

# CKLS modelに対するパラメータ推定手法の比較

茶木, 直人 / Chaki, Naoto

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

58

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2017-03-31

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00014362>

# CKLS model に対するパラメータ推定手法の比較

COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATION METHODS FOR CKLS MODEL

茶木直人

Naoto CHAKI

指導教員 安田和弘

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

In mathematical finance, models of stock prices and interest rates are frequently expressed by stochastic differential equations (SDE). In order to use them for option pricing and so on, it is necessary to estimate their unknown parameters from observation data. We generate data using the Euler-Maruyama approximation for SDE. Especially the CKLS model, which includes the various interest rate processes, is considered in this paper. For such data, we estimate parameters in the model using the generalized method of moments, Adaptive Bayes estimation and so on. We compare and discuss results from each estimation method.

**Key Words** : CKLS model, Ornstein-Uhlenbeck process, Interest rate model, Parameter estimation

## 1. はじめに

現在金融市場では、金融派生商品は重要な役割を担っており、それにあわせて金融派生商品の一種であるオプションの価格付けに関して非常に多く研究されている。また、数理ファイナンスの分野において、株価などの価格過程や金利をモデル化するとき、確率微分方程式により表されることが多い。このとき、対象となるものを正確に表すためには確率微分方程式内のパラメータに適切な値を設ける必要がある。しかし、パラメータの値を事前に知ることは極めて困難である。そのため、観測可能なデータをもとにパラメータを推定していくことが必要である。よって、本論文では、確率微分方程式のパラメータの推定方法の紹介をし、オイラー・丸山近似を用いて得たデータをもとに推定を行い、推定方法による推定結果の違いについて比較を行っていく。推定手法としては、最尤推定法や、Adaptive Bayes 推定、一般化モーメント法などを用いる。

## 2. 推定を行う確率微分方程式

本研究では、考える確率微分方程式として、Chan K. Ceajer, George A. Karolyi, Francis. A. Longstaff, Anthony B. Sanders による CKLS model を考える。CKLS model のパラメータに制約を与えることで表すことのできる Ornstein-Uhlenbeck(OU) 過程についても取り扱う。CKLS model は、以下のように表される確率微分方程式である。

$$dX_t = \alpha(\nu - X_t)dt + \beta X_t^\gamma dW_t. \quad (1)$$

このとき、 $\nu$  は実数、 $\alpha, \beta, \gamma > 0$  とし、 $W_t$  はブラウン運動である。CKLS model は数式内の各パラメータに制約を設けることで、連続型の短期金利モデルである、Vasicek model, CIR model といった代表的なモデルとなるという特徴を有

している。

CKLS model(1) の  $\gamma = 0$  とした、

$$dX_t = \alpha(\nu - X_t)dt + \beta dW_t, \quad (2)$$

と表される確率微分方程式は OU 過程もしくは Vasicek model と呼ばれる。OU 過程は、回帰度  $\alpha$ 、回帰レベル  $\nu$  を持つ自己回帰なガウス過程であり、解は、 $X_0 = x_0$  として、

$$X_t = e^{-\alpha t} \left( x_0 + \int_0^t e^{\alpha s} \alpha \nu ds + \int_0^t e^{\alpha s} \beta dW_s \right),$$

である。 $X_t$  の平均、分散はそれぞれ、以下ようになる。

$$E[X_t] = \mu_t = e^{-\alpha t} x_0 + \nu(1 - e^{-\alpha t}),$$

$$V(X_t) = v_t = \frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

## 3. パラメータ推定方法

確率微分方程式のパラメータ推定は以下の手法を用いて行う。

### (1) 2 Statistics model による推定

[5] による方法を紹介する。この手法での推定は式 (2) の  $\nu$  を 0 とした

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t, \quad (3)$$

についての推定となる。データ数  $n \rightarrow \infty$ 、時間幅  $\Delta t \rightarrow 0$ 、満期が  $n\Delta t \rightarrow \infty$  という状況の下で考える。満期を  $n\Delta t \rightarrow \infty$  としたとき OU 過程  $X_\infty$  の分布は、 $\mathcal{N}(0, \frac{\beta^2}{2\alpha})$  である。[5] より、 $S$  が可測な実数の集合である時、 $Y_t^S = \mathbf{1}_{X_t \in S}$  と定義する。ただし、 $\mathbf{1}_A$  集合  $A$  に対する定義関数とする。今回は [5] に従い  $S = [1, \infty[$  で考える。ここで Occupation time statistic を次のように定義する。

$$OT_n^S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{k\Delta_n}^S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_{k\Delta_n} \in S}$$

この  $OT_n^S$  は、確率過程  $X_t$  がデータ  $n$  のうち何回  $S = [1, \infty[$  に含まれたかを計測するものである。また、 $OT_n^S$  は  $S = [1, \infty[$  のとき、次のように 2 次平均収束する。 ([5] の Theorem 2.2)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_{k\Delta_n} \in S} \xrightarrow{L^2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi V_\infty}} e^{-\frac{x^2}{2V_\infty}} dx. \quad (4)$$

次に、Crossing statistic を次のように定義する。

$$C_n^S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{Y_{k\Delta_n}^S \neq Y_{(k+1)\Delta_n}^S}.$$

$C_n^S$  は、 $X_t$  が 1 を跨いだ回数を計るものである。 $C_n$  は、 $n\Delta_n^{\frac{3}{2}} \rightarrow +\infty$  と仮定したとき、以下のように 2 次平均収束する。 ([5] の Theorem 3.1)

$$\frac{C_n}{\sqrt{\Delta_n}} \xrightarrow{L^2} \frac{2\beta}{\sqrt{2\pi}} \mu_{V_\infty}(1). \quad (5)$$

