法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2024-12-22

格子上の標高データを用いた等高線の作成

石毛, 達也 / Ishige, Tatsuya

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編
(巻 / Volume)
58
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
8
(発行年 / Year)
2017-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00014359

格子上の標高データを用いた等高線の作成

CONTOUR TRACING OF GEOGRAPHICAL DIGITAL DATA ON A GRID

石毛 達也
Tatsuya ISHIGE
指導教員　五島 洋行

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

Our purpose is to trace a contour in the form of a polygon. In this research, we use a bicubic spline function for interpolation of the elevation data on a grid. We construct the polygon as a data consisting of ordered contour points on sides of the grid. The contour enters a cell at an entry point and goes out at an exit point on its sides. The polygon is formed connecting these points. A problem occurs as to which two points should be connected when a cell of the grid has more than two contour points on its sides. As a solution, we view the bicubic spline function as a univariate cubic function with a parameter. From this perspective, we identify the exit point examining the behavior of the real roots of the cubic equation for the contour. Our method enables us to faithfully trace the contour of bicubic spline functions.
***Key Words** : contour tracing, bicubic spline, cubic equation, polygon*

1．はじめに

本研究では，対象とする標高の等高線を作成する方法を提案する．等高線の軌跡は，正方格子点上の標高値を補間することで得られる連続な二変数標高関数により決定される．提案手法の主な特徴を以下に挙げる．

- 補間には，近似の精度と計算の簡素さにおいて優れている双三次スプライン関数を用いる．
- それぞれの等高点は，独立に計算され，等高点算出の際に累積誤差は生じない．
- 格子セルの辺上の等高点を連結する際，三点以上の等高点が存在する場合にも，正確にポリゴンとして等高線を作成できる．
- どの等高点を始点としても，同一のポリゴンを作成することができる．

等高線をポリゴンデータとしてもつので，体積計算など対象とする地形に関する様々な計算に適している．

先駆的な研究として，Cottafava et al.[1] がある．彼らは，正方格子の辺上の等高点を比例按分により求め，それらをつなぐことにより等高線を作成している．しかし，比例按分により，等高点を算出しているため，正方格子の一辺上の等高点の数は，一点である．Lopes et al.[2] は，標高値を補間するために双一次スプライン関数を用いている．格子セル内の双曲線上の等高線の近似精度の向上のために，セル内の等高点をポリゴンに加えている．Maple [3] による marching squares は，あらかじめ定めた 16 のパターンに格子セル内の等高線を当てはめるものである．

これらの方法では，等高線が入り組んでいる場合，正確な再現が必ずしも可能とはかぎらない．この問題に対処するために，McCullagh [4] は，等高線が滑らかにセルを通過するように格子セルを細分している．一方，本研究では，格子セルを細分化することなく，等高線を作成する．まず，格子点上の標高値を補間し，正方格子辺と等高線の交点である等高点を算出する．次に，的確に等高点をつないでいくことにより，正確にポリゴンを形成する．正方格子点上の標高値をスプライン関数で補間する点は，Lopes et al.[2] と同様であるが，提案手法では双三次スプライン関数を用いる．その精度を最大限に活用することで，複雑な等高線にも対応することができる．その際の要となる考え方は，三次方程式の実根の順序を考慮し，等高点を正確につなぎ合わせることである．

2．数学的準備

（1）２次元スプライン関数

双三次スプライン関数を用いて，一辺 δ の $m\times n$ の正方格子点上の標高値を補間し，標高関数を構築する．様々な次数をもつ多項式スプライン関数が存在するなか，三次スプライン関数を用いる理由は，近似の精度と計算の簡潔さを両立させているからである．一変数 B スプライ

ンの基底関数は,

$$M_{k,i}(x) = M_k(x;\xi_i,\xi_{i+1},\cdots,\xi_{i+k})\quad (i=1,\cdots,m), \tag{1}$$

となる．ここで，x は位置座標，$k-1$ は多項式スプライン関数の次数，i は基底関数の位置を示す指数である．パラメータ $\xi_i,\xi_{i+1},\cdots,\xi_{i+k}$ は，節点と呼ばれ，基底関数の滑らかさの調整に使われる．式(1)において，多重節点が存在しなければ，それぞれの節点において C^2 級となる．本研究では，三次スプライン関数を構成するため，式(1)において $k=4$ とする．二つの変数 x, y について，基底関数のテンソル積をとることにより，双三次スプライン関数の基底関数を生成する．すなわち，二次元 B スプラインの基底関数は，$M_{4,i}(x)\ M_{4,j}(y)\ (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$となる．$(i, j)$番目の格子点の座標を$(x_i, y_j) = ((i-1)\delta, (j-1)\delta)$とおく．そして，$M_{4,i}(x)$の節点を $\xi_{i+l} = x_{i+l}\ (l = 0,\cdots, k)$とし，$M_{4,j}(y)$は $\xi_{j+l} = y_{j+l}\ (l = 0,\cdots, k)$とする．具体的に $M_{4,i}(x)$は,

$$M_{4,i}(x) = \sum_{l=-2}^{2} \frac{\{|x_{i+l}-x| + (x_{i+l}-x)\}^3}{w_i'(x_{i+l})}, \tag{2}$$

と表される．ただし，$w_i(x) = \prod_{l=-2}^{2}(x - x_{i+l})$ である．同様に $M_{4,j}(y)$は，変数を x から y に変更することにより得られる．適切に基底関数の線形結合を行うことにより，双三次スプライン関数

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} M_{4,i}(x) M_{4,j}(y), \tag{3}$$

を得る[5].

