

### 変額生命保険のリスク評価

寺井, 賢太 / Terai, Kenta

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

58

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2017-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00014363>

# 変額生命保険のリスク評価

THE RISK MANAGEMENT OF VARIABLE LIFE INSURANCE

寺井 賢太

Kenta TERAJ

指導教員 浦谷規

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

We consider the risk management of variable life insurance, whose amount of death benefit depends on market asset prices. In order to keep enough reserve for policyholders, insurance companies must keep the portfolio value over the certain amount. Traditionally a portfolio mainly consists of fixed income securities, which are national bonds and deposits to risk-free assets. In this study we consider the portfolio with risky assets for variable life insurance, which has become popular among policyholders in the recent economy under the very low interest rate. When we take into account the uncertainty of death, unsystematic risks should be evaluated in the market value of the insurance. Considering the portfolio of insurance reserve, we value the insurance under the market incompleteness due to unsystematic risks. Therefore, we deal with the risk assessment method of Föllmer-Schweizer to define the strategy in the incomplete market. This portfolio policy is used to the variable life insurance under scenario factors such as interest rates, volatility of risky assets, maturity and survival probability. Finally we show the effectiveness of the variable life insurance by simulations.

**Key Words:** risk management, variable life insurance, market incompleteness

## 1 はじめに

変額生は、保険金の額が危険資産により変動する保険である。保険会社は保険契約者に対して保険金を支払うために、保険料の中から一定額以上を必ず積み立てなければならない。一般的には安全資産によって積み立てを行っているが、本研究では危険資産と安全資産のポートフォリオによって行うことができるのかを考える。死亡という不確実性を考慮した非完備な市場におけるポートフォリオについて考えることになる。そこで、非完備な市場において、戦略を定めるために Föllmer-Schweizer のリスク評価法を用いる。この評価方法を用いて、変額生命保険の理論をモデル化し、金利、危険資産のボラティリティ、満期や生存確率等の変動要素を変え、シミュレーションした結果についての考察をする。

## 2 変額生命保険

変額生命保険とは、保険企業が契約時点でお金を受け取り、満期までの間の死亡者に対して危険資産を考慮された

保険金を支払うという保険の仕組みである。 $H_T$  を死亡者に支払うお金の割引価値を

$$H_T = \int_0^T g(t, S_t) B_t^{-1} dN_t,$$

と定義する。 $g(t, S_t)$  は危険資産を含んだ保険金を表す関数で  $N_t$  は契約者数を  $l_x$  としたときの時刻  $t$  までに死亡した人数である。 $N_t$  はインディケータ関数を用いて次のように表す。

$$N_t = \sum_{i=1}^{l_x} \mathbf{1}_{(T_i \leq t)}.$$

$\mathcal{H}_t = \sigma\{N_u, u \leq t\}$  これは保険における情報を表している。瞬間的な死亡人数の期待値は、

$$E[dN_t | \mathcal{H}_{t-}] = (l_x - N_{t-}) \mu_{x+t} dt \equiv \lambda_t dt.$$

$M_t$  は実際の死亡数と期待値の差で  $\mathcal{H}_t$  マルチンゲールであり、次のように表すことができる。

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_u du.$$

戦略  $\varphi = (\xi, \eta)$  におけるポートフォリオの価値を次のように定義する.

$$\hat{V}_t^\varphi = \xi_t S_t + \eta_t B_t.$$

割引ポートフォリオは,

$$\begin{aligned} V_t^\varphi &= \hat{V}_t^\varphi B_t^{-1} \\ &= \xi_t S_t^* + \eta_t \end{aligned}$$

### 3 Föllmer-Schweizer のリスク評価法 (Föllmer and Schweizer[2])

#### 3.1 モデル

リスク最小化とは  $C_t^\varphi$  (コストプロセス) と  $R_t^\varphi$  (リスクプロセス) を定義し, リスクプロセスを最小化することで評価する方法である.  $C_t^\varphi$  (コストプロセス) と  $R_t^\varphi$  (リスクプロセス) は次のように表すことができる.

ただし,  $\mathcal{G}_t = \{S_u, u \leq t\}$  を危険資産に関する情報とし,  $\mathcal{F}_t$  は保険に関する情報と危険資産に関する情報をを用いて次のように表す  $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_t$

$$C_t^\varphi = V_t^\varphi - \int_0^t \xi_u dS_u^*,$$

$$R_t^\varphi = E^*[(C_T^\varphi - C_t^\varphi)^2 | \mathcal{F}_t].$$

#### 3.2 Galchouk-Kunita-Watanabe 分解

を  $V_t^* = E^*[H_T | \mathcal{F}_t]$  このように満期におけるペイオフの時刻  $t$  における期待値とし,  $\xi$  は  $\mathcal{L}^2(P_s^*)$  可測する. 任意の時間で, 次の 2 性質を満たす確率変数を  $L^H = (L_t^H)_{0 \leq t \leq T}$  とする.