$\mu_{V_\infty}(x)$  は平均 0、分散  $V_\infty$  の正規分布の密度関数である。式 (4) より、 $V_\infty$  を推定し、推定した  $V_\infty$  と式 (5) により、 $\beta$  の推定を行い、得られた  $\beta$  より、 $\alpha$  を求める。

## (2) 最尤推定法

式 (2) の OU 過程の [6] による、最尤法を用いた推定方法を述べる。OU 過程の増分は正規分布に従うことから、密度関数は  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  ( $t_{i-1} < t_i$ ) を用いて以下のように表せる。

$$f(X_{t_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v \Delta t}} \exp[-A_i].$$

ここで

$$A_i = \frac{(X_{t_i} - \nu - (X_{t_{i-1}} - \nu)e^{-\alpha(\Delta t)})^2}{\frac{\beta^2}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha(\Delta t)})}.$$

このとき、対数尤度関数  $LL(\alpha, \nu, \beta)$  は、

$$LL(\alpha, \nu, \beta) = -\frac{n}{2} \log \left[ \frac{\beta^2}{2\alpha} \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log [1 - e^{-2\alpha(\Delta t)}] - \sum_{i=1}^n A_i, \quad (6)$$

である。対数尤度関数を  $\nu, \beta$  でそれぞれ偏微分しそれぞれ 0 となる  $\nu, \beta$  を求めると、 $\nu$  が  $\alpha$  の 1 変数関数  $\nu = g(\alpha)$  となりそのことを用いると、 $\beta = h(g(\alpha), \alpha)$  となる。これらを用いて推定を行うのがこの手法の特徴である。この  $\nu = g(\alpha)$ 、 $\beta = h(g(\alpha), \alpha)$  を対数尤度関数 (6) に代入し、それを最大にする  $\alpha$  を求め、順次  $\beta, \nu$  を推定する。

## (3) 擬似最尤推定法

擬似最尤推定法は、観測したデータである  $X_t$  の確率分布が未知であるときに、適当な分布を仮定して擬似対数尤度関数  $QL(x, \theta)$  を定義してパラメータの推定を行う手法である。[3] より、式 (1) において、擬似対数尤度関数  $QL(x, \theta)$  は、 $\theta = (\alpha, \nu, \beta, \gamma)$  として、次のように定義する。

$$QL(X_t, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \log(\beta X_{t_{i-1}}^\gamma)^2 + \frac{1}{\Delta t (\beta X_{t_{i-1}}^\gamma)^2} (\Delta X_t - \Delta t \alpha (\nu - X_{t_{i-1}}))^2 \right\}. \quad (7)$$

擬似最尤推定法における推定値を  $\tilde{\alpha}, \tilde{\nu}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$  とすると、推定値は、

$$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\nu}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = \arg \min_{\theta} QL(X_t, \theta)$$

のように求める。

## (4) Adaptive Bayes 推定

[3] より、Adaptive Bayes 推定は式 (7) の擬似対数尤度関数を使い、以下の式により推定をする。それぞれ任意の  $\nu', \beta', \gamma'$  を用いて推定値である  $\tilde{\alpha}$  を求めることができる。

$$\tilde{\alpha} = \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp\{-QL(\alpha, \nu', \beta', \gamma')\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp\{-QL(\alpha, \nu', \beta', \gamma')\} \pi_1(\alpha) d\alpha}.$$

ここで、 $\pi_1(\cdot)$  は事前分布である。また、 $\Theta_1$  は有界な実数の集合である。この推定値  $\tilde{\alpha}$  を用いて、

$$\tilde{\nu} = \frac{\int_{\Theta_2} \nu \exp\{-QL(\tilde{\alpha}, \nu, \beta', \gamma')\} \pi_2(\nu) d\nu}{\int_{\Theta_2} \exp\{-QL(\tilde{\alpha}, \nu, \beta', \gamma')\} \pi_2(\nu) d\nu},$$

により、 $\nu$  の推定値を得る。このときも  $\pi_2(\cdot)$  は事前分布であり、 $\Theta_2$  は有界な実数の集合である。以下同様に、求めた推定値を用いて  $\beta, \gamma$  の推定値を求める。本研究において、事前分布には一様分布を用いて推定を行う。また、 $\nu', \beta', \gamma'$  の値は疑似最尤法の推定値を用いる。

## (5) Adaptive LASSO-TYPE 推定

[2] により、式 (1) に対する Adaptive LASSO-TYPE 推定は、以下の関数  $F(\theta)$  を用いる。

$$F(X_t, \theta) := (\theta - \tilde{\theta})^T \ddot{Q}L(X_t, \tilde{\theta})(\theta - \tilde{\theta}) + \lambda_0 |\alpha| |\tilde{\alpha}|^{-\delta_1} + \lambda_0 |\nu| |\tilde{\nu}|^{-\delta_1} + \gamma_0 |\beta| |\tilde{\beta}|^{-\delta_2} + \gamma_0 |\gamma| |\tilde{\gamma}|^{-\delta_2}.$$

ここで、 $\mathbf{T}$  はベクトルの転置を表す。 $\tilde{\theta}$  は、擬似最尤推定法による推定値である。また、 $\ddot{Q}L(x, \theta)$  は擬似対数尤度関数  $QL$  の  $\theta$  に関するヘッセ行列であり、 $\delta_1, \delta_2 > 0$  である。推定値を  $\theta' = (\alpha', \nu', \beta', \gamma')$  として

$$\theta' = \arg \min_{\theta} F(X_t, \theta) \quad (8)$$

のように推定値を求める。また、本研究では  $\lambda_0 = \gamma_0 = 1$ 、 $\delta_1 = \delta_2 = 2$  として推定を行う。

