

### K-S検定を用いた2ユニット並列システムにおける従属故障の検知に関する研究

OTA, Shuhei / 太田, 修平

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

57

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

7

(発行年 / Year)

2016-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00013372>

# K-S検定を用いた2ユニット並列システムにおける 従属故障の検知に関する研究

A STUDY ON DEPENDENT-FAILURE DETECTION FOR 2-UNIT PARALLEL SYSTEMS  
BY KOLMOGOROV-SMIRNOV TEST

太田 修平  
Shuhei OTA

指導教員 木村 光宏

法政大学大学院理工学研究科システム工学専攻修士課程

This thesis proposes a statistical test method for 2-unit parallel systems, which discriminates whether the units failed independently or dependently. The method which makes a system redundant by combining several units is often used in order to construct a highly-reliable system. However, if the units break down dependently, the reliability of the system would decrease. We present the statistical test scheme based on the failure occurrence times of the units. It is assumed that the life time distribution of the survival unit changes if one unit fails. Therefore our scheme can find dependent failure occurrences by identifying the change of the distribution. The performance of the proposed method is shown by simulation studies.

**Key Words** : 2-unit parallel system, dependent failure, Kolmogorov-Smirnov test

## 1. はじめに

### (1) 研究背景

古くから、信頼度の高いシステムを構築するために、同一のユニットを組み合わせることで、システムが早期に故障するリスクを下げる手法が頻りに用いられてきた。特に2つのユニットを並列に組み合わせてできたシステムを2ユニット並列システムと呼ぶ。並列システムは産業システムにおいて広く用いられており、例えば並列コンピュータやマルチCPUなどがある。そのため並列システムの寿命分布の推定や、その他の性質に関してよく研究されてきた。ただしその多くは、ユニットが独立に故障するという仮定を用いている。

故障現象は、独立故障と従属故障に大別できる。独立故障とは、各ユニットが他のユニットに関係なく、独立に故障する現象を意味する。一方で従属故障は、各ユニットの故障の原因が、他のユニットの影響を受ける故障現象を意味する。さらにその原因によって従属故障は細分化され、例えば、松岡 [1] によれば、共通の原因によって複数のユニットが同時に故障する共通原因故障や、あるユニットの故障がほかのユニットの故障を引き起こすカスケード故障などがある。

独立故障の場合、これまで多くの研究者が並列システムに対する信頼性解析に取り組んできた。例えば、古くは1960年代に、Zelen et al.[2]によってなされたと言われている。その後50年間、今日まで、様々な並列システムの数理モデルや、それに対する解析手法が提案されている。それら研究の数は膨大であり、多くは「2ユニット並列システム」をキーワードとしている。

一方で、従属故障は数学的に扱うことが困難なために、従属故障するシステムの信頼性解析の研究は、独立故障と比べ

るとあまり多くはない。しかし、もし各ユニットが従属故障を起こす場合、そのシステムの信頼度が低下する恐れがある。このとき従来のように独立故障を仮定した解析手法を用いた場合、システムの信頼度を誤って推定することが問題となる。この問題に対して、多くはないが研究はされている。

### (2) 従属故障の周辺研究

従属故障の研究では、いくつかの従属故障を表すモデルが提案され、そのモデルに基づき、システムの平均故障時間や信頼度の評価が行われてきた。多変量確率分布による従属故障のモデル化は、古くは、Marshal-Olkin の多変量指数分布 [3] によってなされた。これを受けて Rajamanickam et al.[4] は Marshal-Olkin の多変量指数分布を用いて、2ユニット並列システムの従属故障をモデル化した。そして、そのシステムの平均故障間隔や稼働率を解析的に導出している。近年では、多変量指数分布の代わりに、多変量確率同時分布のクラスであるコピュラを用いたモデルも提案されている [5]。

他のモデリングとして、例えば Malhotra et al.[6] は、マルコフモデルによって従属故障を表現し、そのシステムの稼働率を導出した。ハザードレートによる従属故障のモデルは影山 [7] によって提案された。そして Ota et al.[8] は、そのシステムに対して、従属故障を考慮した信頼度推定手法を提案した。Johansson et al.[9] は、列車の送電網のカスケード故障をモデル化するために、ユニット間に相互依存性のある、ネットワークシステムの故障モデルを提案した。Yuge et al.[10] は、従属故障の、特に共通原因故障をモデル化した。Dobson et al.[11] は、システムを構成するユニットが互いに負荷を共有して故障するモデルを提案し、従属故障の中でもカスケード故障のモデル化に貢献した。

### (3) 研究目的

本研究は影山 [7] の提案したハザードレートによる並列システムの故障モデルを対象に、そのシステムの信頼性評価に貢献することを目的とする。この目的を次の2段階の研究 (i) 従属故障とシステムの寿命の関係を解析的に評価、(ii) 故障時刻のデータから、ユニットが従属故障を起こしているかどうかを判定する検定手法を開発、によって達成する。

前者は、従属故障がシステムの寿命に及ぼす影響を評価する上で重要である。

後者は、ユニット間の独立性が絶対的に望まれる高信頼度なシステムの開発において重要である。従属故障が起きているかどうかを定量的に判定するという研究はこれまでに行われていないため、この点が本研究の新規性である。

## 2. 予備知識

本研究に必要な数学的知識として、ハザードレート、ワイブル分布そしてコルモゴルフ・スミルノフ検定について説明する。ハザードレートとワイブル分布は、従属故障をモデル化するために用いる。コルモゴルフ・スミルノフ検定は、5章の従属故障の検知手法の核をなす統計的検定手法である。

### (1) ハザードレート

ハザードレートとは、時刻  $t$  まで稼働していたユニットが、その後わずかな時間で故障が起こるかの度合いを表す関数である。確率変数  $T$  の分布関数を  $F(t)$ 、その密度関数を  $f(t)$  としたとき、 $T$  のハザードレート  $h(t)$  は

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad (1)$$

と定義される。

ハザードレートはその特徴から3つに分類される。 $t$  に関して  $h(t)$  が単調増加のとき、ハザードレートが IFR (increasing failure rate);  $t$  に関して単調減少のとき、ハザードレートが DFR (decreasing failure rate);  $t$  に依らず  $h(t)$  が定数のとき、ハザードレートが CFR (constant failure rate) という。