（２）カルダノの公式

標高 h_0 の等高線は，$h(x, y) = h_0$ の解曲線により表現される．この方程式の一変数をパラメータとして固定すると三次方程式となる．等高線を描くために，三次方程式のいくつかの性質を利用する．この節では,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{4}$$

という一般的な三次方程式を考える．

$$x = x' - b/3a, \tag{5}$$

とおくことにより,

$$x'^3 + px' + q = 0, \tag{6}$$

が得られる．ただし,

$$\begin{aligned} p &= -1/3(b/a)^2 + c/a, \\ q &= -2/27(b/a)^3 - bc/3a^2 + d, \end{aligned} \tag{7}$$

である．ここで，ω と i は，それぞれ正の虚部をもつ 1 の三乗根と四乗根である．カルダノの公式を用いるため,

$$D = -q^2/4 - p^3/27, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} U &= \begin{cases} -q/2 + \sqrt{D}i & (D \ge 0) \\ -q/2 + \sqrt{|D|} & (D < 0) \end{cases}, \\ V &= \begin{cases} \bar{U} & (D \ge 0) \\ -q/2 - \sqrt{|D|} & (D < 0) \end{cases}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} |U|^{1/3}\exp(1/3(\mathrm{Arg}U)i) & (D \ge 0) \\ U^{1/3} & (D < 0) \end{cases}, \\ v &= \begin{cases} \bar{u} & (D \ge 0) \\ V^{1/3} & (D < 0) \end{cases}, \end{aligned} \tag{10}$$

とおく．式(6)の根は,

$$\begin{aligned} x_1' &= \omega u + \omega^2 v, \\ x_2' &= \omega^2 u + \omega v, \\ x_3' &= u + v, \end{aligned} \tag{11}$$

となる．ただし，式(4)において $x_i = x_i' - b/3a\ (i = 1, 2, 3)$ である[6].

$D < 0$ の場合，方程式(4)は，一実根と二虚根をもつ.

$D > 0$ の場合は, $\mathrm{Im}(U) > 0$ すなわち $0 < \mathrm{Arg}(U) < \pi$であるので, u と ωu , $\omega^2 u$ の偏角の範囲は, それぞれ $0 < \mathrm{Arg}(u) < \pi/3$，$2\pi/3 < \mathrm{Arg}(\omega u) < \pi$，$4\pi/3 < \mathrm{Arg}(\omega^2 u) < 5\pi/3$ であ

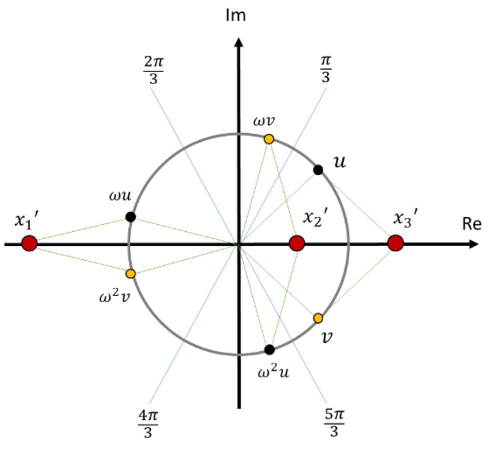

図 1. 異なる三実根 ($D > 0$)

ることが図 1 よりわかる．したがって，異なる三実根 $x_1 < x_2 < x_3$ が得られる．x_i の添え字 i は，左から数えた実根の順序と一致する．

$D = 0$ の場合，式(9)より $U = V = -q/2$ となる．そして $q < 0$ のとき， x_3 が単根となり，x_1 と x_2 が重根となる．一方，$q > 0$ のとき，x_1 が単根となり，x_2 と x_3 が重根となる．

（３）解関数の挙動

一般に，パラメータ付けされた三次方程式

$$f(s,t) = a(t)s^3 + b(t)s^2 + c(t)s + d(t) = 0, \qquad (12)$$

を考える．方程式(12)の四つの係数は，$0 < t < 1$ の連続関数である．方程式(12)の s の根を $s_1(t)$，$s_2(t)$，$s_3(t)$ により表し，それぞれは，式(4)の x_1，x_2，x_3 と対応する．そして，q と D もまた，$0 < t < 1$ でパラメータ付けされる．根の挙動は，次のように分類される．

(i) $D(t) < 0$ の場合，$0 < t < 1$ で一実根と二虚根となる．

(ii) $D(t) > 0$ の場合，$0 < t < 1$ で異なる三実根 $s_1(t) < s_2(t) < s_3(t)$を得る．

さらに，三実根の例外的な挙動について調べる．

(iii) $t = t_d$ で $D(t) = 0$ となる場合，$U(t_d) = V(t_d) = -q(t_d)/2$ となり，方程式(12)は重根をもつ．さらに，$q(t_d) < 0$ の場合は，(ii) における $s_3(t_d)$ が単根となり，$s_1(t_d)$と $s_2(t_d)$が合流し重根となる．一方，$q(t_d) > 0$ の場合は，$s_1(t_d)$ が単根となり，$s_2(t_d)$ と $s_3(t_d)$ が合流し重根となる．

