簡素な特徴量を用いたデジタルスパイクマップの解析

YAMAOKA, Hiroki / 山岡, 弘樹

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)
57

(開始ページ / Start Page)
1

(終了ページ / End Page)
4

(発行年 / Year)
2016-03-24

(URL)
https://doi.org/10.15002/00013081

簡素な特徴量を用いたデジタルスパイクマップの解析

ANALYSIS OF DIGITAL SPIKE MAPS USING THE SIMPLE FEATURE QUANTITIES

山岡 弘樹
Hiroki YAMAOKA

指導教員 斎藤利通

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

This paper studies dynamic of digital spike maps: simple digital dynamical systems that can generate various periodic spike-trains. In order to consider the periodic spike-trains, we presents two feature quantities: the number of co-existing periodic spike-trains late, the concentricity of periodic spike-trains. Using these two feature quantities. we construct the feature quantities plane. The feature quantities plane is useful in visualization, classification and consideration of the spike-train dynamics. The usefulness is confirmed in numerical experiment of typical example based on the analog bifurcating neurons.
Key Words : *Digital Spike Map, Spiking neurons, concentricity*

1. まえがき

デジタルスパイクマップ (DSM [1]-[3]) は、格子点の集合からそれ自身への写像であり、パラメータや初期値に依存し、様々な周期スパイク列 (PST) を生成することが出来る。DSM を考察する動機として様々なものがある。まずセルオートマトン [4]、動的バイナリーニューラルネットや順序論理回路 [5] などの簡素なデジタル力学系と関連するので、それらの考察の基礎となることである。DSM はアナログスパイク発生系 [6] のデジタル版とみなせる。次にスパイク信号は神経情報処理の理解や、神経系のモデリングなどの基本である。スパイク列は簡素な符号化に適しており、消費電力も少なく、信号処理 [7]、デジタル通信 [8]、STDP 学習 [9] 等への応用も研究されている。様々なスパイク信号を生成できる DSM の解析と合成に関する研究は、基礎応用両面から重要である。

本研究ではデジタルスパイク信号を出力する DSM の解析するために、基本的特徴量を 2 つ導入する。第 1 の特徴量は全格子点の中で PST になる格子点数の割合であり、定常状態の豊富さを特徴づける。第 2 の特徴量 PST の周期のばらつきであり、周期の豊富さを特徴づける。この特徴量は、ランダム神経回路網の状態遷移の集中度 [10] を参考にしたものである。この 2 つの特徴量を用いて特徴量平面を導入する。特徴量平面は PST の定常状態の関係性の視覚化や、動作解析のために有効である。

この特徴量平面を用いて、分岐ニューロン (BN,[6]) に基づく DSM の例題を解析する。BN はスパイキングニューロンを参考として考案された簡素なスイッチ力学系である。周期的なベース信号としきい値の間の積分発火動作を繰り返して様々なスパイク列を生成し、その動作はアナログスパイク位相マップ (ASM) に支配される。ベース信号が三角波の場合、ASM は区分線形となり、厳密な解析が可能である。本論文で使用する DSM はその ASM を離散化したものである。この DSM の呈する現象は、多種多様であり非常に複雑である。特徴量平面を用いて、この DSM の動作の基本的な分類を試みる。

本論文で使用する特徴量平面を用いた解析法は様々なデジタル力学系適応が可能である。

2. デジタルスパイクマップ

デジタルスパイクマップ (DSM) は N 個の格子点の集合 L_1 の上の写像であり、以下で記述される。

$$\begin{aligned} &\theta_{n+1} = f(\theta_n),\ f : L_1 \to L_1 \\ &L_1 \equiv \{l_1, l_2, \cdots, l_N\},\ l_i \equiv i/N,\ i = 1 \cdots N \end{aligned} \tag{1}$$

θ_n は n 番目のスパイク位相であり、l_i は i 番目の格子点である。格子点は単位区間 $[0, 1)$ 上に等間隔に与えられている。図 1 (a) に DSM の例を示す。DSM によって生成されるスパイク位相 θ_n を用いて、基本区間 $I_n \equiv [n-1, n)$ に 1 つずつのスパイク位置 $\tau_n \in I_n$ を割り当てるとスパイク列が得られる。

$$Y(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{for } \tau = \tau_n \equiv \theta_n + n - 1 \\ 0 & \text{for } \tau \neq \tau_n \end{cases} \tag{2}$$