### (2) ワイブル分布

ワイブル分布は非負確率変数を表す連続型の確率分布である。その分布関数は位置パラメータを考慮しないとき、2つのパラメータ  $\lambda, m$  を持ち、次のように定義される。

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^m} \quad (\lambda > 0, m > 0). \quad (2)$$

また、ワイブル分布の密度関数  $f(t)$  とハザードレート  $h(t)$  はそれぞれ以下ようになる。

$$f(t) = \lambda m t^{m-1} e^{-\lambda t^m}, \quad (3)$$

$$h(t) = \lambda m t^{m-1}. \quad (4)$$

$m$  の値によって関数  $h(t)$  の形状が変わることから、一般に  $m$  を「形状パラメータ」と呼ぶ。また  $\lambda$  のことを「尺度パラメータ」と呼ぶ。ワイブル分布は、圧力や温度などの外的要因が働くことによってユニットが故障する現象のモデリングに応用されている。

### (3) コルモゴルフ・スミルノフ検定

コルモゴルフ・スミルノフ検定 (Kolmogorov-Smirnov test. 以下、K-S 検定) は、有限個の標本が任意の確率分布に従っているかどうかを調べる適合度検定の1つである [12]。標本の経験分布と、帰無仮説で仮定される確率分布の分布関数と

の最大のユークリッド距離を K-S 統計量として、その値が統計的に有意であるかどうかを判定する。Feller [12] によれば、これはコルモゴルフ [13] によって提案され、一般に1標本 K-S 検定と呼ばれている。次の定理は1標本 K-S 検定における K-S 統計量の分布関数を与える。

定理：1標本 K-S 検定における K-S 統計量の分布関数

$F(x)$  を標本  $x_1, x_2, \dots, x_n (> 0)$  の連続な分布関数とし、 $S_n(x)$  をその標本の経験分布とする。K-S 統計量  $D_n$  を次のように定義する。

$$D_n := \sup_{0 < x < \infty} |F(x) - S_n(x)|. \quad (5)$$

このとき任意の  $x > 0$  に対して、 $n \rightarrow \infty$  で、

$$\Pr[\sqrt{n}D_n \leq x] \rightarrow L(x), \quad (6)$$

が成り立つ。ここで  $L(x)$  は連続な分布関数で、 $x > 0$  に対して

$$L(x) = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-j^2 x^2}, \quad (7)$$

である。

以上の定理より、1標本 K-S 検定の検定手順を以下に示す。

#### K-S 検定の検定手順

##### 手順1：仮説の設定

帰無仮説  $H_0$  : 標本が確率分布  $F$  に従っている  
対立仮説  $H_1$  : 標本が確率分布  $F$  に従っていない

手順2：有意水準  $\alpha$  の設定 (一般に、 $\alpha = 0.5$  もしくは  $\alpha = 0.01$ )

##### 手順3：K-S 統計量 $D_n$ の計算

$$D_n = \sup_{0 < x < \infty} |F(x) - S_n(x)|.$$

##### 手順4：有意性の判定

$\sqrt{n}D_n > 1.36$  であれば、有意水準 5% で  $H_0$  を棄却し、 $H_1$  を採用する。

$\sqrt{n}D_n > 1.62$  であれば、有意水準 1% で  $H_0$  を棄却し、 $H_1$  を採用する。

帰無仮説で仮定した確率分布と、標本の経験分布との食い違いが大きいほど、K-S 統計量  $D_n$  は大きくなることから、K-S 検定は片側検定で与えられる。さらに、検定に用いる確率分布には任意の分布を仮定できるため、K-S 検定はノンパラメトリックな検定手法であることが広く知られている。ノンパラメトリックである理由は、K-S 統計量  $D_n$  の分布が、中心極限定理によって保証されているからである [12]。そのため、検定に必要なサンプルサイズ  $n$  は、中心極限定理を利用するのに必要な 20 以上でよい。

## 3. 故障モデル

### (1) 仮定と概要

本研究で取り扱うシステムに対して以下の仮定を行う。

仮定 I : 同じ処理を行うユニット 2 つが並列に配置されたシステムである。図 1 はその模式図を示す。

仮定 II : ユニットのハザードレートは DFR, CFR または IFR である。

仮定 III : 両ユニットが稼働状態ならば、ユニットが故障するまでの時間のハザードレートは

$$h_1(t) = \lambda_1 m_1 t^{m_1-1} \quad (\lambda_1, m_1 > 0), \quad (8)$$

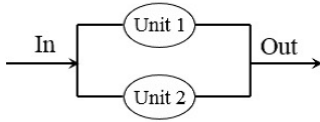


図 1: 2 ユニット並列システムの模式図.

とする. これは寿命分布がワイブル分布に従うと同義である. この寿命分布関数を  $F(t)$  とすると, ハザードレートの定義より

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\int_0^t h_1(x) dx} \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 m_1 t^{m_1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

となる.

**仮定 IV**: 片方のユニットが時刻  $t = t_f$  で故障した場合, その時点から, もう一方の生き残っているユニットの故障時刻は, 新しく  $t_f$  による条件付きのハザードレート

$$h_2(t|t_f) = g(t) - g(t_f) + h_1(t_f) \quad (t > t_f), \quad (10)$$

に従う. ただし,

$$g(t) = \lambda_2 m_2 t^{m_2 - 1} \quad (\lambda_2, m_2 > 0). \quad (11)$$

**仮定 V**:  $t = 0$  で同時にユニットを稼働させ, 両ユニットとも故障した時刻が, システム全体の故障時刻である.

本研究では, 上記の仮定を満たす故障を, 2 ユニット並列システムの「ワイブル型従属故障」と呼ぶ. このモデルはユニット単体の故障時刻がワイブル分布に従い, さらにハザードレートによって, ユニット同士の故障時刻が関係付けられた故障現象を表している. この仮定のように, 並列システムの故障現象をハザードレートでモデル化する最近の研究は Chiodo et al. [14] が詳しい. ただし文献 [14] は独立故障のみの議論であり, 本論文で議論するワイブル型従属故障モデルの新規性は従属故障を扱うという点である.