## (6) 一般化モーメント法

[1] を参考に一般化モーメント法の推定について紹介する。式 (1) をオイラー・丸山近似により、離散化すると

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \alpha(\nu - X_{t_{i-1}}) \Delta t + \beta X_{t_{i-1}}^\gamma (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

となる。ここで、 $W_t$  はブラウン運動であるから、 $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  は平均 0、分散  $\Delta t$  の正規分布なので、

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \alpha(\nu - X_{t_{i-1}}) \Delta t + \varepsilon_t, \quad (9)$$

$$\varepsilon_t^2 = \beta^2 X_{t_{i-1}}^{2\gamma} \Delta t + \eta_t, \quad (10)$$

と表すことができる。ここで  $\varepsilon_t$  と  $\eta_t$  は誤差項である。CKLS model における推定が必要なパラメータは 4 個であるため、4 次元の直交条件が必要になる。[4] により直交条件は、式 (9)、式 (10) を用いて、

$$h_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t X_{t-\Delta t} \\ \eta_t \\ \eta_t X_{t-\Delta t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

とする。各要素に対して  $n$  個のデータの平均をとるベクトル

$$g_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(\theta),$$

を用いて、一般化モーメント法の目的関数  $J_n(\theta)$  は、

$$J_n(\theta) = g_n(\theta)^T K_n g_n(\theta) \quad (12)$$

となり、この目的関数  $J_n(\theta)$  を最小化する  $\hat{\theta}$  が一般化モーメント法によるパラメータの推定値となる。ここで  $K_n$  は最適なウェイトを与える行列である。 $K_n$  の求め方は [1] を確認していただきたい。

#### 4. 数値実験と結果

確率微分方程式の近似はオイラー・丸山近似を用いて、データ数  $n = 10 \cdot 2^i$ 、データの間隔を  $\Delta t = 0.1 \cdot 2^{\frac{i}{2}}$  としてシミュレーションを行う。また、データの生成、パラメータ推定を行う際のソフトウェアには R を用い、関数の最大化、最小化は Nelder-Mead 法を用いる。推定結果を表にまとめるうえで、前節で紹介した 2 Statistics model を method 1 とし、最尤推定法を method 2 とし以下同様に紹介した順に番号を割り当てていく。また、平均分散などの基本統計量を求める際には、推定値に明らかに異常がある場合はその数値を除いての算出とする。この際の異常値としては  $-10$  以下、 $10$  以上のものを指す。

##### (1) 式 (3) のパラメータ推定

式 (3) に対して各パラメータに数値を設定し、第 2 節の各推定手法の結果を比較する。基準となる OU 過程について各パラメータを  $x_0 = 0.3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $i = 4, 5, \dots, 10$  と設定し、データ数の増加により各手法の推定値がどのように変化するか、また、各手法の推定値を比較していく。

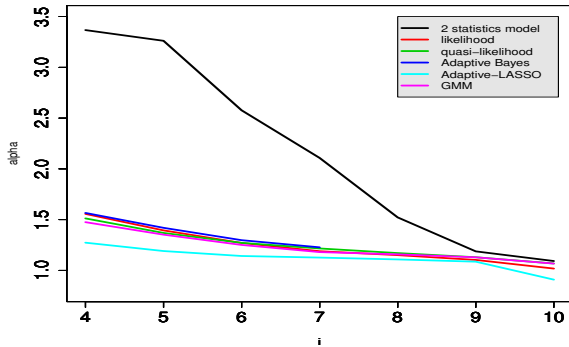


図 1 式 (3) に対する  $\alpha$  の推定結果。

図 1、図 2 の各手法の値はシミュレーションを 1000 回行った際の推定値の平均を表している。データ数の少ないうちは、Adaptive LASSO-TYPE 推定推定や、一般化モーメント法による推定の精度が他の手法に比べ真値に近い推定値を示すことができる。2 statistic model による推定値は、データ数が少ないサンプルでの推定だと  $S = [1, \infty[$  としたとき、1 度もサンプルデータが 1 を超えないことがあり、そのとき  $\alpha, \beta$  共に推定値は 0 となる。また、到達した回数が 1 度や、2 度と少ない場合は、 $\alpha$  の推定値が真値よりもはるかに大きい値をとることがある。

また、データ数が多い時は、各手法の  $\alpha, \beta$  の推定値に大きな差はなく、どの手法においても真値である  $\alpha = 1, \beta = 1$

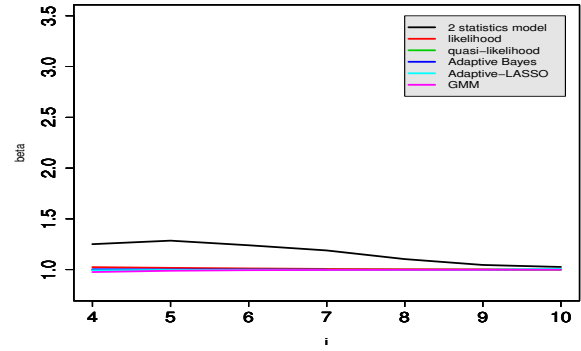


図 2 式 (3) に対する  $\beta$  の推定結果。

表 1 各パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha$	$\beta$	$\alpha \cap \beta$
$i = 7$			
method 1	155	20	4
method 2	476	302	152
method 3	24	12	0
method 4	153	292	53
method 5	128	84	8
method 6	64	290	15