- 平均 0
- $S^*$  と直交

この  $L_t^H$  を用いて割引ポートフォリオは次のような Galchouk-Kunita-Watanabe 分解で表せる.

$$V_t^* = E^*[H_T] + \int_0^t \xi_t^H dS_t^* + L_t^H.$$

#### 3.3 定理 1(Moller[1])

ポートフォリオの危険資産  $\xi_t$  が  $\xi_t = \xi_t^H$  を満たすとき,

$$R_0^\varphi = E^*[(C_T^\varphi - E^*[C_T^\varphi])^2] = E^*[(L_T^H)^2]. \quad (1)$$

契約日時点のリスクプロセスは確率変数  $L_t^H$  の 2 乗になる.

#### 3.4 定理 2(Moller[1])

$$(\xi_t, \eta_t) = (\xi_t^H, V_t^* - \xi_t^H S_t^*)(0 \leq t \leq T).$$

$$R_t^\varphi = E^*[(L_T^H - L_t^H)^2 | \mathcal{F}_t]. \quad (2)$$

任意の時間  $t$  におけるリスクプロセスは, 将来の確率変数  $L_T^H$  から任意の時間における確率変数  $L_t^H$  の差の 2 乗になる.

## 4 変額生命保険についての考察

変額生命保険のポートフォリオの価値は  $g(t, S_t)$  を危険資産を用いた保険金を表す関数として,

$$\begin{aligned} V_t^* &= E^*\left[\int_0^T g(u, S_u) B_u^{-1} dN_u | \mathcal{G}_t\right] \\ &= \int_0^t g(u, S_u) B_u^{-1} dN_u \\ &\quad + E^*\left[\int_t^T g(u, S_u) B_u^{-1} dN_u | \mathcal{G}_t\right], \end{aligned}$$

と表すことができポートフォリオの価値をフビニの定理や伊藤の公式を用いて計算すると次を得る.

ただし  ${}_{u-t}p_{x+t}$  は  $x+t$  歳の人が  $u$  歳まで生きる確率,  $\mu_{x+t}$  は  $x$  歳の人の  $t$  年後に死ぬ確率,  $F_s^{gu}(t, S_t)$  をペイオフを危険資産で微分したものとする

$$F^{gu}(t, S_t) = E^*[e^{-\int_t^u r_\tau d\tau} g(u, S_u) | \mathcal{G}_t].$$

とおくと

$$V_t^* = V_0 + \int_0^t \xi_t dS_t^* + \int_0^t \nu_t dM_t,$$

$$\xi_t = (l_x - N_{t-}) \int_t^T {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+t} F_s^{gu}(t, S_t) du,$$

$$\begin{aligned} \nu_t &= B_t^{-1} F^{gt}(t, S_t) \\ &\quad - \int_t^T F^{gu}(t, S_t) B_t^{-1} {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+t} du. \end{aligned}$$

定理 2 を用いると, 戦略  $(\xi_t^*, \eta_t^*)$  とリスクプロセス  $R_t^\varphi$  を次のように書き表せる.

$$\xi_t^* = (l_x - N_{t-}) \int_t^T {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+t} F_s^{gu}(t, S_t) du,$$

$$\begin{aligned} \eta_t^* &= \int_0^t g(u, S_u) B_u^{-1} dN_u \\ &\quad + (l_x - N_{t-}) \int_t^T {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+t} F_s^{gu}(t, S_t) du \\ &\quad - \xi_t^H S_t^*. \end{aligned}$$

$$R_t^\varphi = \int_t^T E^*[(\nu_u^H)^2 | \mathcal{F}_t] (l_x - N_{t-}) {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du.$$

ペイオフを定額保証のモデルで考える.

$g(t, S_t) = \max(S_t, Ke^{\delta u})$  の場合

$$\begin{aligned} F^g(t, S_t) &= E^*[(e^{-r(u-t)} \max(S_u, Ke^{\delta u}) | \mathcal{G}_t] \\ &= S_t \Phi(z_t^{(u)}) + Ke^{\delta u} e^{-r(u-t)} \\ &\quad * \Phi(-z_t^{(u)} + \sigma\sqrt{u-t}). \end{aligned}$$

$$z_t^{(u)} = \frac{\log \frac{S_t}{Ke^{\delta u}} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{u-t}}$$