モデルに必要なパラメータは  $\lambda_1, \lambda_2, m_1$  そして  $m_2$  である. これらの値が与えられると, 本研究のモデルは 1 つの故障現象を表すことができる. 本論文では, このようにパラメータの値の組み合わせによって定まる 1 つの故障現象を「故障ケース」と呼ぶ.

この故障モデルはハザードレートのパラメータが変化することで従属故障を表している. ハザードレートが  $h_1(t)$  から  $h_2(t|t_f)$  へと切り替わった際に, 尺度パラメータと形状パラメータが変化しない場合のみ, 独立故障を表しており, それ以外の故障ケースは従属故障である. すなわち, ワイブル型従属故障モデルは

- $\lambda_1 = \lambda_2$  かつ  $m_1 = m_2$  ならば, 独立故障
- $\lambda_1 < \lambda_2$  または  $m_1 < m_2$  ならば, 従属故障

を表現する.

上記の仮定に従うシステムを, 仮想的にシミュレーションで稼働させることによって, ユニットの故障時刻に関するデータとして「先故障時刻」, 「後故障時刻」, そして「差分時刻」, の 3 つは生成される (それぞれ実現値として,  $t_f, t_l$ , そして  $t_d$  とおく. さらにそれらの大文字表記  $T_f, T_l$ , そして

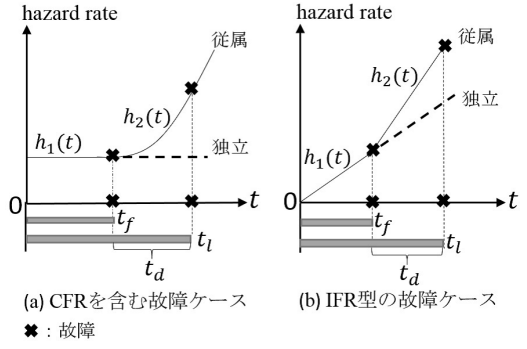


図 2: 従属故障を表すハザードレートの変化例.

$T_d$  を確率変数とする). 先故障時刻とは, 2 つのユニットのうち, どちらか片方のユニットが先に故障した時刻を指す. 後故障時刻は, その後にもう一方のユニットが壊れた時刻を意味する. そして差分時刻は, 後故障時刻と先故障時刻との差をとった  $t_l - t_f$  を表す.

先故障時刻  $t_f$  がハザードレート  $h_1(t)$  に従い, 差分時刻  $t_d$  が  $h_2(t)$  に従うように図 2 を描いた. 左図 (a) のグラフは,  $h_1(t)$  が一定であり CFR の故障現象を表している. 時刻  $t_f$  において先故障が発生したことによって, ハザードレートが  $h_2(t)$  に切り替わり IFR の故障に変化している. もしユニット同士が独立に故障するならば,  $t_f$  以降も破線のように  $h_1(t)$  である. 右図 (b) のグラフは,  $t = 0$  からハザードレートが上昇する IFR の故障現象を表している. 先故障時刻  $t_f$  以降, ハザードレートの関数の傾きが増加していることに注目されたい. 本研究はこのように  $h_1(t)$  と  $h_2(t)$  の形状パラメータと尺度パラメータを組み合わせて, 任意の従属故障現象の表現をする.

ユニット単体の寿命分布がワイブル分布であるときに共倒れの故障が起こるのであれば, ハザードレートの切り替わりによって, この従属故障をモデル化することができるだろう. それを数式で表したのが  $h_1(t)$  と  $h_2(t)$  である.

## (2) 故障時刻の分布関数

ハザードレートによって定義された, 各故障時刻を表す確率変数  $T_f, T_d$  そして  $T_l$  の分布関数を導出する.

### a) 先故障時刻 $T_f$

ハザードレート  $h_1(t)$  に従う確率変数を  $T_1, T_2$  とすると, 先故障時刻  $T_f$  は  $T_f = \min(T_1, T_2)$  が成り立つ. よって  $T_f$  の分布関数を  $F_f(t)$  とおくと,  $F_f(t)$  は以下ようになる.

$$\begin{aligned} F_f(t) &= \Pr[\min(T_1, T_2) \leq t] \\ &= 1 - \Pr[\min(T_1, T_2) > t] \\ &= 1 - \{1 - F(t)\}^2 \\ &= 1 - \text{Exp}[-2\lambda_1 t^{m_1}]. \end{aligned} \quad (12)$$

さらに密度関数を  $f_f(t)$  とおくと,  $f_f(t)$  は以下ようになる.

$$\begin{aligned} f_f(t) &= \frac{dF_f(t)}{dt} \\ &= 2\lambda_1 m_1 t^{m_1 - 1} \text{Exp}[-2\lambda_1 t^{m_1}]. \end{aligned} \quad (13)$$

式 (12) から, 先故障時刻もまたワイブル分布に従う.

### b) 差分時刻 $T_d$

差分時刻  $T_d$  の分布関数を  $F_d(t|T_f = t_f)$  とする (以下, 簡略化して  $F_d(t|t_f)$  と書く). 差分時刻  $T_d$  は, 先故障時刻の

確率変数  $T_f$  の、条件付き確率変数であることに注意して、 $F_d(t|t_f)$  はハザードレートの定義より以下のように導くことができる。

$$\begin{aligned} F_d(t|t_f) &= 1 - e^{-\int_0^t h_2(x+t_f|t_f)dx} \\ &= 1 - e^{-\int_0^t g(x+t_f)-g(t_f)+h_1(t_f)dx}, \\ M(t_f) &= g(t_f) - h_1(t_f) \text{ において、積分を展開すると} \\ &= 1 - e^{-[\lambda_2(x+t_f)^{m_2} - M(t_f)x]_0^t} \\ &= 1 - e^{-\lambda_2(t+t_f)^{m_2} + M(t_f)t + \lambda_2 t_f^{m_2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