図 1 (c) にスパイク列の例を示す。1 つの初期値はそれぞれ 1 つのデジタルスパイク列に対応している。DSM は有限個の格子点集合の写像であるため定常状態は周期解であり、アナログマップのようにカオスを生成することはない。しかし、複数の様々な周期解が共存することができ、各周期解に至る過渡現象も多種多様になる可能性がある。以下に定常状態に関する定義を与える。

(定義):L_1 上の点 p は、$p = f^k(p)$ であり、$f(p)$ から $f^k(p)$ が全て異なるとき、周期 k の周期点 (PEP) という。ただし、f^k は f の k 回合成写像である。特に、周期 1 の PEP を不動点と呼ぶ。PEP の系列 $\{p, f(p), \cdots, f^{k-1}(p)\}$ を (周期 k の) 周期軌道 (PEO) という。

ここで、図 1 に示したように、周期 k の PEP は一つの周期 k の PST に対応し ($\tau_{1+k} = \tau_1 + k$)、周期 k の PEO は、k 個の PST と対応する。例えば、図 1 (a) の DSM は、不動点 2 つと周期 3 の PEO を持つ。周期 3 の PEO は 3 つの

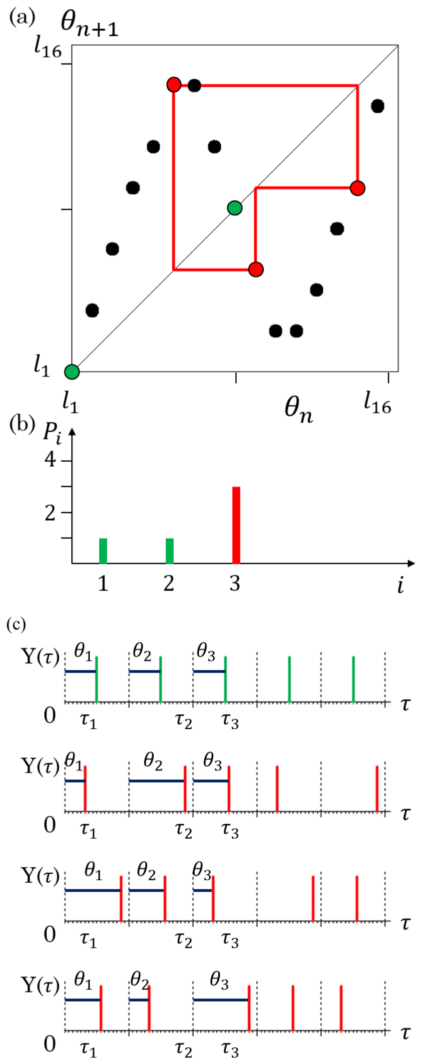

図 1 デジタルスパイクマップ (DSM) と周期スパイク列 (PST). (a) DSM の例. (b) 定常状態に収束する初期値数の分布. (c) 周期スパイク列 (PST).

PST に対応し、これと 2 つの不動点に対応する 2 つの PST を加えて、この DSM は 5 つの PST を持つ。(図 1 (c)) 初期値に依存していずれかの PST を出力する。

3. 特徴量平面

DSM の動作を解析するために特徴量を導入する。第 1 の特徴量は全格子点の中で PST になる格子点数の割合であり、定常状態の豊富さを特徴づける。

$$\alpha = \frac{\#PST}{N}, \ \frac{1}{N} \le \alpha \le 1 \tag{3}$$

ただし、$\#PST$ は PST の合計数である。DSM は少なくとも 1 つの PEP を持つので $1 \le N_p \le N$ である。第 2 の特徴量を定義するためにいくつかの記号を定義する。PEP の総数を N_P とし、i 番目の周期数を P_i、周期解の合計数を N_e とする。図 1 (a) の DSM は 5 つの PEP を持ち、それに対する周期分布 (P_i の分布) は図 1 (b) のようになる。