に近い値をとっていることがわかる。シミュレーションを行う上での各手法の優劣でいえば、計算コストがあげられる。2 statistic model や、本論文における最尤推定法は、複雑な最適化計算や反復計算を行わないため、計算時間はデータ数が増加してもそれほど長くはならない。逆に、最適化や反復計算を行う手法は時間がかかりやすい傾向にある。

同一のデータに対して推定した各手法の計算結果をそれぞれ比較し、各推定値が真値に最も近い推定値を得た回数と、 $\alpha, \beta$  が共に真値に最も近い推定値を得た回数 ( $\alpha \cap \beta$ ) を計測し表 1 にまとめた。この表より、 $\alpha, \beta$  の推定値と両推定値が共に最も近い推定値を得た回数は最尤推定法が最も多くなり、次いで Adaptive Bayes 推定となっている。さらに、各手法の推定値の誤差の割合に対するユークリッド距離を求め、手法ごとに距離の比較を行い、距離の短くなったものを勝ち、長くなった場合は負けとし、その回数を表 2 にまとめた。表 2

表 2 各推定値ごとのユークリッド距離の比較

win \ lose	meth.1	meth.2	meth.3	meth.4	meth.5	meth.6
$i = 7$						
meth.1	-	115	175	168	211	174
meth.2	885	-	699	680	776	709
meth.3	825	301	-	525	460	495
meth.4	832	320	475	-	458	580
meth.5	789	224	540	542	-	503
meth.6	826	291	595	420	497	-

により、最尤推定法による推定が他の推定手法よりもユークリッド距離が短くなる結果を得やすいことがわかる。また、最尤推定法以外の推定手法のうち、2 Statistic model 以外の推定の精度には大きな差はないと考えられる。以上より、ここで実験した数値に対する式 (3) のパラメータ推定では最尤法が適していると考えられる。

(2) 式 (2) のパラメータ推定

式 (2) の各パラメータを  $x_0 = 0.3, \alpha = 1, \nu = 1, \beta = 1, i = 4, 5, \dots, 10$  と設定し、2 Statistic model 以外の 5 つの手法で推定を行う。図 3, 図 4, 図 5 の値も前節と同様にシミュレーションを 1000 回行った際の推定値の平均を表している。 $\alpha$  の推定値に関して、データ数が  $i = 4, \dots, 7$  の間は、Adaptive Bayes 推定による推定値が他の手法に比べ真値に近い値を取ることがわかる。この手法は  $\nu, \beta$  の推定値においても真値に近い値を取っている。しかし、データ数の増加に伴い数値計算が困難となるため、データ数の少ないうちは Adaptive Bayes 推定が 5 つの推定手法の中では、優れたモデルであると言える。

データ数が  $i = 8$  以降にしたときは、 $\alpha$  の推定値は 4 つの手法による推定値に大きな差はない。

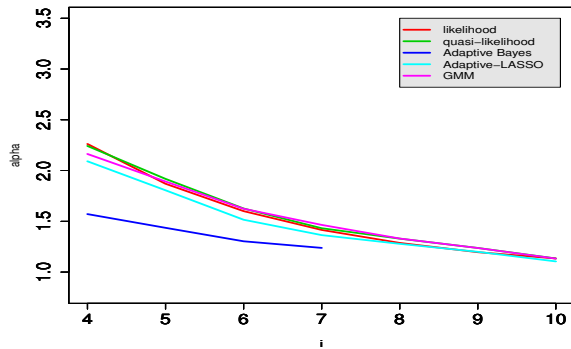


図 3 式 (2) に対する  $\alpha$  の推定結果。

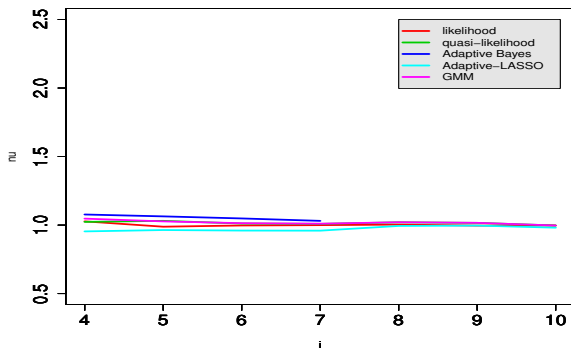


図 4 式 (2) に対する  $\nu$  の推定結果。

同一のデータに対して推定した各手法の計算結果をそれぞれ比較し、真値に最も近い推定値を得た回数の計測を行った (表 3)。

また、ドリフト項とボラティリティ項のパラメータを分けて考える。ボラティリティ項の  $\beta$  に関しては表 3 の  $\beta$  の欄がそのままボラティリティ項のパラメータ真値に最も近い推定値を算出した際回数である。ドリフト項のパラメータである  $\alpha, \nu$  が同時に真値に最も近い推定値を算出した際回数を求め表 4 に記す。さらに表 4 には 3 つのパラメータ全て

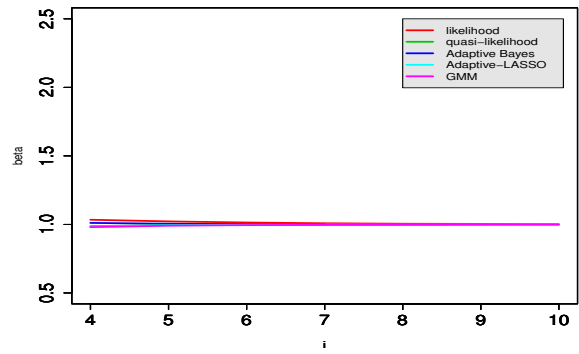


図 5 式 (2) に対する  $\beta$  の推定結果。

表 3 各パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha$	$\nu$	$\beta$
$i = 7$			
method 2	92	22	409
method 3	25	30	17
method 4	519	374	81
method 5	258	424	195
method 6	106	150	298