(iv) $t = t_a$ で $a(t) = 0$ となる場合，方程式(12)は二次方程式に退化する．方程式(12)の s に $1/r$ を代入し，次の方程式

$$d(t)r^3 + c(t)r^2 + b(t)r + a(t) = 0, \qquad (13)$$

を得る．$a(t_a) = 0$ なので，(ii) の場合における方程式(13)の一つの根$\varepsilon(t)$ は，t が t_a に近づくにつれ，0 に近づく．方程式(13)の根 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\varepsilon(t)$ は，次の関係

$$\alpha(t) + \beta(t) + \varepsilon(t) = -c(t)/d(t), \qquad (14)$$

$$\alpha(t)\beta(t) + \beta(t)\varepsilon(t) + \alpha(t)\varepsilon(t) = b(t)/d(t), \qquad (15)$$

$$\alpha(t)\beta(t)\varepsilon(t) = -a(t)/d(t), \qquad (16)$$

をもつ．$0 < |\varepsilon(t)| << 1$ を考慮し，式(15)と(16)より $\alpha(t)\beta(t) \simeq b(t)/d(t)$ と $\varepsilon(t) \simeq -a(t)/b(t)$を得る．そして $a(t)b(t) > 0$ の場合，$\varepsilon(t) < 0$ となる．t が t_a に近づくとき，方程式(12)の最も小さい根は，$s_1(t) = 1/\varepsilon(t) \to -\infty$ $(t \to t_a)$を満たす．一方，$a(t)b(t) < 0$ の場合は，$\varepsilon(t) > 0$ となる．そして方程式(12)の最も大きい根は，$s_3(t) = 1/\varepsilon(t) \to +\infty$ $(t \to t_a)$を満たす．

３．等高線作成アルゴリズム

本研究では，三次方程式の実根の挙動を考慮し，格子セルの辺上の等高点をつないでいくことで，等高線をポリゴンとして作成する．ポリゴンの作成過程において，等高線が格子セルの一辺に入る等高点を入口点と呼ぶ．そして，等高線が格子セルの一辺から出ていく等高点を出口点と呼ぶ．このアルゴリズムは，以下の四つのステップで構成される．

(i) 双三次スプライン関数による標高値の補間，
(ii) 等高点をもつ格子セルの特定，
(iii) 等高点の座標を算出，
(iv) 入口点に対応する出口点を選択．

ステップ(ii)では，スツルムの定理を用いて格子セルのそれぞれの辺上の等高点を数え上げる[6]．そして，等高点をもつ格子セルを特定する．ステップ(iii)は，格子セルの辺上の等高点の座標を数値計算法等により算出する．ステップ(iv)では，入口点に対応する出口点を複数の等高点の中から選定し，その等高点をポリゴンに付け加える．このとき，格子セルの辺上の等高点の総数が二点であれば，入口点に対応する出口点は自動的に決まる．しかし，格子セルの辺上の等高点の総数が三点以上のとき，三次方程式の解の挙動により出口点を選択する．以下では，等高線作成に必要な要素について説明する．

（１）標高関数の座標変換

アルゴリズムの簡単のために，新たな格子セルを考えるたびに，表 1 に明示されているような，(x, y)から(s, t)という標高関数の座標変換を行う．注目する格子セルを(i, j)-セルとするとき，その範囲は，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (i-1)\delta \le x \le i\delta,\ (j-1)\delta \le y \le j\delta\}$である．その結果として，セルは単位正方格子になるようにスケール変換され，入口点はセルの下辺に配置される．式(12)の変数(x, y)を(s, t)に変換することで，

$$h_{ij}(s,t) = a_{ij}(t)s^3 + b_{ij}(t)s^2 + c_{ij}(t)s + d_{ij}(t), \qquad (17)$$

と表される．式(17)の各係数は，t の高々3 次多項式である．(i, j)-セルの領域は，$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1\}$により再定義される．ここで，$f_{ij}(s, t) = h_{ij}(s, t) - h_0$ とおく．(i, j)-セル内における標高 h_0 の等高線は，

$$f_{ij}(s,t) = 0, \qquad (18)$$

の解曲線である．

表 1. 標高関数の座標変換

入口点を含む 辺の位置	s	t
南	$x/\delta - i+1$	$y/\delta - j+1$
西	$j - y/\delta$	$x/\delta - i+1$
北	$i - x/\delta$	$j - y/\delta$
東	$y/\delta - j+1$	$i - x/\delta$

