の各成分が大きくなったために、ファクタ過程のフィルタリングの結果が生成行列部分の定常分布に早く近づいているためだと考えられる。ただし誤差を含んだ生成行列部分の定常分布に近づいたところで、ファクタ過程の分布に近づいているわけではないということに注意する必要がある。また生成行列の誤差が  $\epsilon_q = 1$  程度であれば、ファクタ過程に対しても大して影響を及ぼさないことが分かっている。より詳しい数値実験結果については本論で与える。二乗誤差 SE については表 2, 3 から  $ISE_s > ISE_\epsilon$  となる。つまりファクタ過程のパラメータが誤差を含んだことにより、 $E[\hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{p}}_t) | \mathcal{F}_t^I]$  が  $E[\lambda_i(\mathbf{p}_t) | \mathcal{F}_t^I]$  よりシグナルに近くなるといえる。また表 4 から  $MISE^{s,\epsilon}$  は  $MISE^s$  の約 3 倍であることが分かる。つまりデフォルト強度の推定誤差は、パラメータの推定誤差に強く影響を受けることが見て取れる。

表 2  $\epsilon_\nu$  に対する  $ISE$ .

$\epsilon_\nu$	$ISE_s$	$ISE_\epsilon$
-0.01	$1.6 \times 10^{-2}$	$9.3 \times 10^{-3}$
-0.005	$1.0 \times 10^{-2}$	$3.9 \times 10^{-3}$
0	$6.7 \times 10^{-3}$	0
0.005	$1.2 \times 10^{-2}$	$5.0 \times 10^{-3}$
0.01	$2.0 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$
0.02	$4.8 \times 10^{-2}$	$4.1 \times 10^{-2}$

表 3  $\epsilon_\Psi$  に対する  $ISE$ .

$\epsilon_\Psi$	$ISE^s$	$ISE^\epsilon$
0	$6.7 \times 10^{-3}$	0
0.5	$8.0 \times 10^{-3}$	$9.2 \times 10^{-4}$
1	$1.0 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$
5	$5.3 \times 10^{-2}$	$4.4 \times 10^{-2}$
20	$2.9 \times 10^{-1}$	$2.8 \times 10^{-1}$

表 4  $MISE$ .  $\sigma_\epsilon = 0.3, \epsilon_q = 1, \epsilon_\nu = 0.01, \Delta = 0.002$

$MISE^s$	$MISE^\epsilon$	$MISE^{s,\epsilon}$
$7.7 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$

## 7. 結論と今後の展開

本論文はクレジットデリバティブに対する、誘導型モデルのデフォルト強度をフィルタリングによって推定した場合の誤差に関する研究であった。デフォルト強度の解析的な分析に関して、粒子フィルタによる推定誤差の結果までは導くことはできなかった。しかしながら推定値を得るために必要となる、確率微分方程式で表されるファクタ過程の強近似のオーダーを導くことに成功した。またファクタ過程のパラメータの誤差が及ぼす影響に関しても、誤差を生成行列に限定した場合については導くことができた。Frey, Runggaldier [12] と Frey, Schmidt [11] によるフィルタリングによる推定手法が、観測過程が 2 種類でありファクタ過程に補正ジャンプ項が含まれる、ジャンプの強度にファクタ過程が依存するという点で既存のものとは異なるため、これらの結果は意義のあるものであったと考えられる。また数値的な結果に関しては、ファクタ過程のパラメータの誤差が、関数  $\nu$  に含まれるか、生成行列  $Q^\Psi$  に含まれるかによってデフォルト強度の推定値への影響の及ぼし方が異なることが発見できた。時間の離散化が及ぼす数値的な結果については、粒子フィルタによる影響のため、解析的な結果とは若干乖離したと言える。

iTrax japan ではクレジットデリバティブのスプレッドの値が日ごとに得られる。その場合間の離散化の幅は  $\frac{1}{365}$  となる。よって現実的には時間の離散化よりファクタ過程のパラメータの誤差が、よりデフォルト強度の推定に影響を与えたと考えられる。したがって、ファクタ過程のパラメータの推定には十分気を付ける必要がある。また本論文で述べたデフォルト強度の推定値をクレジットデリバティブのプライシングやヘッジの観点で使用するには、デフォルト強度に含まれる誤差を考慮するべきである。

最も重要な今後の課題は、粒子フィルタによる数値計算による誤差を解析的に求めることである。粒子フィルタによる誤差を考える場合には、ギルサノフの定理によって生じるラドン・ニコディム微分が計算を難しくさせる。また本論文において観測過程が 2 種類あることが問題をより一掃複雑化させている。

## 参考文献

1) 片山 徹, 非線形カルマンフィルタ, 朝倉書店, 2011.

- 2) A. Bain, D. Crisan, *Fundamentals of stochastic filtering*, Eds. D. Dawson et al. Vol. 3, New York: Springer, 2009.
- 3) D. Crisan, P. Del Moral, T.J. Lyons, *Interacting Particle Systems Approximation of the Kushner Stratonovitch Equation* Advances in Applied Probability Vol. 31, No. 3, pp.819-838, 1999.
- 4) E. Gobet, G. Pages, H. Pham, J. Printems, *Discretization and simulation of the Zakai equation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 44(6), pp.2505-2538, 2006.
- 5) G. Marion, X. Mao, E. Renshaw, *Convergence of the Euler Scheme for a Class of Stochastic Differential Equation*, International Mathematical Journal, Vol.1, No.1, pp.9-22, 2002.
- 6) N. Vaswani, *Bound on errors in particle filtering with incorrect model assumptions and its implication for change detection*, Acoustics, Speech, and Signal Processing Proceedings, 2004.
- 7) P. Florchinger, F. L. Gland, *Time-discretization of the Zakai equation for diffusion processes observed in correlated noise*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes Vol.35, No.4, pp. 233-256,1991.
- 8) P. Chigansky, *Stability of Nonlinear Filters: A Survey*, Lecture notes, Petropolis, Brazil, 2006.
- 9) P. Baxendale, P. Chigansky, R. Liptser, *Asymptotic stability of the Wonham filter: ergodic and nonergodic signals*, SIAM journal on control and optimization Vol.43, No.2, pp.643-669, 2004.
- 10) R. Frey, A. Gabih, R. Wunderlich, *Portfolio optimization under partial information expert opinions: a dynamic programming approach*, Communications in Stochastic Analysis, Vol.8, No.1, pp.49-79, 2014.
- 11) R. Frey, T. Schmidt, *Pricing and hedging of credit derivatives via the innovations approach to nonlinear filtering*, Finance and Stochastics, Vol.16, No.1, pp.105 -133, 2011.
- 12) R. Frey, W. Runggaldier, *Pricing credit derivatives under incomplete information: a nonlinear-filtering approach*, Finance and Stochastics, Vol.14, No.4, pp.495 - 526, 2010.
- 13) R. van Handel, *Filtering, Stability, and Robustness*, PhD Thesis, California Institute of Technology, 2006.
- 14) S. Sarkar, S. R Chowdhury, M. Venugopal, R. M. Vasu, D. Roy, *A Kushner-Stratonovitch Monte Carlo Filter Applied to Nonlinear Dynamical System Identification*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol.270, pp.46-59, 2014.
- 15) Wonham, W. M. *Some Applications of Stochastic Differential Equations to Optimal Nonlinear Filtering* Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, Vol.2, No.3, pp.347-369, 1964.