#### c) 後故障時刻 $T_l$

後故障時刻  $T_l$  は先故障時刻と差分時刻の和  $T_f + T_d$  であるため、その和の分布を求める必要がある。 $T_l$  の分布関数を  $F_l(t)$  とすると、 $T_l = T_f + T_d$  より  $F_l(t)$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} F_l(t) &= \Pr[T_f + T_d \leq t] \\ &= \int_0^t \Pr[T_d \leq t - t_f | T_f = t_f] f_f(t_f) dt_f \\ &= \int_0^t F_d(t - t_f | t_f) f_f(t_f) dt_f. \end{aligned} \quad (15)$$

ここで式中の  $t_f$  は被積分変数であり、 $F_l(t)$  は  $t_f$  に依存しない変数  $t$  のみの関数であることに注意する。 $m_1, m_2$  がそれぞれ 1 もしくは 2 など特別な場合を除いて、式 (15) は数値積分によって計算できる。

#### d) 独立故障での分布関数

ワイブル型従属故障のモデルは、ユニットが互いに独立して故障する 2 ユニット並列システムも表現できることを確認する。古典的な独立故障の場合、2 つのユニットの寿命時間を  $T_1, T_2$  とすると、その分布関数は  $F(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t^{m_1}}$  である。よって後故障時刻の従う分布関数  $F_l(t)$  は

$$F_l(t) = \Pr[\max(T_1, T_2) \leq t] = (1 - e^{-\lambda_1 t^{m_1}})^2, \quad (16)$$

となる。故障ケースが独立の場合に、式 (15) と式 (16) が一致することを示すことで、ワイブル型従属故障モデルが、古典的な独立故障のモデルを含んでいることを確認する。独立故障の場合、パラメータは  $\lambda_1 = \lambda_2$  かつ  $m_1 = m_2$  であった。このとき式 (14) において  $M(t_f) = 0$  となるので、式 (15) は

$$\begin{aligned} F_l(t) &= \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2 t_f^{m_2} + \lambda_2 t_f^{m_2}}) f_f(t_f) dt_f \\ &= \int_0^t f_f(t_f) dt_f - \int_0^t e^{-\lambda_2 t_f^{m_2} + \lambda_2 t_f^{m_2}} f_f(t_f) dt_f, \\ \lambda_2 &= \lambda_1 \text{ かつ } m_2 = m_1 \text{ より} \\ &= \int_0^t f_f(t_f) dt_f - 2e^{-\lambda_1 t^{m_1}} \int_0^t \lambda_1 m_1 t_f^{m_1-1} e^{-\lambda_1 t_f^{m_1}} dt_f, \\ \text{2つの積分はそれぞれワイブル分布の分布関数なので} \\ &= (1 - e^{-2\lambda_1 t^{m_1}}) - 2e^{-\lambda_1 t^{m_1}} (1 - e^{-2\lambda_1 t^{m_1}}) \\ &= 1 - 2e^{-\lambda_1 t^{m_1}} + e^{-2\lambda_1 t^{m_1}} \\ &= (1 - e^{-\lambda_1 t^{m_1}})^2. \end{aligned} \quad (17)$$

よって、式 (15) と式 (16) が一致することが示された。

## 4. 平均故障時間の評価

従属故障がシステムの寿命に与える影響を考えることは、その故障現象を捉える上で重要なことである。そのため本章

では、独立故障と従属故障の 2 つの故障現象を比較して、システムの平均故障時間 (mean time to failure, 以下 **MTTF**) の違いを考察する。MTTF はシステムの品質評価に用いられる指標であり、ここでは両ユニットとも故障するまでの時間、すなわちシステムが故障した後故障時刻  $T_l$  の期待値を意味する。一般に故障の起こりにくいシステムほど、良いシステムと評価されるために、MTTF は長いほうが良い。ただし、そのようなシステムを実現するためのコストについては、別に考慮する必要がある。

MTTF は、従属故障モデルの仮定から導かれるシステムの信頼度関数  $1 - F_l(t)$  を用いて解析的に求めることが可能である。 $MTTF = E[T_l]$  であるから

$$MTTF = \int_0^\infty (1 - F_l(t)) dt, \quad (18)$$

となる。式中の  $F_l(t)$  は、式 (15) によって与えられる。

### (1) MTTF の導出

#### a) 尺度パラメータ $\lambda_2$ を変化させた場合

MTTF と尺度パラメータの関係を確認するために、パラメータを  $(\lambda_1, m_1, m_2) = (1, 2, 2)$  で固定し、 $\lambda_2$  の値を変化させる。図 3 は  $\lambda_2$  によって定められたシステムの MTTF を表している。横軸は底 10 の対数スケールとしている。

$\lambda_2 = 1$  は明らかに独立故障であり、尺度パラメータ  $\lambda_2$  の値が増加するにつれて、MTTF が減少することが分かる。そして  $\lambda_2$  の値が大きくなるにつれて、その並列システムの平均寿命はユニット単体の平均寿命を下回ることが分かる。ここでユニット単体の MTTF は  $\lambda_1 = 1, m_1 = 2$  より、0.886 と求められ、図中では破線で示されている。およそ  $\lambda_2/\lambda_1 > 8$  における従属故障する並列システムの MTTF は、ユニット単体の MTTF (図中の MTTF of one-unit system) よりも短い。つまり、 $\lambda_2/\lambda_1$  が大きくなるにつれて、1 回目の故障が起きてから次の故障が起こるまでの間隔  $t_d$  が短くなることを意味している。

並列システムの MTTF は先故障時刻  $t_f$  の期待値  $E[T_f]$  に収束する。その理由は、大まかに言えば、 $\lambda_2 \rightarrow \infty$  のとき、差分時刻  $t_d$  が 0 に漸近するからである。なお  $E[T_f]$  は  $F_f(t) = 1 - e^{-2t^2}$  より、0.627 である。

パラメータを  $(\lambda_1, m_1, m_2) = (5, 2, 2)$  で固定し、 $\lambda_2$  の値を変化させた場合も、同様の結果が得られた。図 4 は  $\lambda_2$  によって定められたシステムの MTTF を表している。およそ  $\lambda_2/\lambda_1 > 8$  において、この並列システムの MTTF は、ユニット単体からなるシステムの MTTF よりも短い。ここでユニット単体

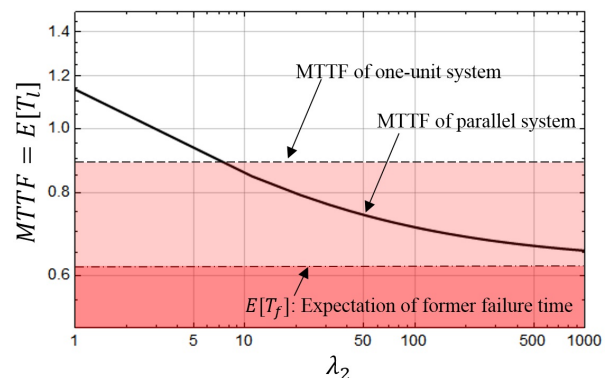


図 3: 尺度パラメータ  $\lambda_2$  と MTTF の関係 ( $\lambda_1 = 1$ ) .