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N_e} (\frac{P_i}{N_P})^2, \ \frac{1}{N} \le \gamma \le 1 \tag{4}$$

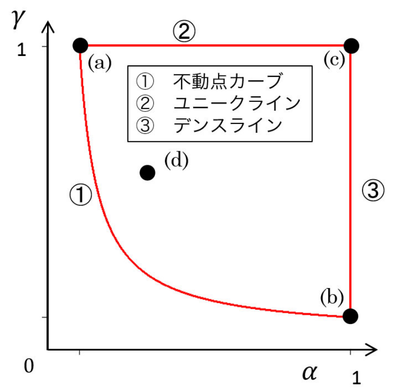

図 2 特徴量平面の例.

図 1 (a) の場合、$\gamma = (1^2 + 1^2 + 3^2)/5^2 = 11/25 \simeq 0.44$ となる。PEO が 1 つのときのみ γ の最大値は 1 となる。PEO の数が多くなるほど γ は小さくなる。全ての点が PEP であり、周期解が全て不動点のときのみ γ は最小値 $1/N$ となる。γ は PST の周期の豊富さを特徴づける。この特徴量は、ランダムネットワークに対して導入された状態遷移集中度 [10] に基づいている。この 2 つの特徴量 α と γ を用いて特徴量平面を導入する。γ は PEO が 1 つのとき最大値になるため、現象が不動点、または多周期解 1 つのとき $\gamma = 1$ となる。ここで α を導入することでそれぞれの特徴を捉えることが出来る。(図 2 参照。横軸が α、縦軸が γ)。PEO が全て不動点のとき以下が成り立つ。

$$\gamma = \frac{1}{N\alpha} \tag{5}$$

これを不動点カーブと呼ぶ。PEO が 1 つのとき、つまり $\gamma = 1$ のときユニークラインと呼ぶ。全て PEP のとき、つまり $\alpha = 1$ のときデンスラインと呼ぶ。ここで特徴量平面を用いて 4 つの DSM の例を示す。1 つ目は図 2 (a) のように、α の値が非常に小さく、γ の値が非常に大きいときである。このとき DSM は、図 3 (a) のようになる。DSM は、PEP が 1 つであり、不動点が 1 つである。2 つ目は図 2 (b) のように、α の値が非常に大きく、γ の値が非常に小さいときである。このとき DSM は、図 3 (b) のようになる。DSM は、全ての点が PEP であり、周期解が全て不動点である。3 つ目は図 2 (c) のように、α、γ の値が非常に大きいときである。このとき DSM は、図 3 (c) のようになる。DSM は、全ての点が PEP であるが、M 系列のように周期解が 1 つとなっている。4 つ目は図 2 (d) のように、特徴量平面の不動点カーブ、ユニークライン、デンスラインの間にあるときである。このとき DSM は、図 3 (d) のようになる。DSM は、不動点以外の複数の PEO が共存している。以上のように DSM は必ず特徴量平面の不動点カーブ、ユニークライン、デンスラインの内部で表すことができる。特徴量平面上では図 2 (c) に近づくにつれ周期解が豊富になり、長い周期解が存在する傾向になっている。

4. 分岐ニューロンに基づく DSM の基本分類

DSM には様々なものがあるが、ここでは、分岐ニューロン (BN) に基づく DSM を考察する。BN は、スパイキングニューロンの動作を参考としたスイッチ力学系である。図 4