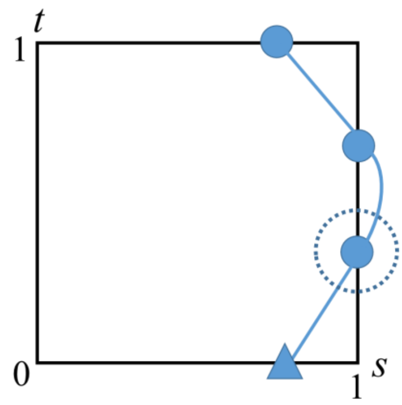

図 2. $D(t) < 0$ の場合

（２）等高点の選択

以下，図を用いて格子セルの辺上の等高点の選択方法を説明する．図では，入口点を三角点で表し，破線で囲まれた点を出口点とする．

a) $D(t) < 0$ $(0 \le t \le 1)$の場合

図 2 のように，格子セルの辺上に存在する等高点の中で，最も小さい t をもつものを，出口点として選択する．

b) $D(t) > 0$ $(0 \le t \le 1)$の場合

本研究では，三次方程式の根の数直線上の大小関係を根の順序と呼ぶ．三次方程式の根の順序を用いて，出口点を選択する．この場合の出口点は，格子セルの辺上に存在する等高点の中で，s 座標が入口点と同じ順番の根であるもののうち，最も小さい t をもつものである．等高点の根の順番は，以下の方法によって，他の等高点の根の順番を調べることなく得られる．

以下の三次多項式関数

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma), (\alpha < \beta < \gamma)$,

を考える．この関数に対し，微分を施すと，

$f'(x) = (x-\beta)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\beta)$,

$f''(x) = 2(3x - \alpha - \beta - \gamma)$,

となる．表 2 から分かるように，各関数の符号を見ることで，注目している等高点の根の順番を把握することができる．

表 2. 三実根の順序の特定

導関数	α	β	γ
$f'(x)$	+	−	+
$f''(x)$	−	N/A	+

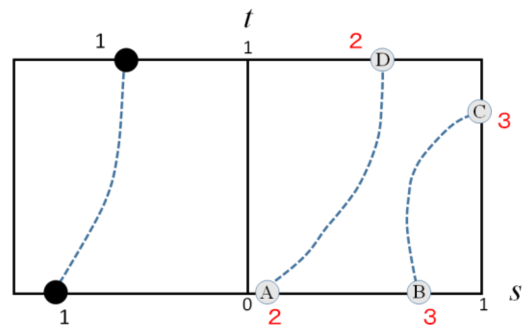

図 3. 実根の順序による等高点の選択

図 3 を用いて，根の順序について説明する．右側のセルを(i, j)番目セルと仮定し，破線は，方程式 $h_{ij}(s, t) - h_0 = 0$ により決まる等高線を表すとする．$0 < t < 1$ において，方程式 $h_{ij}(s, t) - h_0 = 0$ は，三実根をもつ．これらの順序を，$-\infty < s < +\infty$の範囲で左から数える．点 A は，$t = 0$ のとき二番目の実根であり，点 D は $t = 1$ のときの二番目の実根である．したがって，二番目の解曲線により表される等高線は，点 A から右側セルに侵入し，点 D を通りセルから出ていく．同様に，三番目の解曲線により表される等高線は，点 B から右側セルに侵入し，点 C を通りセルから出ていく．つまり，等高線のポリゴンの作成において，点 A の次には点 D が追加される．別の等高線のポリゴンでは，点 B の次に点 C が追加される．

c) $D(t_d) = 0$ となる解 t_d $(0 < t_d < 1)$が存在する場合

出口点の選択方法は，$D'(t_d)$と $q(t_d)$の符号によって変わる．

(i) $D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) > 0$ の場合

図 4 のように，入口点の根の順番が 1 番のとき，$t < t_d$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t > t_d$において最小の t をもつ等高点を出口点とする．

図 5 に示すように，入口点の根の順番が 2(3)番のとき，$t < t_d$において根の順番が 2(3)番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t < t_d$において最大の t をもち，根の順番が 3(2)番となる等高点を出口点とする．

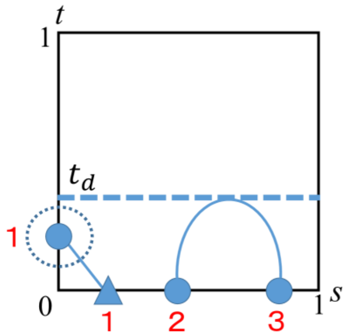

図 4.　$D'(t_d)$ < 0 かつ $q(t_d) > 0$，入口点の根の順序が 1 番の場合

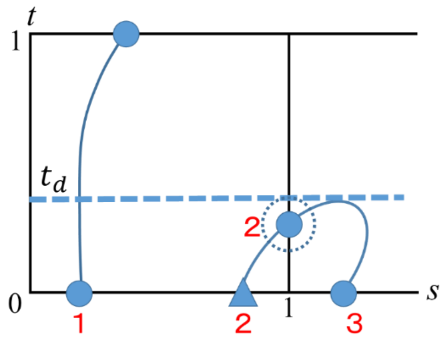

図 5.　$D'(t_d)$ < 0 かつ $q(t_d) > 0$，入口点の根の順序が 2 番の場合

(ii)　$D'(t_d)$ < 0 かつ $q(t_d) < 0$ の場合

入口点の根の順番が 3 番のとき，$t < t_d$において根の順番が 3 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，図 6 のように，$t > t_d$において最小の t をもつ等高点を出口点とする．