が最も真値に近い値を取った回数も掲載する。

表 4 ドリフト項並びに、3 パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha \cap \nu$	$\alpha \cap \nu \cap \beta$
$i = 7$		
method 2	1	0
method 3	0	0
method 4	218	17
method 5	130	30
method 6	18	4

表 5 各推定値ごとのユークリッド距離の比較

win \ lose	meth.2	meth.3	meth.4	meth.5	meth.6
$i = 7$					
meth.2	-	220	199	350	391
meth.3	780	-	244	361	524
meth.4	802	756	-	693	740
meth.5	650	639	307	-	585
meth.6	609	476	260	415	-

表 4 より  $\alpha, \nu$  同時に真値に最も近い推定値を得る回数 ( $\alpha \cap \nu$ ) は、Adaptive Bayes 推定が最も多く、次いで Adaptive LASSO-TYPE 推定が多くなっている。また、ボラティリティ項に関しては、最尤推定法の推定値が真値に最も近い値を取ることが多いが、 $\beta$  の各手法の推定値は真値に近い値を取る

ことが多く、ばらつきも小さくなっている。そのため、式(2)におけるパラメータ推定を考えるにあたって、表4にあるように3パラメータの推定値が同時に真値に最も近い推定値を得る回数( $\alpha \cap \nu \cap \beta$ )は Adaptive LASSO-TYPE 推定が良いととることが出来るが、より重要視すべきはドリフト項の推定精度であると考えられる。また、表5に前節と同様に各推定値ごとのユークリッド距離の比較した結果をまとめる。表5から、表4の結果と同様に、Adaptive Bayes 推定と、Adaptive LASSO-TYPE 推定による推定値が他の手法に比べ、真値に近い推定値を得やすいことがわかる。また、その2つの手法では、Adaptive Bayes 推定の推定値のほうが勝ち数が多く、前述のドリフト項の推定精度を考えると、式(2)のOU過程の推定にあたっては、今回の実験で用いたパラメータに対して Adaptive Bayes 推定が優れた推定手法であると言える。

### (3) 式(1)のパラメータ推定(I)

式(1)の各パラメータを  $x_0 = 2.3, \alpha = 1, \nu = 3, \beta = 0.3, \gamma = 0.5, i = 4, 5, 6, 7$  と設定し、疑似最尤推定法, Adaptive Bayes 推定, Adaptive LASSO-TYPE 推定, 一般化モーメント法の4つの手法で推定を行う。 $\gamma = 0.5$ としたので生成するデータは CIR model に従うものとなっている。

図6~9の値もこれまでと同様にシミュレーションを1000回行った際の推定値の平均を表している。

CKLS model による推定では、ドリフト項のパラメータ  $\alpha$  の推定に関しては、Adaptive LASSO-TYPE 推定による推定では、他の手法に比べてデータ数の少ないうちから、推定値が真値である1に近い値を取る傾向にあることが確認できる。また、Adaptive LASSO-TYPE 推定以外の推定では、データ数の増加に伴い推定の精度が上がる事が確認できるが、データを十分得ることが出来ない状況だと推定の推定精度はあまり高くない。次にパラメータ  $\nu$  の推定に関しては、Adaptive Bayes 推定による推定がデータ数の少ないうちから、精度の高い推定が期待できる。他の手法に関しては、 $\alpha$  の推定値と同様にデータを十分得ることが出来ない状況だと推定の推定精度はあまり高くないことが確認できる。

また、ボラティリティ項のパラメータ  $\beta, \gamma$  の推定に関しては、図8, 図9よりドリフト項と同様に精度の高い推定が出来ているわけではなく、 $\beta, \gamma$  の推定では、Adaptive Bayes 推定等の他の手法による推定値の方が真値に近い推定値を得ることが多い。このことは以下の表6からも確認できる。

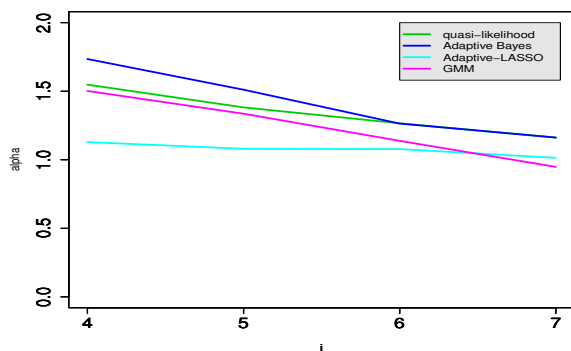


図6 式(1)に対する  $\alpha$  の推定結果。

各手法の  $i = 7$  とした際の計算結果をそれぞれ比較し、真値に最も近い推定値を算出した回数の計測を行い表6にまとめる。表6より、 $\alpha$  の推定値では、Adaptive LASSO-TYPE