$\Phi$  は標準正規分布の分布関数

戦略  $(\xi_t, \eta_t)$

$$V_t^* = V_0 + \int_0^t \xi_u^H dS_u^* + \int_0^t \nu_u^H dM_u.$$

ここでポートフォリオの保有数は

$$\begin{aligned} \xi_t &= (l_x - N_{t-}) \int_t^T u-t p_{x+t} \mu_{x+u} \Phi(z_t^{(u)}) du, \\ \eta_t &= (l_x - N_t) \int_t^T u-t p_{x+t} \mu_{x+u} K e^{-(r-\delta)u} \\ &\quad * \Phi(-z_t^{(u)} + \sigma\sqrt{u-t}) \\ &\quad + \int_0^t g(u, S_u) B_u^{-1} dN_u \\ &\quad - \Delta N_t \int_t^T u-t p_{x+t} \mu_{x+u} \Phi(z_t^{(u)}) S_t^* du. \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \nu_t^H &= B_t^{-1} F^{gt}(t, S_t) \\ &\quad - \int_t^T F^{gu}(t, S_t) B_t^{-1} u-t p_{x+t} \mu_{x+u} du. \end{aligned}$$

このときのリスクプロセスは次式で表される.

$$\begin{aligned} R_t^\varphi &= \int_t^T E^*[(\nu_u^H)^2 | \mathcal{F}_t] (l_x - N_{t-}) u-t p_{x+u} \mu_{x+u} du \\ &= \int_t^T \{E^*[(e^{-\int_0^t r(t)} F^{gt}(t, S_t) \\ &\quad - \int_t^T F^{gu}(t, S_t) e^{-\int_0^t r(t)} u-t p_{x+t} \mu_{x+u} du)^2 | \mathcal{F}_t]\} \\ &\quad * (l_x - N_{t-}) u-t p_{x+u} \mu_{x+u} du. \end{aligned}$$

## 5 シミュレーション

シミュレーションで積分計算を行うにあたって、シンプソンの公式を使う.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx =$$

$$\frac{h}{3} \{f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1})\},$$

また死力は Gompertz-Makehan モデルより求めており、パラメータ A,B,C は 1982 年のデンマークの男性のデー

タを使用している.

(A=0.0005, B=0.000075858, C=1.09144)

$$\mu_{x+t} = A + BC^{x+t}, t \geq 0,$$

### 5.1 満期の変化

表 1 満期の変化

T	$V_0^*$	$R_0$	$\frac{\sqrt{R_0}}{V_0^*}$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\frac{\xi_0}{V_0^*}$	$\frac{\eta_0}{V_0^*}$
15年	2.99	5.19	0.761	0.910	2.08	30%	70%
30年	9.96	29.8	0.541	5.75	4.20	58%	42%
45年	10.8	181	0.502	20.3	6.50	76%	24%

表 1 は保険契約者 100 人, 契約年齢 30 歳, 金利 6%, 危険資産の初期値  $S_0 = 1$ , ボラティリティ  $\sigma = 0.25$ , 保険金  $g(t, S_t) = \max(S_t, 2e^{\delta t})$  による算定結果である. 満期が延びると積分区間が長くなるので, 準備金  $V_0^*$ , リスク  $R_0$ , 危険資産の保有数  $\xi_0$ , 安全資産の保有数  $\eta_0$  は大きくなる.

### 5.2 ボラティリティの変化

表 2 ボラティリティの変化

$\sigma$	$V_0^*$	$R_0$	$\frac{\sqrt{R_0}}{V_0^*}$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\frac{\xi_0}{V_0^*}$	$\frac{\eta_0}{V_0^*}$
0.15	9.09	10.4	0.355	5.54	3.55	61%	39%
0.25	9.96	29.8	0.549	5.75	4.20	58%	42%
0.35	10.8	102	0.936	6.10	4.68	57%	43%

表 2 は保険契約者 100 人, 契約年齢 30 歳, 満期 30 年, 金利 6%, 危険資産の初期値  $S_0 = 1$ , 保険金  $g(t, S_t) = \max(S_t, 2e^{\delta t})$  による算定結果である. 危険資産のボラティリティが大きいとき, 散らばりがおおくなるためリスク  $R_0$  は増加し, 準備金  $V_0^*$  一単位あたりのリスクを表す  $\frac{\sqrt{R_0}}{V_0^*}$  も大きくなる.

### 5.3 金利の変化

表 3 金利の変化

r	$V_0^*$	$R_0$	$\frac{\sqrt{R_0}}{V_0^*}$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\frac{\xi_0}{V_0^*}$	$\frac{\eta_0}{V_0^*}$
1%	17.3	39.5	0.364	3.48	13.8	20%	80%
3%	13.1	30.5	0.423	4.50	8.57	34%	66%
6%	9.96	29.8	0.549	5.75	4.20	58%	42%

表 3 は保険契約者 100 人, 契約年齢 30 歳, 満期 30 年, ボラティリティ  $\sigma = 0.25$ , 危険資産の初期値  $S_0 = 1$ , 保険金  $g(t, S_t) = \max(S_t, 2e^{\delta t})$  による算定結果である. 金利を小さくしたとき準備金  $V_0^*$  は増加する. また,  $\frac{\eta_0}{V_0^*}$  準備金に占める安全資産の割合が大きくなる. 金利の小さな状況では, 安全資産によって賄おうとするため初期に多くの安全資産が必要になる.