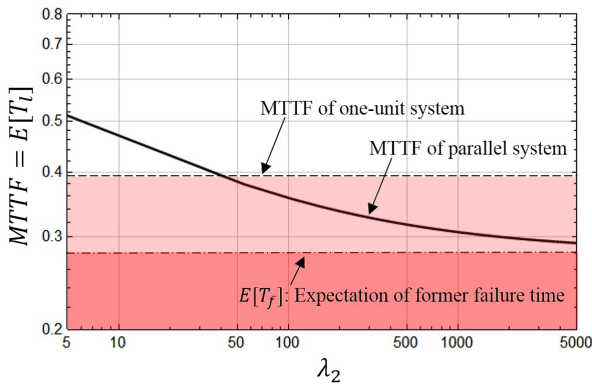


図4: 尺度パラメータ  $\lambda_2$  と MTTF の関係 ( $\lambda_1 = 5$ ).

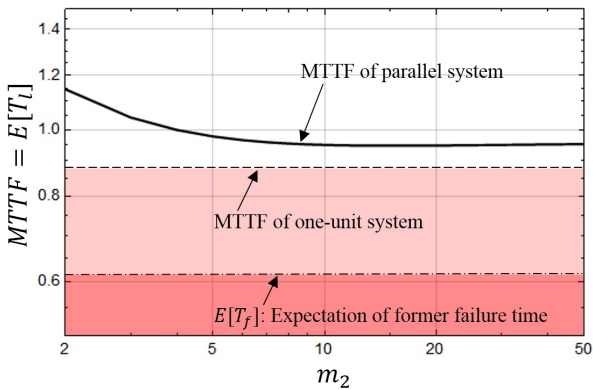


図5: 形状パラメータ  $m_2$  の変化と MTTF の関係.

の MTTF は  $F_f(t) = 1 - e^{-10t^2}$  より, 0.396 と求められる. また,  $E[T_f] = 0.280$  である.

#### b) 形状パラメータ $m_2$ を変化させた場合

MTTF と形状パラメータ  $m_2$  の関係を, パラメータを  $(\lambda_1, \lambda_2, m_1) = (1, 1, 2)$  で固定し,  $m_2$  の値を変化させることで確認する. 図5は  $m_2$  によって定められたシステムの平均故障時間を表している (横軸は図3と同様に, 底10の対数スケールである).

$m_2 = 2$  は明らかに独立故障であり,  $m_2$  の値が増加するにつれて, 尺度パラメータの実験と同様に, MTTF が減少することが分かる. 尺度パラメータ  $\lambda_2$  を変化させた実験と比較して, 形状パラメータを変化させた場合, システムの MTTF の収束が早いことが分かる. また, MTTF の収束した値は, ユニット単体の MTTF を下回っておらず, この点でも尺度パラメータの実験結果とは異なる.

#### (2) 考察

直感的には明らかではあるが, 従属故障の発生によって, 並列システムの寿命が短くなることを解析的に示した.

解析結果から, パラメータの変化率  $\lambda_2/\lambda_1$  または  $m_2/m_1$  が大きくなるにつれてシステム全体の MTTF は減少し, ユニット単体からなるシステムの MTTF を下回る場合があることを明らかにした. そして, その下限は先故障時刻の期待値  $E[t_f]$  に一致する. 並列化の目的はシステムの信頼度を向上させることであり, 並列システムの寿命がユニット単体のシステムよりも短い場合は, その目的は達成されない.

このことから, パラメータの変化率を小さくすることは, システムの平均寿命を延ばすことができることが分かる. また, パラメータの変化率とシステムの寿命はトレードオフの

関係をもつことから, 求められる MTTF の下限に対して, どの程度までパラメータの変化率を許容できるかという判断にもこの結果は役に立つだろう.

以上より, ユニットが従属故障を起こしているかどうかを判定する手法の開発や, パラメータの変化率を推定することができれば, システムの信頼性向上に大きく貢献することが可能であることが分かった.

## 5. 従属故障の検知

本章では, システムの故障時刻データを標本として, 従属故障が発生しているかどうかを統計的に検定する手法を提案する.

従属故障の発生を未然に防ぐための代表的な手法には, FTA (fault tree analysis) や ETA (event tree analysis) などの定性的な手法がある. これらについては, 松岡 [1] や鈴木 [15] が詳しい.

一方で, これらの手法は従属故障を検知するうえで欠点がある. 故障原因の列挙は定性的な手法であるために, もし解析者が故障原因を見逃してしまうと, 従属故障を発見することができない. そのため, 何らかの定量的な解析手法が必要であることが考えられる.

以降は故障時刻のデータが得られたときに, そのシステムの故障ケースが独立か従属かという情報は伏せて, 故障時刻のみから, システムの故障ケースが独立か従属かを判定する.

### (1) 統計的検定による検知手法

システムの故障時刻  $t_i$  の標本が, 独立故障の故障ケースに従っているかどうかを判定することで, 従属故障を検知する手法を提案する. まず提案手法のアルゴリズムを説明し, その手法の判定能力の精度についてシミュレーションに基づき考察を行う.