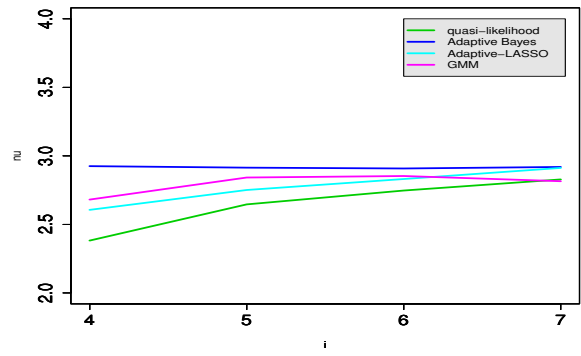


図7 式(1)に対する  $\nu$  の推定結果。

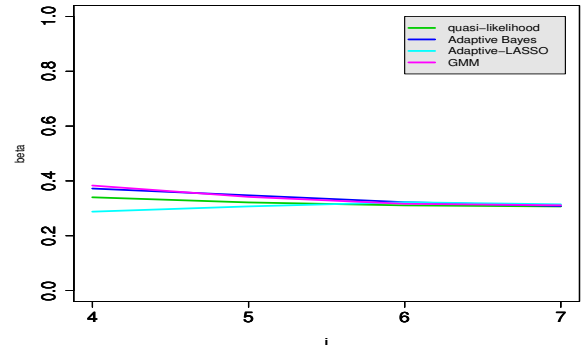


図8 式(1)に対する  $\beta$  の推定結果。

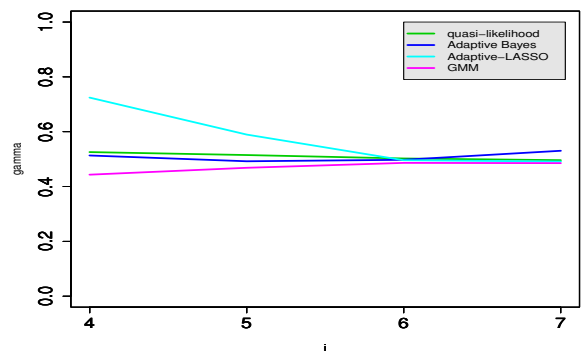


図9 式(1)に対する  $\gamma$  の推定結果。

推定による推定値が最も多い結果となった。しかし、 $\beta, \gamma$  の推定値に関しては他の推定手法と比較すると、大きく差をつけられていることが確認できる。 $\nu$  の推定値の比較では、最も真値に近い推定値を得た回数にあまり大きな差は生じない結果となった。

表6 各パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
$i = 7$				
method 3	158	213	314	322
method 4	245	244	244	237
method 5	345	276	94	80
method 6	252	267	348	361

CKLS model においてもドリフト項とボラティリティ項に関してそれぞれ分けて比較を行う。 $i = 7$  のときにドリフト項とボラティリティ項のパラメータの推定値が同時に真値

に最も近い値を取った回数を表7にまとめる。

表7からも, Adaptive LASSO-TYPE 推定では, ドリフト項の推定値が他の手法の推定値に比べ真値に近い値を得やすいということが分かる。ただし, 表7からボラティリティ項に関しては, 擬似最尤推定法など他の手法に比べて高い精度での推定は困難であると考えられる。Adaptive LASSO-TYPE 推定以外の推定手法では, ドリフト項の推定値が共に真値に近い値を取ることが少なく, 推定値ごとの差も少ない。ボラティリティ項の  $\beta, \gamma$  の結果は, 一般化モーメント法による推定の結果が真値に近い値を得やすいことが確認できる。

これまでと同様にユークリッド距離の比較した結果を表8にまとめる。表8の結果より, Adaptive LASSO-TYPE 推定による推定結果がどの手法に対しても半分以上の割合で勝利しているが, すべての手法における推定結果に大きな差は確認できず, 手法の優劣の判断材料にはなり難い。よって, 十分データを得られる状況では, ドリフト項の推定に重きを置く場合, Adaptive LASSO-TYPE 推定を用い, ボラティリティ項の推定に重きを置く場合は, 一般化モーメント法を用いるのが良いと考えられる。ここで,  $i = 4$  としたときのユークリッド距離の比較した結果を表9にまとめる。 $i = 4$  としたとき各パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数等は  $i = 7$  と大きな差はないが, ユークリッド距離に関しては  $i = 7$  のときと  $i = 4$  としたときに差が生じた。表9より, Adaptive Bayes 推定がどの手法に対してもおよそ6割の確率で勝利することが確認できる。このことからデータ数の少ない場合での推定では, Adaptive Bayes 推定を用いるのが良いと考えられる。

表7ドリフト項, ボラティリティ項のパラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha \cap \nu$	$\beta \cap \gamma$
$i = 7$		
method 3	68	277
method 4	85	212
method 5	136	64
method 6	97	327

表8 各推定値ごとのユークリッド距離の比較

win \ lose	meth.3	meth.4	meth.5	meth.6
$i = 7$				
meth.3	-	599	509	548
meth.4	401	-	468	493
meth.5	491	532	-	489
meth.6	452	507	511	-

表9 各推定値ごとのユークリッド距離の比較

win \ lose	meth.3	meth.4	meth.5	meth.6
$i = 4$				
meth.3	-	359	506	461
meth.4	641	-	641	596
meth.5	494	359	-	426
meth.6	539	404	574	-

表10 CIR model に対する各推定手法の推定値の基本統計量

	meth.3 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.5
平均	1.174	2.827	0.3072	0.4945
分散	0.4030	0.8311	0.003789	0.03314
中央値	1.170	2.975	0.3002	0.4992
最大値	3.634	8.509	0.6279	1.175
最小値	-0.04070	-8.562	0.1423	-0.1505
歪度	0.1434	-5.643	0.7821	0.03492
尖度	3.329	14.48	4.811	3.627

	meth.4 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.5
平均	1.162	2.919	0.3085	0.5304
分散	0.4051	0.1016	0.01171	0.06878
中央値	1.108	2.956	0.2972	0.5116
最大値	3.897	3.834	1.252	1.858
最小値	0.07007	1.751	0.07825	0.0009136
歪度	0.5845	-0.6291	3.071	0.7879
尖度	3.233	3.824	21.17	4.955

	meth.5 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.5
平均	1.020	2.904	0.3131	0.4950
分散	0.4286	0.2368	0.01189	0.09956
中央値	1.023	2.978	0.3005	0.4948
最大値	3.646	5.517	1.101	2.091
最小値	-1.197	-0.7773	-0.1891	-0.3991
歪度	0.1134	-1.781	0.4215	0.9762
尖度	3.054	14.24	9.509	5.980

	meth.6 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.5
平均	0.9481	2.814	0.3111	0.4852
分散	0.4257	0.1247	0.004791	0.03847
中央値	0.9482	2.883	0.3039	0.4878
最大値	3.124	3.876	0.963	1.171
最小値	-0.08303	1.059	0.1477	-0.5621
歪度	0.421	-1.390	1.551	-0.1251
尖度	2.443	6.761	12.06	4.362



