

超拡大カオスを生成する重区分線形系について

SUZUKI, Shotaro / 鈴木, 翔太郎

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

57

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

3

(発行年 / Year)

2016-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00013036>

超拡大カオスを生成する重区分線形系について

ANALYSIS OF SUPER-EXPANDING CHAOS GENERATING MANIFOLD PIECEWISE LINEAR SYSTEM

鈴木 翔太郎

Shotaro SUZUKI

指導教員 斎藤利通

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

This paper studies the super-expanding chaos generating manifold piecewise linear system. These systems are defined by second order continuous flow with hysteresis switching. These systems are equivalent to the manifold piecewise linear systems with the infinite number of equilibria and the trajectories do not diverge, and can generate super-expanding chaos characterized by a very large positive Lyapunov exponent. Using the piecewise linear 1D return map, generation of the superexpanding chaos can be analyzed theoretically. Presenting a simple test circuit, the super expanding chaos is confirmed experimentally.

Key Words: switched dynamical systems, chaos, return map

1. はじめに

確定系の呈する不規則な現象はカオスと呼ばれ、基礎と応用、両面からさかんに研究が行われてきた [1][2]. こうした研究の一つに Chua 回路を始めとする自律系カオスの研究がある [3][4]. 本論文では、Chua 回路と同様に自律系カオスを発生させる重区分線形系 (MPL) に注目する. MPL は、区分的に線形である系が出力値に依存したスイッチングを有することで互いに結合し、重複した特性を持った系のことあり、1981 年に考案されたカオスモデルである [5][6]. 系の動作は、区分線形系リターンマップに帰着することができ、そのカオス的動作は完全に理論的に解析できる. 本論文では、非常に高いリアプノフ指数で特徴付けられる「超拡大カオス (SEC)」を生成することが可能な新しい MPL を提案し、その解析と回路実装を行う. この MPL は、 x 軸上に無限個の平衡点を有する MPL と同値であり、発散を起こさず、常にカオスを呈する. MPL は提案されて以来、その制御や工学的応用も研究されてきた. 近年では、レーダー技術等への応用も研究されている [7][8]. 閉曲面上の MPL は新しいタイプの MPL ともみなすことができ、既存の MPL が扱われる工学的応用の発展に貢献が期待できる.

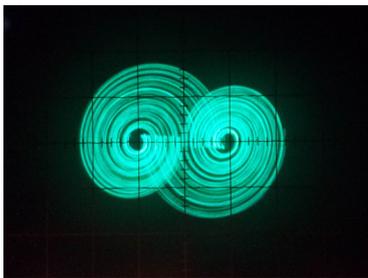


図 1 重区分線形系 (MPL)

2. 円筒上の重区分線形系

平衡点が 2 つの MPL ではリアプノフ指数の値が $\lambda > \ln 2$ の値を取ると発散が起きることが分かっている. ここで、無限個の平衡点を持つ MPL の式を以下に示す.

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + x = \begin{cases} +p + 2nT & (n+) \\ -p + 2nT & (n-) \end{cases}, \quad x \in L_n \quad (1)$$

ただし、 $x \equiv (x, \dot{x})$ であり、ここでの “.” は正規化された時間 τ についての微分を表し、 n を整数とする. 系はダンピング δ 、平衡点 p 、しきい値 T で特徴づけられる. 系は複素特性根 $\delta \pm j\omega$ を持ち、平衡点 $p + 2nT$ を拡大的に動く. L_n を次のように分ける.

$$\begin{aligned} L_n &\equiv L_{n+} \cup L_{n-}, \\ L_{n+} &= \{x | 2nT \leq x < (2n+1)T, \dot{x} = 0\} \\ L_{n-} &= \{x | (2n-1)T \leq x < 2nT, \dot{x} = 0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

これにより、式 (1) の平衡点 p のスイッチングルールの定義は解軌道が L_{n-} を打つと平衡点は $-p + 2nT$ に切り替わり、解軌道が L_{n+} を打つと平衡点は $+p + 2nT$ に切り替わる. 図 2(a) にこの時の軌道を示す. 平衡点が無限個の MPL では、リアプノフ指数 λ が $\ln 2$ より大きな値であっても発散することなく軌道を観測できる.

これと等価である、円筒上で動作する重区分線形系 (CMPL) を定義する. MPL の円筒上での動作は平衡点が無限個の MPL において、全ての L_n を以下の式 (3) で L_0 と同一視することで定義することができる.

$$L_0 = G(L_n), \quad G(X) = ((X + T) \bmod 2T) - T. \quad (3)$$

関数 G より、円筒上の空間を構築する. CMPL は以下の式で定義できる.