#### a) アルゴリズム

先故障時刻  $t_f$  から後故障時刻  $t_l$  の分布を推定し, その推定した分布と, 実際の後故障時刻データ  $t_l$  の当てはまりの良さを検定することで, 従属故障を検知する. 当てはまりの良さの評価には, 2章で述べた適合度検定である K-S 検定を用いる. 独立故障の故障ケースならば, 後故障時刻の分布関数  $F_l(t)$  は後故障時刻の標本  $t_l$  を使うことなく, 先故障時刻の標本  $t_f$  のみから精度よく推定することができる. なぜならば, それぞれの真の分布関数は

$$F_l(t) = (1 - e^{-\lambda_1 t^{m_1}})^2, \quad (19)$$

$$F_f(t) = 1 - e^{-2\lambda_1 t^{m_1}}, \quad (20)$$

であり, ハザードレート  $h_1(t)$  のパラメータ  $\lambda_1, m_1$  を共有しているからである. このことから,  $t_f$  を標本として, 最尤法で  $\widehat{F}_f(t) = 1 - e^{-2\lambda_1 t^{m_1}}$  を推定することで, 同時に  $\widehat{F}_l(t)$  を推定することができる. そして帰無仮説を「 $H_0$ : 標本  $t_l$  が  $\widehat{F}_l(t)$  に従っている」とした K-S 検定を行う. もし帰無仮説が棄却されなければ, その標本は独立故障の故障ケースであると判定する. 帰無仮説を棄却した場合,  $\widehat{F}_l(t)$  の導出に用いた, 独立故障が起きている, という仮定を否定することに等しいと言える. よって,  $H_0$  が棄却された場合, 従属故障が起きていることを主張し, 従属故障の検知が可能である. この手法のメリットは, 任意の故障ケースに対して適応可能なことである.

要約すると、ある2ユニット並列システムの故障時刻のデータセットに対して上述の検定を行なった結果、もし帰無仮説  $H_0$  が採用されたのであれば、その並列システムは独立故障していると言え、もし対立仮説  $H_1$  が採用されたのであれば、従属故障していると言える。

以下にアルゴリズムを示す。

従属故障を検知するアルゴリズム：

1. 先故障時刻  $t_f$  のデータから、 $\widehat{F}_f(t) = 1 - e^{-2\widehat{\lambda}_1 \widehat{m}_1}$  を最尤法にて推定する
2. 独立故障を仮定して、 $\widehat{F}_l(t) = (1 - e^{-\widehat{\lambda}_1 \widehat{m}_1})^2$  とする。
3. K-S 統計量  $D_n$  を次のように計算する。  

$$D_n = \sup_{0 < t < \infty} |\widehat{F}_l(t) - S_l(t)|,$$
ただし、 $S_l(t)$  は観測された後故障時刻の経験分布である。
4. 帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  を以下のように設定する。  
 $H_0$  : 後故障時刻  $t_l$  が  $\widehat{F}_l(t)$  に従っている。  
 $H_1$  : 後故障時刻  $t_l$  が  $\widehat{F}_l(t)$  に従っていない。
5. 以上の仮説のもとで K-S 検定を行う。  
 $\sqrt{n}D_n > 1.36$  であれば有意水準 5% で  $H_0$  を棄却し  $H_1$  を採用する。そうでなければ  $H_0$  を採用する。  
 $\sqrt{n}D_n > 1.62$  であれば有意水準 1% で  $H_0$  を棄却し  $H_1$  を採用する。そうでなければ  $H_0$  を採用する。
6.  $H_0$  を採用したならば独立故障、 $H_1$  を採用したならば従属故障と判定する。

#### b) 数値例

上述の検定方式の有用性を次の例1で示す。

(例1) ハザードレートのパラメータが  $(\lambda_1, \lambda_2, m_1, m_2) = (1, 1, 2, 2)$  の独立故障の例

データ数を  $n = 20$  として、シミュレーションで故障時刻のデータを生成したデータを表1に示す。このとき、最尤法によってパラメータ  $\lambda_1$  と  $m_1$  を推定すると、 $\widehat{\lambda}_1 = 0.866, \widehat{m}_1 = 1.409$  である。これより、K-S 統計量が  $D_{20} = 0.296$  と求められ、 $\sqrt{20}D_{20} = 1.324 < 1.36$  となる。よって有意水準 5% と 1% の両方で帰無仮説  $H_0$  を棄却することができず、独立故障が起こっていると正しく判定できた。

#### c) 検出力の導出

次に、パラメータの値が変化するとき、この検定方式が、どの程度の割合で故障ケースを正しく判定できるかを調査する。そのために、第1種の過誤の確率  $\alpha$  と、第2種の過誤の確率  $\beta$  を求める。どちらも小さいことが望ましい。

本研究において、第1種の過誤とは、「実際は独立故障しているシステムに対して、誤って従属故障と判定すること」であり、第2種の過誤は、「実際は従属故障しているシステムに対して、誤って独立故障と判定すること」を意味する。

$1 - \beta$  は検出力と呼ばれ、本研究では「従属故障しているシステムを、正しく従属故障と判定する確率」を意味する。なお  $\alpha$  と  $\beta$  はモンテカルロ・シミュレーションで導出した。シミュレーションの回数は 500 回とする。データ数は  $n = 20, 50, 100$  とする。そして有意水準は 5% と 1% の2種類とする。

#### 【実験 1, 2】

尺度パラメータ  $\lambda_2$  を変化させた場合の検出力を求めた。故障ケースを  $(\lambda_1, m_1, m_2) = (1, 2, 2)$  で固定し、 $\lambda_2$  を 1, 2, ..., 10 までの 10 通りで試す。このときハザードレートのグラフは

表 1 : 例 1 で用いた故障時刻のデータ

No.	先故障時刻 $t_f$	後故障時刻 $t_l$
1	0.681	0.882
2	0.197	0.565
3	1.540	1.787
4	0.171	1.141
5	0.099	0.371
6	0.666	1.290
7	1.017	1.175
8	0.414	0.919
9	0.738	0.816
10	0.382	1.092
11	0.100	0.711
12	1.052	1.543
13	0.313	1.163
14	0.927	1.263
15	0.157	0.267
16	0.356	1.474
17	1.536	2.099
18	0.644	0.908
19	1.076	1.758
20	0.240	0.570