表 10 に  $i = 7$  とした際の各推定手法の推定値の基本統計量を掲載する。表 10 より、各パラメータについては前述のように推定値の平均は、真値に近い結果得ていることが確認できる。また、分散については、ボラティリティ項のパラメータである  $\beta, \gamma$  に関しては非常に小さいものとなっており、推定の際は安定してパラメータの推定が可能であると確認できる。ドリフト項のパラメータである  $\alpha, \nu$  については、 $\beta, \gamma$  に比べて分散は大きくなっていることが確認できる。

(4) 式 (1) のパラメータ推定 (II)

$x_0 = 2.3, \alpha = 1, \nu = 3, \beta = 0.3, \gamma = 0, i = 4$  と設定し、疑似最尤推定法, Adaptive Bayes 推定, Adaptive LASSO-TYPE 推定, 一般化モーメント法の 4 つの手法で推定を行う。  $\gamma = 0$  としたので生成するデータは OU 過程に従うものとなっている。表 11 に各パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数をまとめた。次いで、表 12 にドリフト項のパラメータ  $\alpha, \nu$  の推定値が同時に最も真値に近い推定値を得た回数と、ボラティリティ項のパラメータ  $\beta, \gamma$  の推定値が同時に最も真値に近い推定値を得た回数をまとめた。

表 11 各パラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
$i = 4$				
method 3	117	182	391	286
method 4	206	179	386	253
method 5	39	157	601	203
method 6	2	120	723	155

表 12 ドリフト項, ボラティリティ項のパラメータが最も真値に近い推定値を得た回数

	$\alpha \cap \nu$	$\beta \cap \gamma$
$i = 4$		
method 3	36	1
method 4	58	107
method 5	208	592
method 6	116	122

表 11, 表 12 より、生成するデータを OU 過程としてパラメータ推定をした結果と、CIR model に従うデータをもとにパラメータ推定を行った結果とで大きく異なる結果となった。表 11 の結果により、 $i = 4$  としたときのパラメータ推定では、各推定値ごとで比較すると、 $\alpha, \nu, \beta, \gamma$  の全ての推定値において Adaptive LASSO-TYPE 推定により得られた推定値が最も真値に近い推定値を得た回数が多い結果となった。生成するデータとして、CIR model を想定した場合は、Adaptive LASSO-TYPE 推定による  $\beta$  の推定値は他の手法に比べて最も真値に近い推定値を得た回数は少ないものとなっていたが、OU 過程を想定しての推定の場合では、他の手法に比べ、格段に最も真値に近い結果となる回数が多いことが確認できる。また、 $\gamma$  についても同様に、Adaptive LASSO-TYPE 推定による推定値が最も真値に近い結果となる回数が多いことが確認できる。疑似最尤推定法の結果では、表 11 の限りで

は、ボラティリティ項のパラメータの推定値は他の手法に比べ精度の高い推定は望めないと考えられる。また、表 12 において、Adaptive LASSO-TYPE 推定による推定値がドリフト項, ボラティリティ項のそれぞれの推定値において最も真値に近い推定値を得た回数が多く、次いで一般化モーメント法による推定値となっている。

次に、各手法の推定値の誤差の割合に対するユークリッド距離を求め各推定手法ごとに比較したものを表 13 にまとめる。

表 13 各推定値ごとのユークリッド距離の比較

win \ lose	meth.3	meth.4	meth.5	meth.6
$i = 7$				
meth.3	-	550	421	635
meth.4	450	-	433	649
meth.5	579	567	-	661
meth.6	365	351	339	-

表 13 の結果により、CIR model を想定しての結果では、Adaptive Bayes 推定による推定が優れていると考えられたが、OU 過程を想定しての場合では、Adaptive LASSO-TYPE 推定による推定値が、他の手法に比べて推定値の誤差の割合は少ないものとなっており、先述のことも併せて、 $i = 4$  とし、OU 過程を想定した推定をした際は Adaptive LASSO-TYPE 推定が誤差の少ない推定が可能であると言える。次に、誤差の割合に対するユークリッド距離について、表 13 にまとめた 1 対 1 での比較のほかに、4 つの手法の中で最もユークリッド距離が短かった回数, 2 番目に少なかった回数といったランク付けを行った。その結果について、図 10 にまとめた。

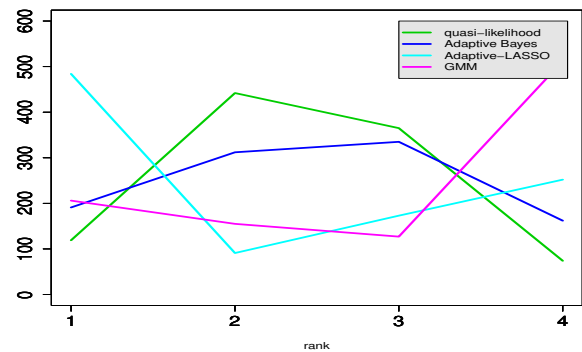


図 10 ユークリッド距離の順位付け。

図 10 により、疑似最尤法による推定値がユークリッド距離が最も短くなる回数は少ないが、2 番目となる回数は最も多く、最下位となることは最も少なくなっていることが分かる。また一般化モーメント法については、最下位となることが最も多く、推定の精度は他のパラメータに比べ劣っていると考えられる。