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + x = \begin{cases} p & (+) \\ -p & (-). \end{cases} \quad (4)$$

CMPLのスイッチングルールは、解軌道が L_{n-} を打つと軌道は $x - 2nT$ の値へジャンプし、平衡点は $-p$ に切り替わる。同様に解軌道が L_{n+} を打つと軌道は $x - 2nT$ の値へジャンプし、平衡点は $+p$ に切り替わる。図2(b)に、この時の軌道を示す。CMPLの系はダンピング δ 、平衡点 p 、円筒の円周長 $2T$ で特徴づけられる。本論文では簡単化のため、各定義域を以下のように定める。

$$T = 2, 0 < p < T, 0 < \delta < 1, (1 < \beta \equiv e^{\frac{\delta p}{\omega}} < \infty).$$

図3にCMPLの呈する現象の典型的な例を示す。CMPLのリアプノフ指数は $\lambda = \ln \beta$ と求めることができ、MPLの場合に発散する $\beta > 2$ の場合でも、 β の値が有限である限り、軌道を発散させることなく常にカオスを呈することができる。このカオスを、超拡大カオス (SEC) として定義する [9]-[11]。SECは通常のMPLでは生成することは出来ず、CMPLのような閉曲面上で定義された特殊のMPLに限り、生成することが可能となる。

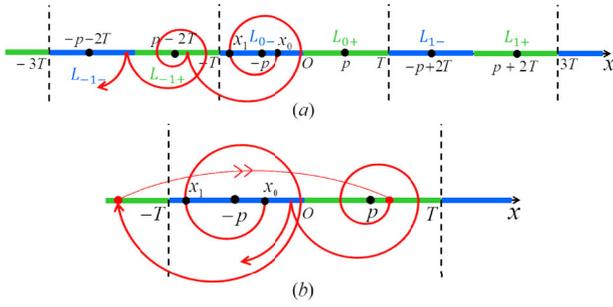


図2 (a) 無限個平衡点を持つMPLの平衡点スイッチ。(b)CMPLの平衡点スイッチ。(緑線 L_{n+} 、青線 L_{n-})

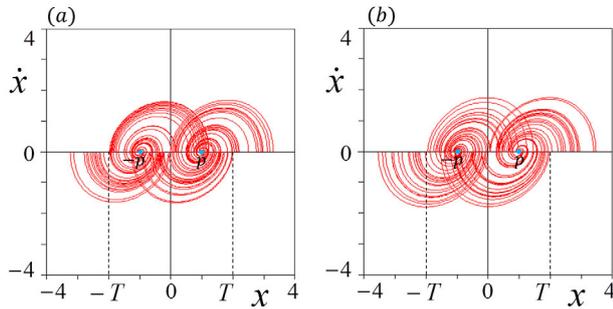


図3 CMPLの解軌跡 $p = 1$ and $T = 2$ (a) $\beta = 2.3$, $\lambda = \ln 2.3$ (b) $\beta = 2.6$, $\lambda = \ln 2.6$

3. 回路実装

(1) 円筒上の重区分線形系

次に、図4に示される実装回路によりCMPLが呈する現象を確認する。キャパシタ電圧 v_1, v_2 、しきい値電圧 V_B は x, \dot{x}, T に対応している。本論文では簡単化のため、 v_1 が取る値を $-2V_B \leq v_1 < 2V_B$ に限定する。このときの β の値は $1 < \beta < 3$ をとる。平衡点の切り替わりはスイッチ S の動作により行われ、各スイッチ S, S_1, S_2, S_3 の動作は、図4(b)の

制御回路により決定される。 $\{(0 < v_1 < V_B) \cap (-v_2 \leq 0)\}$ または $\{(v_1 < -V_B) \cap (-v_2 \geq 0)\}$ となるとき、スイッチ S は(+)に切り替わる。 $\{(-V_B < v_1 < 0) \cap (-v_2 \geq 0)\}$ または $\{(v_1 > V_B) \cap (-v_2 \leq 0)\}$ となるとき、スイッチ S は(-)に切り替わる。また、 $\{(v_1 > V_B) \cap (v_2 \leq 0)\}$ となるとスイッチ S_1, S_2 が矢印の方向に閉じ、 v_1 は $v_1 - 2V_B$ にジャンプする。同様に、 $\{(v_1 < -V_B) \cap (v_2 \geq 0)\}$ となるとスイッチ S_1, S_3 が矢印の方向に閉じ、 v_1 は $v_1 + 2V_B$ にジャンプする。回路はこの動作を繰り返す。図5に、この実験回路から得られた $\beta \in \{2.3, 2.6\}$ の時の観測波形を示す。