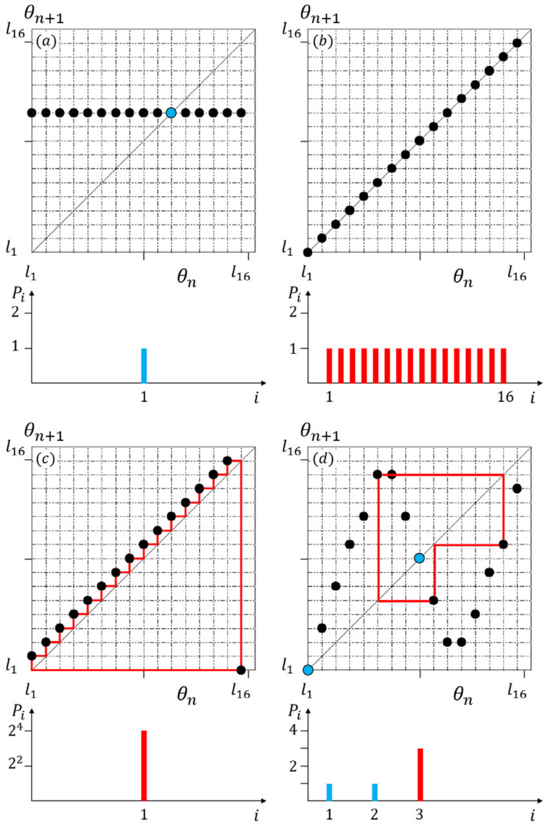

図 3 デジタルスパイクマップ (DSM) と初期値分布の例.

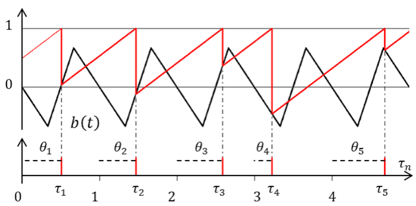

図 4 分岐ニューロンと対応するスパイク列の例.

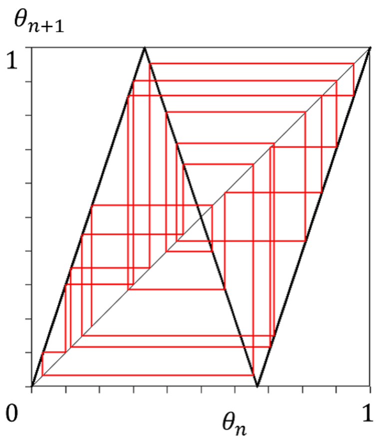

図 5 ASM の例.

に示すように周期的ベース信号 $b(\tau)$ としきい値の間の積分発火動作を繰り返し、様々なスパイク列を生成することができる。ただし、τ_n はアナログスパイク位置、$\theta_n = \tau_n \ mod\ 1$ はアナログスパイク位相である。その動作は、図 5 のように次のアナログスパイク写像 (ASM) に支配される。

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 1 - b(\tau_n) \bmod 1 \equiv f_a(\theta_n) \qquad (6)$$

ただし、$\theta_n \in [0, 1)$ はアナログスパイク位相である。ベース信号は典型例である正弦波の他に、様々なものが考えられるが、ここでは三角波の場合を考える。

$$b(\tau) = \begin{cases} -(a-1)\tau & \text{for } -d \le \tau < d \\ \gamma(\tau - 0.5) & \text{for } d \le \tau < 1-d \end{cases}$$

ただし、$0 < d < 1/3$, $1 < a < 1 + 1/d$, $\gamma \equiv 2d(a-1)/(1-2d)$, $b(\tau+1) = b(\tau)$ である。本論文では、簡単のため、$d = 1/3$、$1 \le a \le 3$、$\gamma = 2(a-1)$ とする。図 5 に ASM の例を示す。

$$f_a(\theta_n) = \begin{cases} a\theta_n & \text{for } 0 \le \theta_n < d \\ (-\gamma+1)(\theta_n - d) + ad & \text{for } d \le \theta_n < 1-d \\ a(\theta_n - (1-d)) + 1 - ad & \text{for } 1-d \le \theta_n < 1 \end{cases}$$

この ASM の動作は比較的単純である。$1 < a < 2$ のときは一つの安定不動点を持ち、$2 < a$ の時はカオスを呈する。この ASM を離散化することで、DSM を得る。

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{N}\mathrm{INT}(Nf_a(\theta_n) + 0.5) \equiv f_d(\theta_n) \qquad (7)$$

ただし、$\theta_n \in L_1$ であり、$\mathrm{INT}(X)$ は X の整数部である。N を大きくすると、この DSM は ASM に近づくが、本論文では、DSM を ASM の近似系とはみなさない。N を有限値とすると、DSM の動作は極めて複雑となる。

