

一般座標変換した楕円型偏微分方程式について、ILU(1)前処理をした各種クリロフ部分空間法の数値実験の比較 : ILU(0)前処理との比較

石田, 太史 / ISHIDA, Taishi

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

57

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2016-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00013018>

一般座標変換した楕円型偏微分方程式について、ILU(1)前処理をした各種クリロフ部分空間法の数値実験の比較 —ILU(0)前処理との比較—

COMPARISON OF NUMERICAL EXPERIMENT IN ILU(1) PRECONDITIONED VARIOUS KRYLOV SUBSPACE METHODS AS TO GENERAL COORDINATE TRANSFORMATION ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION – COMPARISON OF ILU(1) AND ILU(0) –

石田 太史

Taishi ISHIDA

指導教員 堀端 康善

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

To the problem of large-scale systems of linear equations, we describe the comparison of ILU(0) and ILU(1). We used the precondition method using ILU(0) and ILU(1), inspect the difference of ILU(0) and ILU(1).

Key Words : Krylov subspace Method, ILU, ILU(0), ILU(1), elliptic partial differential equation

1 はじめに

電場、磁場、流体の速度など連続媒体質内の場を支配する法則は偏微分方程式の形で書き表される。しかしこれらの方程式は非常に複雑であるため解析的な方法で解くことは難しい。そのため変数を数値で表し解の近似を求める数値解法を用いることでこれらの問題を一般的に扱うことができる。多くの科学技術計算の分野で登場する代表的な偏微分方程式である楕円形偏微分方程式を扱い、数値的に計算をするために差分法を用いて偏微分方程式を大規模な連立一次方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

に置き換えその方程式を解くことで解の近似が得られる。差分法は偏微分方程式の中でも汎用性が高い方法であるが、計算領域の形状が複雑な場合、離散化を行う際に境界の処理が困難となるため一般座標変換を用いて簡単な計算領域に写像することで差分化を効果的に行うことができ計算の高度化が実現する。

係数行列 A は非対称行列でこのような大規模な連立一次方程式を解く方法としてクリロフ部分法を用いることが多い。そしてさらに係数行列 A に前処理をすることによって解の収束を早めることが一般的である。本研究では各種クリロフ部分空間法に ILU(1)の前処理を行い反復回数や CPU 時間を ILU(0)の場合と比較・検討をする。

2 計算領域と座標変換

本研究での境界値問題は扇形である計算領域を一般座標変換し、ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