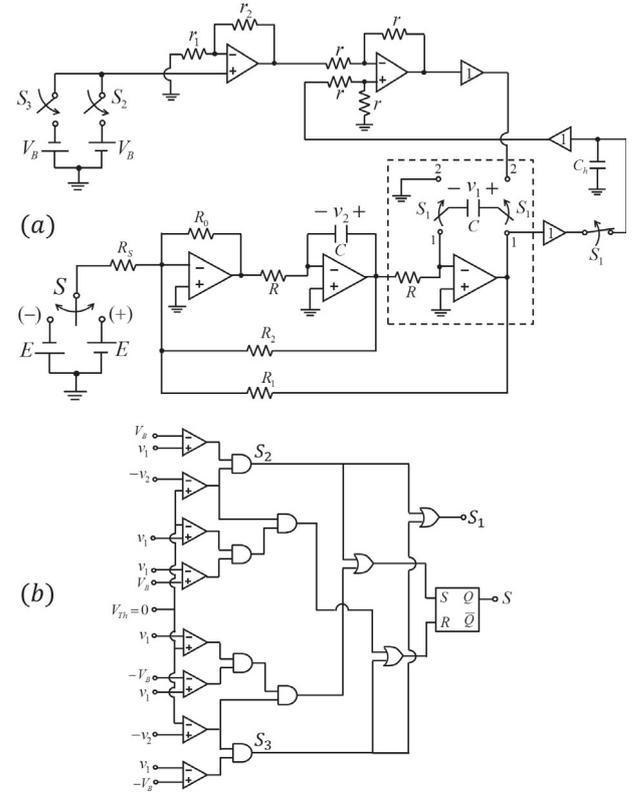


図4 CMPL回路。(a)実装回路、(b)制御回路

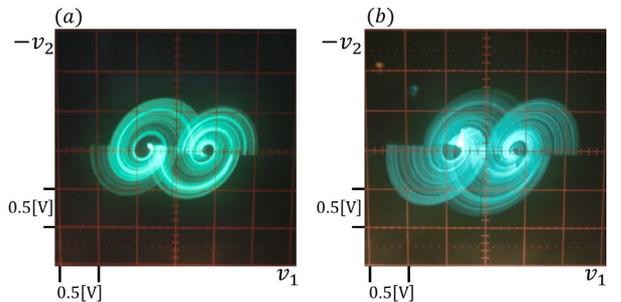


図5 カオストラクタ $R \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $r \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $r_1 \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $r_2 \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $R_0 \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $R_s \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $C \simeq 0.033[\mu\text{F}]$, $C_h \simeq 1[\text{nF}]$, $E \simeq 0.4[\text{V}]$, $V_B \simeq 0.8[\text{V}]$ ($T \equiv V_B/E \simeq 2$). (a) $R_1 \simeq 2.3[\text{k}\Omega]$, $R_2 \simeq 3[\text{k}\Omega]$ $\beta \simeq 2.3$ (b) $R_1 \simeq 2.3[\text{k}\Omega]$, $R_2 \simeq 2.6[\text{k}\Omega]$ $\beta \simeq 2.6$

(2) 超拡大カオス発生回路

次に、CMPL 回路より、比較的簡単に SEC を生成できる回路を説明する。ここで取り扱う MPL を以下の式で定義する。

$$\ddot{x} - 2\delta x + x = 0 \quad (5)$$

この回路も、基本は CMPL 発生回路ではあるが、ここでは SEC 発生回路として扱う。図 6 に SEC 発生回路を示す。簡単化のため、ここでは電圧 v_1 が取りうる値を $-3V_T < v_1 < 3V_T$ と制限する。SEC 発生回路のスイッチ S_1, S_2, S_3 は、回路図下部のコンパレータ、AND 回路、OR 回路によって制御される。 $(v_1 > V_T \cap v_2 \geq 0)$ のとき、キャパシタの電圧 v_1 は $v_1 - 2V_T$ へと値が変化する。 $(v_1 < -V_T \cap v_2 \leq 0)$ のとき、キャパシタの電圧 v_1 は $v_1 + 2V_T$ へと値が変化する。図 7 に、この回路の動作現象を示す。