入口点の根の順番が 1(2)番のとき，$t < t_d$において根の順番が 1(2)番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t < t_d$において最大の t をもち，根の順番が 2(1)番となる等高点を出口点とする．

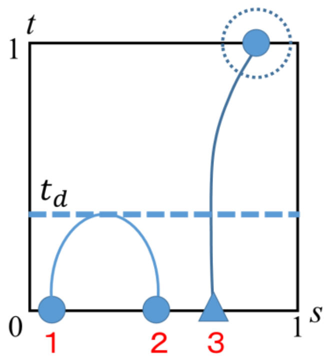

図 6. $D'(t_d)$ < 0 かつ $q(t_d) > 0$，入口点の根の順序が 1 番の場合

(iii)　$D'(t_d)$ > 0 かつ $q(t_d) > 0$ の場合

入口点以外の等高点の中で，$t < t_d$において最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t > t_d$において最小の t をもち，根の順番が 1 番となる等高点を出口点とする．

(iv)　$D'(t_d)$ > 0 かつ $q(t_d) < 0$ の場合

入口点以外の等高点の中で，$t < t_d$において最小の t を もつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t > t_d$において最小の t をもち，根の順番が 3 番となる等高点を出口点とする．

d) $a(t_a) = 0$ の解 t_a $(0 < t_a < 1)$が存在する場合

出口点の選択方法は，$a'(t_a)b(t_a)$と $D(t)$の符号によって変わる．

(i)　$D(t) < 0$ $(0 < t < 1)$の場合

入口点以外の等高点の中で，$t < t_a$において最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．

(ii)　$a'(t_a)b(t_a)$ > 0 かつ $D(t) > 0$ $(0 < t < 1)$の場合

図 7 のように，入口点の根の順番が 1(2)番のとき，$t < t_a$において根の順番が 1(2)番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t > t_a$におい最小の t をもち，根の順番が 2(3)番となる等高点を出口点とする．

図 8 に示すように，入口点の根の順番が 3 番のとき，

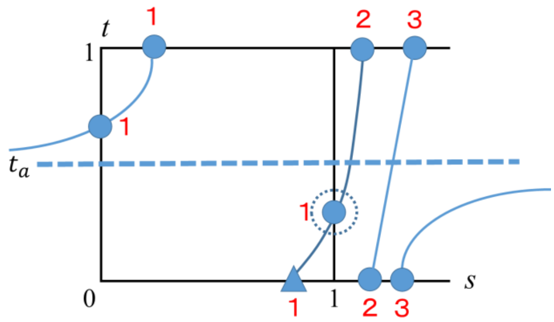

図 7.　$a'(t_a)b(t_a)$ > 0 かつ $D(t)$ > 0，入口点の根の順序が 1 番の場合

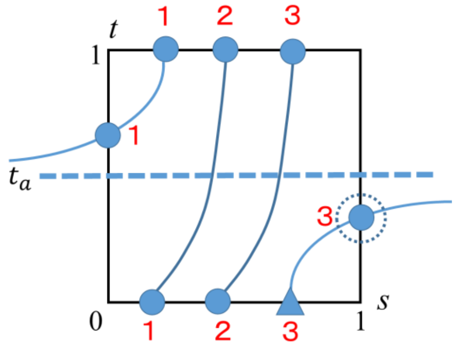

図 8.　$a'(t_a)b(t_a)$ > 0 かつ $D(t) > 0$，入口点の根の順序が 3 番の場合

$t < t_a$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．

(iii) $a'(t_a)b(t_a) < 0$ かつ $D(t) > 0$ $(0 < t < 1)$の場合

入口点の根の順番が 2(3)番のとき，$t < t_a$ において根の順番が 2(3)番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．そのような等高点が存在しない場合には，$t > t_a$ において最小の t をもち，根の順番が 1(2)番となる等高点を出口点とする．

入口点の根の順番が 1 番のとき，$t < t_a$ において根の順番が 1 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とする．

e) $D(t_d) = 0$ と $a(t_a) = 0$ となる解 t_d, t_a が存在する場合

t_d と t_a の大小関係による順番に従って，c)と d)の手続きをおこなう．一般に，$D(t) = 0$ または $a(t) = 0$ となる t が $0 < t < 1$ において，複数存在する場合は，それぞれの手続きを適切に複合させて実行する．

たとえば，$D(t_d) = 0$ と $a(t_a) = 0$ となる解 t_d, t_a が一つずつ存在する格子セルを考える．このとき，格子セルは，$a'(t_a)b(t_a) > 0$ かつ $D(t) > 0$ $(0 < t < t_d)$であり，$D'(t_d) < 0$ かつ $q(t_d) < 0$ とする．この場合，実行すべき手続きは，d)-(ii) と c)-(ii) を複合させたものになる．