を図 2、図 3、図 4、のように $r_x = 1.0$ 、 $r_x = 2.0$ 、 $r_x = 3.0$ と変化させ計算領域を歪んだ状態にさせてゆく。

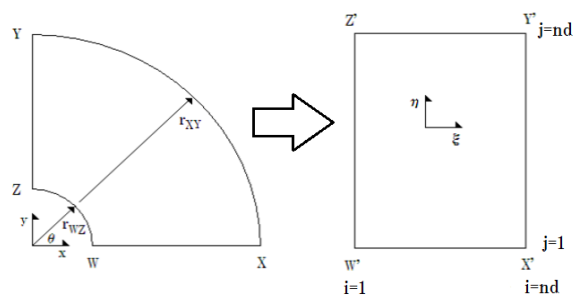


図 1 計算領域と座標変換

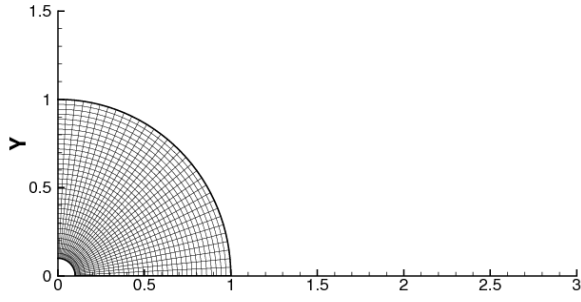


図2 $r_x = 1.0$ のときの計算領域

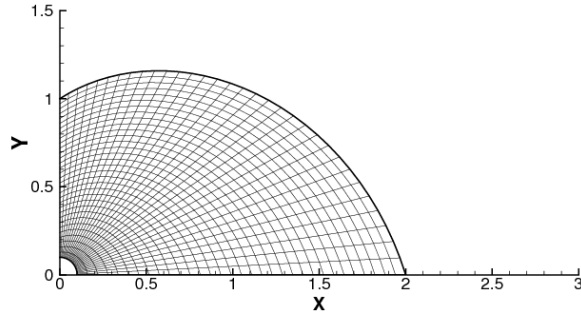


図3 $r_x = 2.0$ のときの計算領域

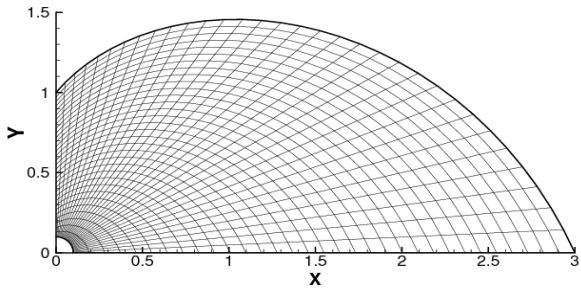


図4 $r_x = 3.0$ のときの計算領域

.3 ILU分解

(1) ILU(0)について

反復法の収束は係数行列の固有値分布に依存し、固有値が1に近いほど収束が早くなる。

そこで、離散化して得られた式(1)での係数行列 A を左下三角行列 L 、右上三角行列 U 、対角行列 D を用いて

$$A \approx LD^{-1}U \quad (3)$$

のように近似する。

本研究では係数行列 A は9本の帯からなる行列でそれぞれ下記の様な構造を持つ。

$$A = \begin{bmatrix} \delta_1 & \omega_1 & \xi_1 & \phi_1 & \mu_1 & & & & \\ \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \gamma_m & & & & & & & \mu_{n-m-1} & \\ \eta_{m+1} & & & & & & & \phi_{n-m} & \\ \tau_{m+2} & & & & & & & \xi_{n-m+1} & \\ & & & & & & & & \omega_{n-1} \\ & & & \tau_n & \eta_n & \gamma_n & \beta_n & \delta_n & \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ b_2 & \ddots & & & & & & & \\ c_m & & \ddots & & & & & & \\ e_{m+1} & & & \ddots & & & & & \\ t_{m+2} & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & t_n & e_n & c_n & b_n & d_n \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & g_1 & & h_1 & f_1 & m_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-m-1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & f_{n-m} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & h_{n-m+1} & \\ & & & & & \ddots & \ddots & g_{n-1} & \\ & & & & & & \ddots & d_n & \end{bmatrix}$$

ILU(0)のアルゴリズム

1. For $i=1-m, -m, \dots, 0$ Do
2. $g_i = 0$
3. EndDo
4. For $i=-m+2, -m+3, \dots, 0$ Do
5. $h_i = 0$
6. EndDo
7. For $i=1-m, 2-m, \dots, 0$ Do
8. $f_i = 0$
9. EndDo
10. For $i=-m, 1-m, \dots, 0$ Do
11. $d_i = 1$
12. EndDo
13. $m_i = \mu_i$
14. $t_i = \tau_i$
15. For $i=1, 2, \dots, n$ Do
16. $e_i = \eta_i - g_{i-m-1}t_{i-m-1}d_{i-m-1}^{-1}$
17. $c_i = \gamma_i - g_{i-m}e_id_{i-m}^{-1}$
18. $b_i = \beta_i - f_{i-m-1}t_id_{i-m-1}^{-1} - h_{i-m}e_id_{i-m}^{-1}$
19. $d_i = \delta_i - g_{i-1}b_id_{i-1}^{-1} - h_{i-m+1}c_id_{i-m+1}^{-1} - f_{i-m}e_id_{i-m}^{-1} - m_{i-m-1}t_id_{i-m-1}^{-1}$
20. $g_i = \omega_i - f_{i-m+1}c_id_{i-m+1}^{-1} - m_{i-m}e_id_{i-m}^{-1}$
21. $h_i = \xi_i - f_{i-1}b_id_{i-1}^{-1}$
22. $f_i = \phi_i - m_{i-1}b_id_{i-1}^{-1}$
23. EndDo