ここでは、$N = 32$ とし、特徴量平面を用いて DSM の動作を考察する。この場合、a を変化させると、2 つの特徴量は様々な値となり、DSM の動作は複雑を極める。そのような動作を解析していくための基礎として、動作の基本的な分類を試みる。

パターン 1：DSM が図 6 (a) のとき。つまり、α が非常に小さく、γ が大きいとき。PST は 2 つ存在し、全ての不動点となっている。このとき特徴量平面で表すと図 6(a) のようになる。不動点カーブ上にプロットされ、定常状態が少ない傾向があることがわかる。

パターン 2：DSM が図 6 (b) のとき。つまり、α が非常に大きく、γ が小さいときである。図 8 のように DSM は、不動点が 2 つ、2 周期解、4 周期解、8 周期解、16 周期解が 1 つずつ計 6 つの PEO から成り立っている。PST は格子点の数 N だけ存在し、多周期の PST が共存している。このとき特徴量平面で表すと図 7(b) のようになる。デンスライン上にプロットされ、定常状態が豊富な傾向があることがわかる。

パターン 3：DSM が図 6 (c) のとき。つまり、α が小さく、γ が非常に小さいとき。周期解分布を見ると、不動点が 2 つ、2 周期解が 6 つ、計 8 つの PEO から成り立っている。このとき特徴量平面で表すと図 7(c) のようになる。不動点カーブに近いことから長い周期解が少ないことがわかる。

パターン 4：DSM が図 6 (d) のとき。つまり、α が大きく、γ が非常に大きいとき。周期解分布を見ると、長い周期 (18 周期解) が存在していることが分かる。このとき特徴量平面で表すと図 7(c) のようになる。M 系列に近い傾向がある。

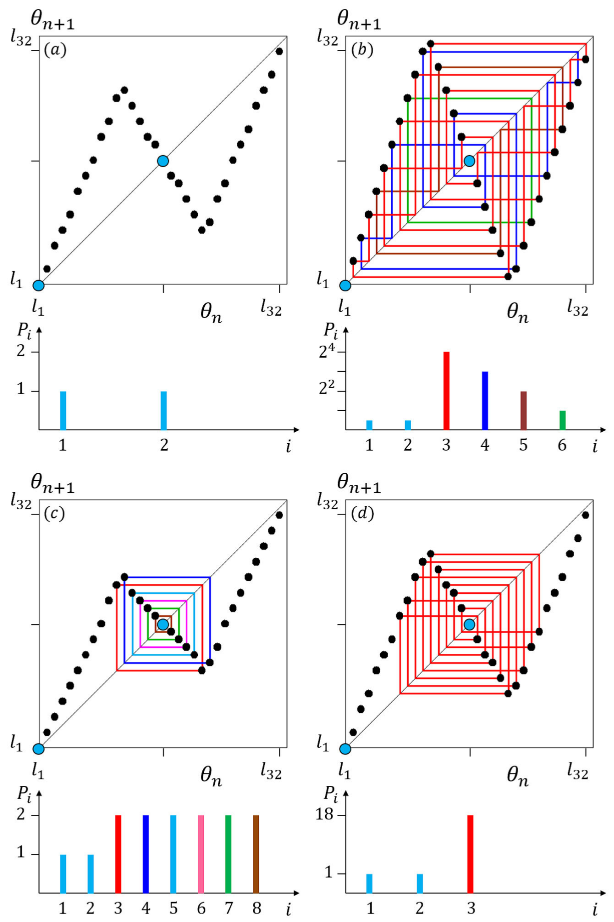

図 6 特徴量平面を用いた DSM の例. (a) $a = 2.35$, $\alpha = 0.063$, $\gamma = 0.5$ (b) $a = 3.0$, $\alpha = 1.0$, $\gamma = 0.334$ (c) $a = 2.06$, $\alpha = 0.438$, $\gamma = 0.133$ (d) $a = 2.4$, $\alpha = 0.625$, $\gamma = 0.815$

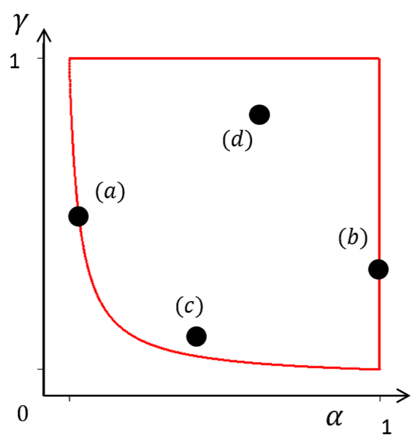

図 7 N=32 のときの特徴量平面の例.