図 9 のように，根の順番が 1 番の入口点を考える．まず，d)-(ii) の手続きをおこなう．$0 < t < t_a$ において根の順

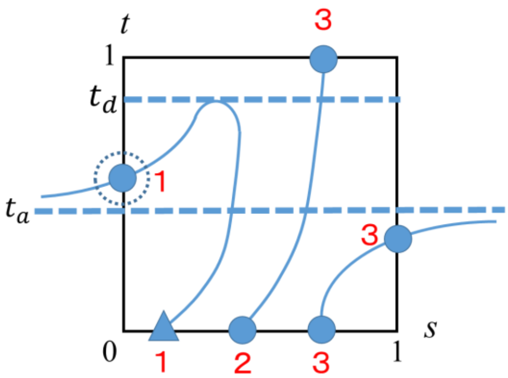

図 9. d) − (ii)かつ入口点の根の順序が 1 番の場合，c) − (ii)かつ入口点の根の順序が 2 番の場合

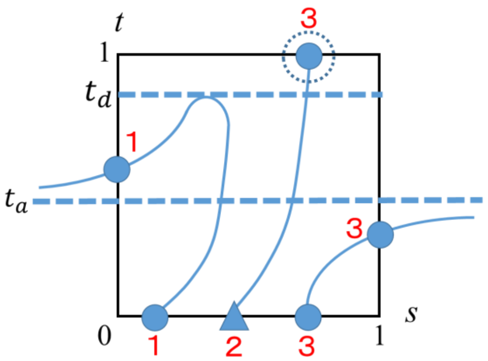

図 10. d) − (ii)かつ入口点の根の順序が 2 番の場合，c) − (ii)かつ入口点の根の順序が 3 番の場合

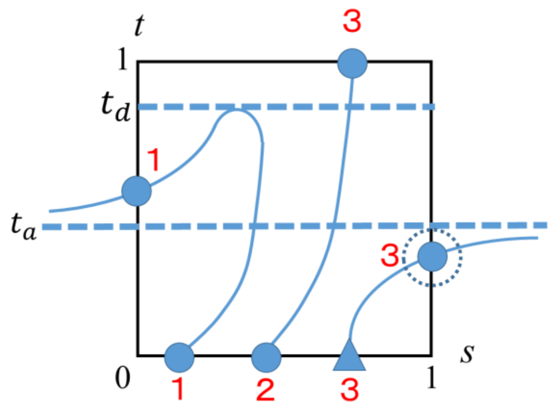

図 11. d) − (ii)かつ入口点の根の順序が 3 番の場合

番が 1 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在しない．したがって，入口点を含む解関数は，$t_a < t < t_d$ において根の順番が 2 番となる解関数に接続される．次に，c)-(ii) の手続きをおこなう．いま，$t > t_a$ において，根の順番が 2 番となる解関数に接続されており，入口点の根の順番を 2 番とみなす．入口点の根の順番が 2 番のとき，$t_a < t < t_d$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とするが，そのような等高点が存在しない．したがって，$t_a < t < t_d$ において最大の t をもち，根の順番が 1 番となる等高点を出口点とする．

図 10 のように，根の順番が 2 番の入口点を考える．まず，d)-(ii) の手続きをおこなう．$0 < t < t_a$ において根の順番が 2 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在しない．したがって，入口点を含む解関数は，$t_a < t < t_d$ において根の順番が 3 番となる解関数に接続される．次に，c)-(ii) の手続きをおこなう．いま，$t > t_a$ において，根の順番が 3 番となる解関数に接続されており，入口点の根の順番を 3 番とみなす．入口点の根の順番が 3 番のとき，$t_a < t < t_d$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在する場合に，その点を出口点とするが，そのような等高点が存在しない．したがって，$t > t_d$ において最小の t をもつ等高点を出口点とする．

図 11 のように，根の順番が 3 番の入口点を考える．まず，d)-(ii) の手続きをおこなう．$0 < t < t_a$ において根の順番が 3 番となる等高点の中で，最小の t をもつ等高点が存在するためその点を出口点とする．

（3）次のセルの特定

等高線の連結成分についてのポリゴン作成は，最初の格子セルにおける入口点から始め，今のセルの入口点と出口点を正しくつなぎ，その出口点をポリゴンに加える．この過程を最初の格子セルに戻るまで繰り返し実行する．この過程において，今のセルの出口点または次のセルの入口点が存在する新たな格子セルを選択する必要がある．つまり，今のセルの出口点を入口点とする次のセルに移動する．等高点が格子セルの頂点に存在していなければ，

今のセルと次のセルは辺を共有する．この場合，次のセルは自明である．

しかし，出口点が頂点にある場合，次のセルは，等高線に直交する標高関数の勾配ベクトルにより決まる．すなわち，勾配ベクトルが t 方向に向いている場合，今のセルに s 方向に隣接する格子セルが次のセルとなる．勾配ベクトルが s 方向に向いている場合，今のセルに t 方向に隣接する格子セルが次のセルとなる．勾配ベクトルの方向が s 方向でも t 方向でもない場合，今のセルに対して斜めに隣接する格子セルが次のセルとなる．次のセルが決まるたびに，（1）の座標変換をおこなう．