図6のようになる。表2と表3は、それぞれ有意水準を 5% と 1% と設定したときの、この故障ケースにおける検定の検出力を示す。それぞれ実験1と実験2とする。

表2より、尺度パラメータ  $\lambda_2$  が大きいほど、またデータ数  $n$  が大きいほど、検出力が高いことが分かる。

有意水準を 5% と設定したにもかかわらず、シミュレーションで求められた  $\alpha$  の値が 10% を超えている。これは帰無仮説に用いる分布が真の分布  $F_l(t)$  ではなく、推定された分布  $\widehat{F}_l(t)$  だったことによるものである。つまり、もし後故障時刻  $t_l$  とその真の分布  $F_l(t)$  で検定すれば、理論的には  $\alpha = 5.0\%$  となる。実際に、帰無仮説に真の分布  $F_l(t)$  を仮定して、同じデータで検定した場合、カッコ内の値のように設定した有意水準の値に近くなった。

表3より、実験1と比べて、実験2は有意水準を小さく設定したために、 $\alpha$  と  $1 - \beta$  の値が小さい。すなわち、有意水準を小さく設定すると、独立故障は正しく判定しやすくなるが、従属故障を誤って独立故障と判定する確率は上昇する。

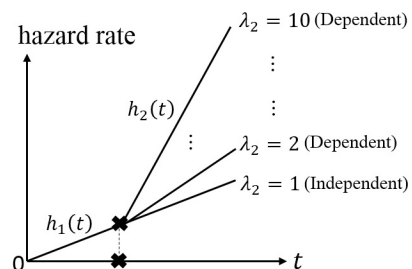


図 6 : ハザードレートの振る舞い ( $\lambda = 1$ ) .



表2：実験1の結果. 検出力  $1-\beta$  (% , シミュレーション500回). 有意水準  $\alpha = 5.0\%$ .

$\lambda_2$	検出力 $1-\beta$		
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
1	$\alpha = 11.4 (7.0)$	$\alpha = 13.6 (6.0)$	$\alpha = 11.2 (4.8)$
2	23.0	32.2	58.2
3	39.6	69.2	89.2
4	51.4	85.4	98.6
5	67.6	92.2	99.8
6	68.4	95.8	99.8
7	79.6	98.8	100.0
8	84.6	99.4	100.0
9	84.6	99.8	100.0
10	86.4	99.8	100.0

表3：実験2の結果. 検出力  $1-\beta$  (% , シミュレーション500回). 有意水準  $\alpha = 1.0\%$ .

$\lambda_2$	検出力 $1-\beta$		
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
1	$\alpha = 3.8 (2.0)$	$\alpha = 4.2 (1.4)$	$\alpha = 3.2 (0.6)$
2	7.2	15.6	36.6
3	17.6	48.6	75.4
4	25.8	66.6	95.8
5	38.8	79.0	98.2
6	40.4	88.4	99.4
7	53.0	93.6	99.8
8	62.6	97.4	100.0
9	62.6	97.8	100.0
10	70.4	99.0	100.0

### 【実験3】

パラメータの変化に対する検出力の敏感さを調べるために実験3を行った. 故障ケースを  $(\lambda_1, m_1, m_2) = (5, 2, 2)$  で固定し,  $\lambda_2 = 5, 6, \dots, 15$  まで変化させる. 有意水準は5%のみとする. この結果を表4に示す. 表ではパラメータの変化率  $\lambda_2/\lambda_1$  の影響を確認するために, 第1列目を  $\lambda_2$  ではなく,  $\lambda_2/\lambda_1$  とした. 表4より  $\lambda_2 - \lambda_1$  は実験1と同じであるが検出力は低い. この結果からは, パラメータの変化率  $\lambda_2/\lambda_1$  が大きいほど, 検出力が高くなることが推測できる. この結果は実験1のパラメータ  $\lambda_2$  をより細かく変動させた結果を類推させる.

### 【実験4, 5】

形状パラメータ  $m_2$  を変化させた場合の検出力を求めた. 故障ケースを  $(\lambda_1, \lambda_1, m_1) = (1, 1, 2)$  で固定し,  $m_2$  を  $2, 3, \dots, 10$  までの9通りで試す. 表5と表6は, それぞれ有意水準を5%と1%と設定したときの, この故障ケースにおける検定の検出力である. それぞれ実験4と実験5とする.

表5より, 尺度パラメータを変化させた実験と同様に, 形状パラメータ  $m_2$  の値を変化させた場合でも,  $m_2$  が大きいほど, またデータ数が大きいほど, 検出力が高いことが分かる.

表4：実験3の結果. 検出力  $1-\beta$  (% , シミュレーション500回). 有意水準  $\alpha = 5.0\%$ .

$\lambda_2/\lambda_1$	検出力 $1-\beta$		
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
1	$\alpha = 12.4 (6.6)$	$\alpha = 11.6 (3.8)$	$\alpha = 11.6 (5.2)$
6/5	12.8	16.4	15.4
7/5	14.2	19.0	23.2
8/5	16.8	24.8	32.0
9/5	20.6	31.4	45.6
2	22.6	33.8	53.8
11/5	24.2	45.2	67.4
12/5	27.0	50.0	74.8
13/5	32.6	55.4	79.2
14/5	34.2	62.2	87.0
3	35.2	66.8	91.6

表5：実験4の結果. 検出力  $1-\beta$  (% , シミュレーション500回). 有意水準  $\alpha = 5.0\%$ .

$m_2$	検出力 $1-\beta$		
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
2	$\alpha = 12.2 (7.0)$	$\alpha = 10.0 (5.8)$	$\alpha = 9.4 (4.4)$
3	23.8	43.4	64.4
4	43.6	70.6	96.4
5	61.2	91.2	99.8
6	69.8	97.0	100.0
7	80.0	98.6	100.0
8	84.0	99.2	100.0
9	85.2	99.8	100.0
10	86.8	99.8	100.0

表6：実験5の結果. 検出力  $1-\beta$  (% , シミュレーション500回). 有意水準  $\alpha = 1.0\%$ .