5. むすび

DSM の呈するスパイク列の定常状態を解析するために、2 つの特徴量を導入し、特徴量平面で表した。BN に基づく DSM の例題から特徴量平面を用いて、DSM の動作を基本的な 4 つのパターンに分類した。今後の課題は、様々なクラスの DSM からの特徴量の導出、特徴量平面を用いて現象の詳細な分類、スパイク信号に基づく工学的応用、等である。

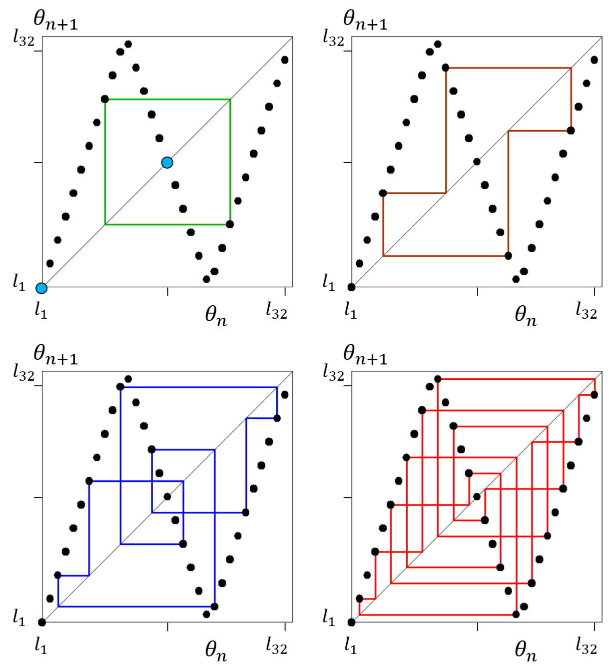

図 8 $a = 3.0$ の例. (b_1) 不動点と 2 周期解 (b_2) 4 周期解 (b_3) 8 周期解 (b_4) 16 周期解

参考文献

1) N. Horimoto and T. Saito, Analysis of Digital Spike Maps based on Bifurcating Neurons, NOLTA, IEICE, 3, 4, pp. 596-605, 2012.
2) N. Horimoto and T. Saito, Digital Dynamical Systems of Spike-Trains, Proc. of ICONIP (LNCS 8227), pp. 188-195, 2013.
3) H. Yamaoka, N. Horimoto and T. Saito, Basic Classification of Digital Spike-Phase Maps, Proc. of International Conference on Artificial Neural Networks, Proc. of ICANN (LNCS 8681), pp. 73-80, 2014.
4) L. O. Chua, A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science, I, II. World Scientific, 2005.
5) R. Ito, Y. Nakayama and T. Saito, Analysis and Learning of Periodic Orbits in Dynamic Binary Neural Networks, Proc. IEEE-INNS/IJCNN, pp. 502-508, 2012.
6) S. Kirikawa and T. Saito, Filter-Induced Bifurcation of Simple Spike-Train Dynamics, IEICE Trans. Fundamentals, E97-A, pp. 1508-1515, 2014.
7) S. R. Campbell, D. Wang and C. Jayaprakash, Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators, Neural computation, 11, pp. 1595-1619, 1999.
8) N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring and A. R. Volkovskii, Digital communication using chaotic-pulse-position modulation, IEEE Trans. CAS-I, 48, 12, pp. 1436-1444, 2001.
9) S. V. Notley and A. Gruening Improved spike-timed mappings using a tri-phasic spike timing-dependent plasticity rule, Proc. of IEEE-INNS/IJCNN, pp. 2937-2942, 2012.
10) S. Amari, A Method of Statistical Neurodynamics, Kybernetik 14, pp. 201–215, 1974.