４． ケーススタディ

本研究では，日本地図センターより刊行されている JMC50m メッシュ（標高）という標高値のデータを扱う．このデータは，国土交通省国土地理院が提供する基盤地図情報（数値標高モデル）10m メッシュを基として，国土地理院が刊行していた数値地図 50m メッシュ（標高）と同等のデータとしたものである．さらに，標準地域メッシュ（2 次メッシュ）を経度方向および緯度方向に，それぞれ 200 等分して得られる各区域，つまり 2 万 5 千分 1

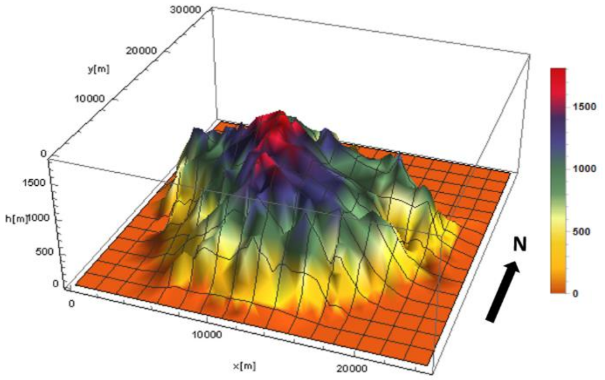

図 12. 双三次スプライン関数による標高関数

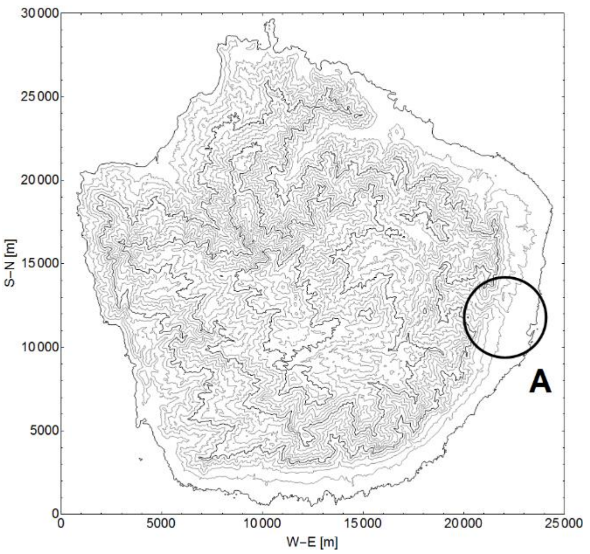

図 13. 屋久島の等高線

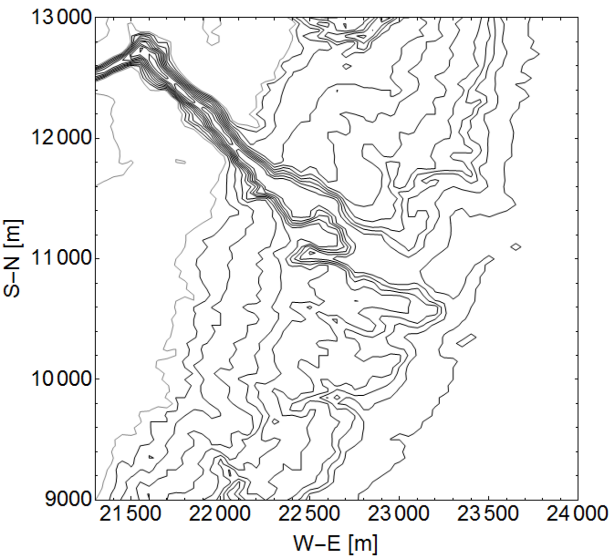

図 14. 範囲 A における屋久島の等高線

地形図上で約 2mm×2mm の中心の標高が記録されている．標高値の間隔は，緯度つまり南北方向で 1.5 秒，経度つまり東西方向で 2.25 秒となり，実距離で約 50m×約 50m となる．ファイル形式に関しては，MEM 形式が採用されている．この形式は数値地図 50m メッシュ（標高）に準拠しているが，数値地図 50m メッシュ（標高）と異なり，世界測地系の 2 次メッシュとなっているため，日本測地系の座標は記録していない．世界測地系の 2 次メッシュ単位で，一つのファイルになっているため，使用したい地域が複数の 2 次メッシュをまたがる場合は，データの重ね合わせが必要である．標高値のデータの海部における値は，-999.9 となっているが，-1 に変更した[7].

ケーススタディとして，鹿児島県の南部に位置する屋久島のデータにアルゴリズムを適用し，等高線を描いていく．JMC50m メッシュ（標高）のうち，屋久島を表す 498×598 の格子セルによって構成される標高値のデータを扱う．屋久島の最高標高値は 1935m である．

提案手法におけるステップ(i)のために，m = 498, n = 598, そして δ= 50 と設定し，双三次スプライン関数による標高値の補間をおこなう．図 12 は，標高値の補間後の標高関数を表している．アルゴリズム全体の結果として，図 13 には，標高 0m から 1900m までの等高線が 100m 間隔ごとに描かれている．図 14 は，等高線がポリゴンで構成されていることを確認するために図 13 における範囲 A を拡大したものであり，標高 0m から 100m を 10m 間隔で表示している．このスケールによれば，点と線分で構成されるポリゴンの辺が確認できる．