## 5.4 定額保証額の変化

表4 定額保証額の変化

k	$V_0$	$R_0$	$\frac{\sqrt{R_0}}{V_0}$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\frac{\xi_0}{V_0}$	$\frac{\eta_0}{V_0}$
1.5	8.98	43.2	0.731	6.33	2.65	70%	30%
2	9.96	29.8	0.549	5.75	4.20	58%	42%
2.5	11.1	21.8	0.422	5.28	5.79	48%	52%

表4は保険契約者100人、契約年齢30歳、満期30年、ボラティリティ $\sigma = 0.25$ 、危険資産の初期値 $S_0 = 1$ 、金利6%による、定額保証額 $ke^{\delta t}$ のkを変化させたときの算定結果である。保証額が大きくなると、準備金 $V_0$ は増加する。また、リスク $R_0$ は契約日時点のコストと将来にかかるコストの差の2乗の平均を取ったものであるから、 $g(t, S_t) = \max(S_t, ke^{\delta t})$ で保険金を考えているために、kが大きいつきのほうがその差が小さくなっているため、 $R_0$ は減少している。

## 5.5 長寿化

長寿化を考える時のアイデアとして、Gompertz-Makehanモデルの各パラメータに(1-D)という定数をかける。

$$\mu_{x+t} = A(1-D) + B(1-D)\{C(1-D)\}^{x+u},$$

これにより算定した0歳から100歳までの生存確率が次の図である。

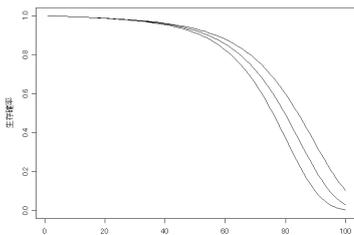


図1 生存確率

生存確率が上昇しているのがわかる。これを長寿化しているとみてシミュレーションを行ったのが次の表である。

表5 長寿化

D	$V_0^*$	$R_0$	$\frac{\sqrt{R_0}}{V_0^*}$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\frac{\xi_0}{V_0^*}$	$\frac{\eta_0}{V_0^*}$
0	9.96	29.8	0.549	5.75	4.20	58%	42%
0.005	8.10	20.7	0.563	4.60	3.49	57%	43%
0.01	6.61	17.5	0.633	3.69	2.92	56%	44%

表5は保険契約者100人、契約年齢30歳、満期30年、ボラティリティ $\sigma = 0.25$ 、危険資産の初期値 $S_0 = 1$ 、金利6%、保険金 $g(t, S_t) = \max(S_t, 2e^{\delta t})$ による算定結果である。生存確率が増加する事で、死亡人数の期待値が小さくなるように働く。死亡保険について考えているため死亡人数が小さくなると準備金 $V_0^*$ 、リスク $R_0$ 、危険資産の保有数 $\xi_0$ 、安全資産の保有数 $\eta_0$ はそれぞれ減少する。

## 6 おわりに

本論文では、変額生命保険の危険資産を含んだポートフォリオの有効性を検討した。低金利の時にはリスク $R_0$ は高い値を示し、安全資産の割合の大きい準備金のポートフォリオが必要であるという結果を得た。よって、危険資産を含んだ準備金ポートフォリオの有効性はあまり高くはないという結果がでた。今後の研究としては、金利を一定としたモデルを考えてるため金利変動モデルを考えたい。また、長寿化に伴い死亡保険のリスクは減るという結果が出たが、[3]よりGompertz-Makehanモデルは老化に伴う死亡増加と年齢とは無関係な偶発的死亡を定式化したものである。そこで他の死亡の数学モデルを用いて、検討していく事も今後の課題になる。

## 参考文献

- [1] Thomas Moller(1998), Risk-minimizing Hedging Strategies for Unit-Linked Life Insurance Contracts, ASTIN Bulletin, 28, pp17-47.
- [2] Hans Föllmer, Martin Schweizer (1988), Hedging by sequential regressions: An introduction to the mathematics of option trading, The ASTIN Bulletin 18(2), 147-160
- [3] 中澤 港 (2010) 「死亡の分析」 [http://minato.sip21c.org/demography/death.pdf] (最終検索日: 2017年2月16日)