$m_2$	検出力 $1-\beta$		
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
2	$\alpha = 3.8 (1.2)$	$\alpha = 2.0 (1.0)$	$\alpha = 2.4 (1.0)$
3	8.4	23.6	46.8
4	23.4	52.2	87.6
5	37.8	77.6	98.2
6	47.0	92.6	99.4
7	56.2	96.4	100.0
8	64.2	97.8	100.0
9	70.4	98.4	100.0
10	70.4	98.4	100.0

表6より, 実験4と比べて, 実験5は有意水準を小さく設定したために,  $\alpha$  と  $1-\beta$  の値が小さい.

第1種の過誤の確率が設定した有意水準と異なるのは, 実験1, 2と同様の理由である.



## (2) 考察

従属故障の発生の有無を、故障時刻のデータから判定することに成功した。そして、その検定手法の検出力をモンテカルロ・シミュレーションによって確認した。実験結果から、独立故障を正しく独立故障と判定する確率  $1 - \alpha$  は、有意水準を 5% とした場合、約 90% であった。また従属故障を正しく従属故障と判定する確率は、パラメータのパラメータの変化率  $\lambda_2/\lambda_1$  に依存していることが分かった。

検出力  $1 - \beta$  が高くなる条件は (i) 有意水準 (ii) データ数 (iii) パラメータの変化率、これらが大きいということを明らかとした。

有意水準は 1% よりも 5% の方が高い検出力を得られた。なぜならば、5% の方が、第 2 種の過誤の確率  $\beta$  が低くなるからである。本研究の目的は従属故障を発見することであり、 $\beta$  は低い方が良い。

データ数  $n$  は大きいほど好ましいが、現実的には、コストなどにより取得できるデータ数には制限のある場合がある。実際には、データ数が  $n = 50$  あれば充分である。検出力がパラメータの変化率に依存しているため、良い検出力を保つために必要なデータ数は存在しないが、実験結果より、パラメータの変化率が、 $\lambda_2/\lambda_1 \geq 3$  または、 $m_2/m_1 \geq 4$  の場合は、 $n \geq 50$  であれば約 80% 以上の検出力を得られる。これよりもパラメータの変化率が小さい場合、検出力が 6 割にも満たないという結果は問題ではない。変化率が小さいということは、システムの MTTF に与える影響も小さいからである。

## 6. おわりに

本研究は、並列システムの故障が、独立故障か従属故障を検定する方法を明らかにした。

4 章では、直感的には明らかではあるが、システムの MTTF は独立故障が起こる場合よりも、従属故障が起こる場合の方が短くなるということを解析的に示した。さらに、従属故障によっては、並列システムの MTTF が、ユニット単体からなるシステムの MTTF に劣る場合があることが分かった。そのため信頼性工学の観点からは、ユニットが従属故障を起こすことを未然に防ぐことは重要であると言える。

そこで、本研究は従属故障の検知手法の 1 つとして、先故障時刻と後故障時刻を利用した検定手法を開発した。もし従属故障が検知されたならば、可能な限りその原因を解消することが、そのシステムの信頼性向上にとって望ましい。

今後の課題としては、故障時刻からシステムの MTTF を推定するために、式 (14) のパラメータ  $\lambda_2$  と  $m_2$  を推定する手法の開発が挙げられる。

また従属故障を検知する研究は、変化検知の研究の 1 つと言える。本研究は、先故障時刻におけるユニットの寿命分布の変化の検知を行った。変化検知は応用が効く技術のため、依然として発展が望まれる分野である。近年では機械学習を取り入れた手法が様々な提案されており [16]、信頼性工学の分野からも、故障を検知する研究の発展を望む。

## 参考文献

[1] 松岡猛, 「確率論的安全評価における従属故障と外的事象の取り扱い」, システム/制御/情報, Vol. 36, No. 3, pp.

158-170 (1992).

- [2] M. Zelen, ed., Statistical theory of reliability, University of Wisconsin Press, Wisconsin (1964).
- [3] A. W. Marshall and I. Olkin, "A multivariate exponential distribution", *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 62, pp. 30-44 (1967).
- [4] S. P. Rajamanickam and B. Chandrasekar, "Reliability measures for two-unit systems with a structure for failure and repair times", *Microelectron. Reliab.*, Vol. 37, No. 5, pp. 829-833 (1997).
- [5] G. Jingbo and E. A. Elsayed, "A bivariate degradation model for sequence-dependent stress testing", *Proc. 21st IS-SAT Int. Conf. Reliability and Quality in Design*, pp. 277-281 (2015).
- [6] R. Malhotra and G. Taneja, "Stochastic analysis of a two-unit cold standby system wherein both units may become operative depending upon the demand", *J. Quality and Reliability Engineering*, Vol. 2014 (2014).
- [7] 影山孝夫, 「従属故障ネットワークシステムに対するコピュラを用いた信頼性解析」, 法政大学大学院修士論文 (2015) .
- [8] S. Ota, T. Kageyama and M. Kimura, "Improvement of reliability evaluation for 2-Unit parallel system with cascading failures by using maximal copula", *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E98-A, No. 10, pp. 2096-2100 (2015).
- [9] J. Johansson and H. Hassel, "An approach for modeling interdependent infrastructures in the context of vulnerability analysis", *J. Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 95, pp.1335-1344 (2010).
- [10] T. Yuge and S. Yanagi, "Estimating failure probability of a k-out-of-n system considering Common-Cause failures", *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E98-A, No. 10, pp. 2025-2030 (2015).
- [11] I. Dobson, B. A. Carreras and D. E. Newman, "A loading-dependent model of probabilistic cascading failure", *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, Vol. 19, pp. 15-32 (2005).
- [12] W. Feller, "On the Kolmogorov-Smirnov limit theorem for empirical distribution", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 19, No. 2, pp. 177-189 (1948).
- [13] A. Kolmogoroff, "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione", *Giorn. Inst. Ital. Attuari*, Vol. 4, pp. 1-11 (1933).
- [14] E. Chiodo and D. Lauria, "Some basic properties of the failure rate of redundant reliability systems in industrial electronics applications", *IEEE Trans. Ind. Electronics*, Vol. 62, No. 8, pp. 5055-5062 (2015).
- [15] 鈴木順二郎, 牧野鉄治, 石坂茂樹, FMEA・FTA 実施法, 日科技連出版社, 東京 (1982) .
- [16] 井手剛, 杉山将, 異常検知と変化検知, 講談社, 東京 (2015) .