表 3 には，標高 0m と 500m，1000m，1500m それぞれの格子セルの数を格子セルの辺上の等高点数別に表示する．例えば，表 3 において 2 行 2 列目の 4863 という数字は，標高 500m の等高線と 4 辺が 2 点で交わる格子セルの個数を示す．

表 3. 辺上の等高点数別のセル数

セルの辺上の等高点数	0m	500m	1000m	1500m
1	209	146	164	73
2	3020	4863	3883	1453
3	84	58	54	22
4	52	87	63	19
5	5	4	2	2
6	0	1	1	1
7	0	0	0	1
合計	3370	5159	4167	1571

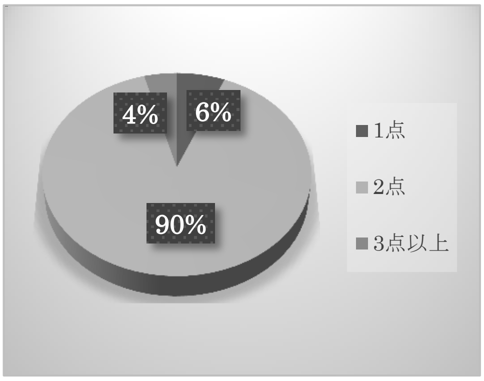

図 15. 標高 0m の等高点数別セル数の割合

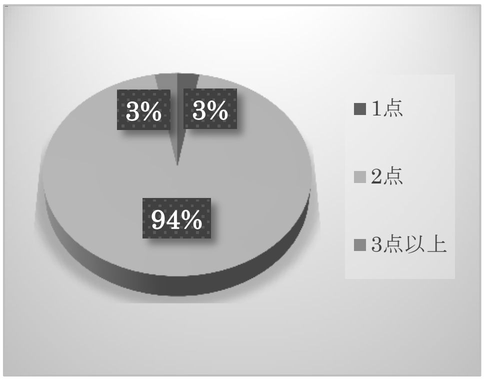

図 16. 標高 500m の等高点数別セル数の割合

図 15 と図 16 に表 3 の結果の一部を円グラフで表す．各図において，等高点の個数が 2 点であるセルの割合は 9 割以上であり，出口点は三次方程式のアルゴリズムを使わずに自動的に決まる．図 17 は，縦軸にポリゴン作成にかかる計算時間 t [秒]，横軸にポリゴンの頂点数 n を表したものである．回帰式は，$t = 0.046\,n - 0.228$ となり，その寄与率は，$R^2 = 0.996$ となった．ただし，サンプルデータは，100m 間隔，0m から 1900m 範囲で，すべてのポリゴンを採用している．

実験環境は以下のとおりである．

Machine: Aspire M3970,
CPU: Inter(R) Core(TM) i7-3770 3.40GHz,

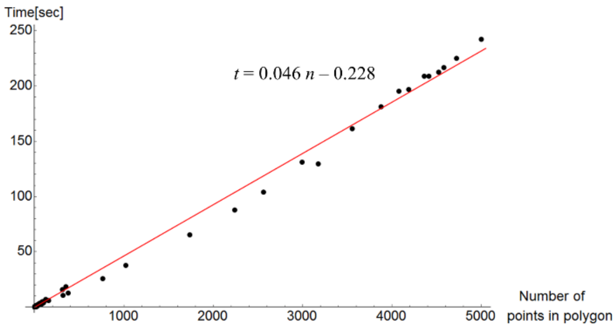

図 17. 等高線ポリゴンの生成時間

OS: Microsoft Windows 7 Enterprise,
Memory: 8.00GB,
Program: Wolfram Mathematica 10.3.

５．おわりに

本研究は，双三次スプライン近似により標高関数を生成し，三次方程式の解の挙動を見ることで対象とする標高の等高点を結び，等高線をポリゴンとして求めた．同一のサイズの格子に対し，双三次スプラインは双一次スプラインに比べて，複雑な地形の近似精度が上がる分，等高点を結ぶことが難しくなる．本アルゴリズムにより，この問題を解決し，さらに格子セルの辺と等高線の交点を結んだポリゴンを網羅することができる．

今後の課題として，格子セル内の等高線を抽出するアルゴリズムが求められる．

参考文献

［1］ G. Cottafava & G. L. Moli: “Automatic contour map”, Communication of the ACM, vol.12(**7**), pp.386–391, 1969.
［2］ A. Lopes & K. Brodlie: “Accuracy in contour drawing”, Eurographics UK Conference Proceedings, pp.301–311, 1998.
［3］ C. Maple: “Geometric design and space planning using the marching squares and marching cube algorithms”, IEEE Computer Society, International conference on geometric modelling and graphics, pp.90–95, 2003.
［4］ M. J. McCullagh: “Creation of smooth contours over irregularly distributed data using local surface patches”, Geographical Analysis, vol.13(**1**), pp.51–63.
［5］ 吉田浩三: 「スプライン関数とその応用」，教育出版, 1979.
［6］ 高木貞治: 「代数学講義」，共立出版, 1930.
［7］ H. Goto & Y. Shimakawa: “Storage-efficient method for generating contours focusing on roundness”, International Journal of Geographical Information Science, vol.30(**2**), pp.200–220, 2015.