さらに、表 14 に手法ごとの各推定値に対する基本統計量を記す。表 14 から、一般化モーメント法における  $\alpha, \gamma$  の推定において、他の手法に比べ分散が大きくなっていることが確認できる。そのことから、一般化モーメント法における推定が、各推定手法ごとに順位を比べた際に、最下位となることが最も多くなったものと考えられる。また、 $\alpha, \gamma$  の推定に



表 14 OU 過程に対する各推定手法の推定値の基本統計量

	meth.3 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.0
平均	1.554	2.947	0.3734	0.02665
分散	0.7112	0.6069	0.1005	0.4921
中央値	1.423	2.963	0.2899	0.02491
最大値	5.808	7.230	3.466	2.643
最小値	-0.2339	-8.223	0.01761	-2.451
歪度	0.9709	-9.084	3.377	0.07271
尖度	4.925	125.7	22.26	3.583

	meth.4 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.0
平均	1.563	2.976	0.3766	0.02189
分散	0.6355	0.07335	0.1021	0.4917
中央値	1.440	2.967	0.2914	0.02202
最大値	4.263	4.140	3.493	2.639
最小値	0.02333	1.027	0.01783	-2.455
歪度	0.6498	-1.653	3.379	0.07144
尖度	3.212	17.55	22.30	3.581

	meth.5 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.0
平均	1.269	2.973	0.2399	0.3246
分散	0.7756	0.3011	0.05327	0.6589
中央値	1.211	2.968	0.2616	0.0009601
最大値	6.404	8.529	2.722	3.559
最小値	-2.265	-1.348	-0.1687	-2.248
歪度	0.5171	0.1370	4.997	1.056
尖度	5.395	33.041	43.31	4.290

	meth.6 $\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$
真値	1.0	3.0	0.3	0.0
平均	1.232	2.682	0.3234	-0.4157
分散	1.207	0.6039	0.2015	1.636
中央値	1.085	2.851	0.2709	-0.2336
最大値	5.899	6.516	2.801	3.252
最小値	-0.3169	-6.380	-1.974	-6.603
歪度	0.8295	-4.835	1.068	-1.309
尖度	3.617	52.02	8.06788	5.831

については、全ての手法において  $\nu, \beta$  の推定値の分散に比べ大きくなっていることが確認できる。表 10 においても  $\alpha$  の推定値の分散が大きいことから、回帰度  $\alpha$  の推定は他のパラメータよりも困難であると考えられる。

## 5. 終わりに

本研究では、オイラー・丸山近似を用いて、自らが定めた各パラメータを持つ確率微分方程式に従ったデータをもとにシミュレーションを行った。そのため推定するデータのモデルがはっきりとわかっている状況の下で、そのモデルに対するパラメータの推定を行ったことから、比較的良好な結果も得ることができた。しかし、実際のデータの場合ではそのデータがどのようなモデルかさえもわからない状況で、そのデータがどのようなモデルに従っているかを仮定したうえで推定しなければならないため、推定の精度はさらに落ちるのではないかと考えられる。

今後の課題としては、推定のためのデータを生成する際に各パラメータを変化させていきたい。例えば、ポラティリティ項の影響が強い場合や、回帰度が非常に強い場合、弱い場合等、まだ考えられる状況は豊富にあるのでその点についてシミュレーションを行っていきたい。また、2 statistic model による推定の際に、[5] に従い  $S = [1, \infty)$  としたが  $S$  の選び方を変え、データの増減に関わらずに推定の精度が向上させられるように考えていきたい。あわせて、Adaptive LASSO-TYPE-TYPE 推定についても重みづけのパラメータである  $\lambda_0, \gamma_0, \delta_1, \delta_2$  についても、このパラメータを変えた際に推定値にどのような変化があるのかや、推定するモデルに対して最適となるようなパラメータのとり方があるのかについて考えていきたい。

## 参考文献

- 1) 乾孝治, 室町幸雄, 金融モデルにおける推定と最適化, 朝倉書店, (2013).
- 2) Alessandro De Gregorio, Stefano M. Iacus, *Adaptive Lasso-type estimation for multivariate diffusion processes*, *Econometric Theory*, 28, (2012), pp. 838-860.
- 3) Alexandre Brouste, Hideitsu Hino, Hiroki Masuda, Kengo Kamatani, Masaaki Fukasawa, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida, Ryosuke Nomura, Stefano M. Iacus, Yasutaka Shimizu, Yuta Koike, *The YUIMA Project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations*, *Journal of Statistical Software*, vol 57, Issue 4, (2014), pp. 1-34.
- 4) Chan K. Ceajer, George A. Karolyi, Francis. A. Longstaff, Anthony B. Sanders, *An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*, *The Journal of Finance*, 47(3), (1992), pp. 1209-1227.
- 5) Emmanuel Gobet, Gustaw Matulewicz, *Parameter estimation of Ornstein-Uhlenbeck process generating a stochastic graph*, (2016), preprint.
- 6) Jose Carlos Garcia Franco, *Maximum likelihood estimation of mean reverting processes*, [http://www.investmentscience.com/Content/howtoArticles/MLE\\_for\\_OR\\_mean\\_reverting.pdf](http://www.investmentscience.com/Content/howtoArticles/MLE_for_OR_mean_reverting.pdf), preprint.