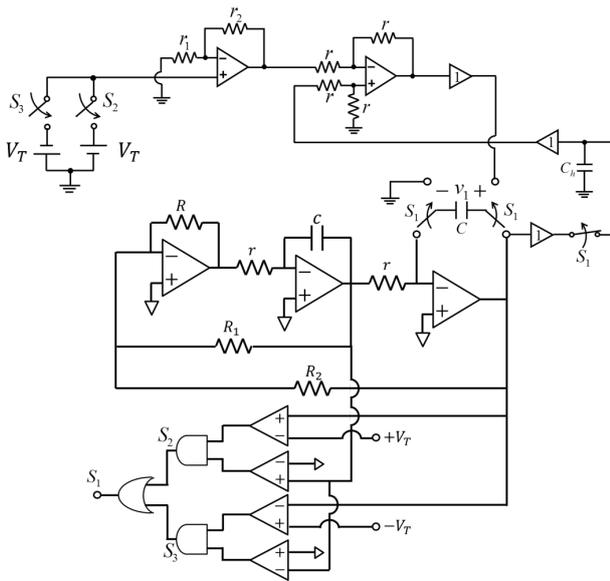


図 6 SEC 発生回路

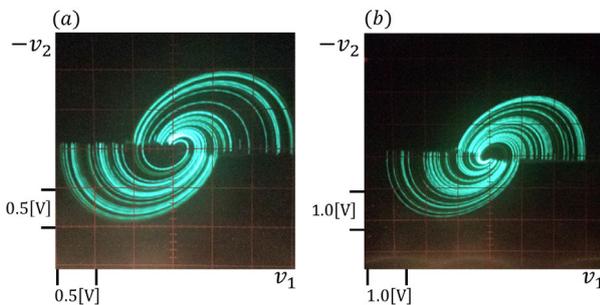


図 7 カオスアトラクタ $R \simeq 2[\text{k}\Omega]$, $r \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $r_1 \simeq 3[\text{k}\Omega]$, $r_2 \simeq 3[\text{k}\Omega]$, $R_0 \simeq 1[\text{k}\Omega]$, $C \simeq 0.033[\mu\text{F}]$, $C_h \simeq 0.033[\mu\text{F}]$, $E \simeq 8.0[\text{V}]$, $V_B \simeq 0.6[\text{V}]$, (a) chaos. $R_1 \simeq 2.8[\text{k}\Omega]$, $R_2 \simeq 3.8[\text{k}\Omega]$ $\beta \simeq 2.0$. (b) super-expanding chaos. $R_1 \simeq 7.5[\text{k}\Omega]$, $R_2 \simeq 4.0[\text{k}\Omega]$ $\beta \simeq 3.0$

4. むすび

超拡大カオスを生成する重区分線形系を提案し、その動作について典型的な現象を示した。実装回路により、 $\beta \geq 2.0$ の超拡大カオスの観測を行い、理論が正しいことを示した。リターンマップによる解析は [9][10] を参照。より広いパラメータでの詳細な現象解析、工学的応用の模索等が本研究の課題である。

参考文献

- 1) Y. Ueda, "Strange attractors and the origin of chaos," in "The impact of chaos on science and society" United Nations University Press, 1997.
- 2) E.N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow" Journal of the Atmospheric Sciences, vol.20, no.2, pp.130-141, 1963.
- 3) T. Matsumoto, L. O. Chua and M. Komuro, "The Double Scroll" IEEE Trans. CAS. 32, 8 pp. 798-818, 1985.
- 4) L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, and G. Q. Zhong, "A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos, Part I: Routes Chaos" IEEE Trans. CAS-I, 40, 10 pp. 732-744, 1993.
- 5) H. Fujita and T. Saito, "Continuous chaos represented by a nonlinear ordinary differential equation with manifold piecewise linear characteristics" Int. Wiss. Koll., A-1, Ilmenau, pp. 11-14, 1981.
- 6) Tsubone, T., Saito, T., "Stabilizing and Destabilizing Control for a Piecewise Linear Circuit" IEEE Trans., CAS-I, 45, 2, pp. 172-177, 1998.
- 7) Corron, N, Blakely, J, "Chaos for Communication and Radar" in Proc. NOLTA, pp. 322-325, 2011.
- 8) Corron, N., Stahl, M., Blakely, J, "Experimental Ranging System Using Exactly Solvable Chaos" in Proc. NOLTA, pp. 454-457, 2012.
- 9) S. Suzuki, K. Kimura, T. Tsubone and T. Saito, "Manifold Piecewise Linear Chaotic System on Cylinder and Super Expanding Chaos" in Proc. NDES, pp. 45-50, 2014.
- 10) K. Kimura, T. Saito and T. Tsubone, "An Autonomous Chaotic Systems on Cylinder" in Proc. NOLTA, pp. 803-806, 2014.
- 11) K. Kimura, S. Suzuki, T. Tsubone and T. Saito The Cylinder Manifold Piecewise Linear System: Analysis and Implementation: Proc. of Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 6, 4, pp. 488-498, 2015.
- 12) S. Suzuki and T. Saito, Super-expanding Chaos from the Cylinder Manifold Piecewise Linear System: Proc. of 2015 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2015), pp. 173-176, 2015-12