(2) ILU(1)について

行列 $LD^{-1}U$ は係数行列 A に近い行列となるが、完全には一致せず fill-in と呼ばれる値を持った要素が出現する。よって ILU(0) で出現した fill-in を考慮して、より係数行列 A に近い値を持つような ILU 分解を行い前処理の精度を高める。

$$A_1 \approx L_1 D^{-1} U_1 \quad (4)$$

行列 A_1, L_1, D^{-1}, U_1 はそれぞれ下記の様な構造を持つ。

$$A_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 & \omega_1 & \sigma_1 & & \lambda_1 & \xi_1 & \phi_1 & \mu_1 & & \\ \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \rho_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu_{n-m-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \phi_{n-m} \\ \psi_{m-1} & & & & & & & & & \xi_{n-m+1} \\ \gamma_m & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-m+2} \\ \eta_{m+1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \tau_{m+2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \sigma_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \omega_{n-1} \\ & & \tau_n & \eta_n & \gamma_n & \psi_n & \rho_n & \beta_n & \delta_n & \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & & & & \\ b_2 & \ddots & & & & & & & & \\ p_3 & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ r_{m-1} & & & & & & & & & \\ c_m & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ e_{m+1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t_{m+2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & t_n & e_n & c_n & r_n & p_n & b_n & d_n & \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} d_1 & g_1 & q_1 & & s_1 & h_1 & f_1 & m_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-m-1} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & f_{n-m} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h_{n-m+1} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & s_{n-m+2} \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & q_{n-2} \\ & & & & & & & & \ddots & g_{n-1} \\ & & & & & & & & & d_n \end{bmatrix}$$

ILU(1)のアルゴリズム

1. For $i = -m, 1-m, \dots, 0$ Do
2. $g_i = 0$
3. EndDo
4. For $i = -m, 1-m, \dots, 0$ Do
5. $q_i = 0$
6. EndDo
7. For $i = -m+1, -m+2, \dots, 0$ Do
8. $s_i = 0$
9. EndDo
10. For $i = -m, -m+1, \dots, 0$ Do
11. $h_i = 0$
12. EndDo
13. For $i = -m, -m+1, \dots, 0$ Do
14. $f_i = 0$
15. EndDo
16. For $i = -m, 1-m, \dots, 0$ Do
17. $d_i = 1$
18. EndDo
19. $t_i = \tau_i$
20. $m_i = \mu_i$
21. For $i = 1, 2, \dots, n$ Do
22. $e_i = \eta_i - g_{i-m-1} t_i d_{i-m-1}^{-1}$
23. $c_i = \gamma_i - q_{i-m-1} t_i d_{i-m-1}^{-1} - g_{i-m} e_i d_{i-m}^{-1}$
24. $r_i = -q_{i-m} e_i d_{i-m}^{-1} - g_{i-m+1} c_i d_{i-m+1}^{-1}$
25. $p_i = -h_{i-m-1} t_i d_{i-m-1}^{-1} - s_{i-m} e_i d_{i-m}^{-1}$
26. $b_i = \beta_i - f_{i-1} t_i d_{i-1}^{-1} - h_{i-m} e_i d_{i-m}^{-1} - s_{i-m+1} c_i d_{i-m+1}^{-1} - g_{i-2} p_i d_{i-2}^{-1}$
27. $d_i = \delta_i - g_{i-1} b_i d_{i-1}^{-1} - q_{i-2} p_i d_{i-2}^{-1} - s_{i-m+2} r_i d_{i-m+2}^{-1} - h_{i-m+1} c_i d_{i-m+1}^{-1} - f_{i-m} e_i d_{i-m}^{-1} - m_{i-m-1} t_i d_{i-m-1}^{-1}$
28. $g_i = \omega_i - q_{i-1} b_i d_{i-1}^{-1} - h_{i-m+2} r_i d_{i-m+2}^{-1} - f_{i-m+1} c_i d_{i-m+1}^{-1} - m_{i-m} e_i d_{i-m}^{-1}$
29. $q_i = -f_{i-m+2} r_i d_{i-m+2}^{-1} - m_{i-m+1} c_i d_{i-m+1}^{-1}$
30. $s_i = -f_{i-2} p_i d_{i-2}^{-1} - h_{i-1} b_i d_{i-1}^{-1}$
31. $h_i = \xi_i - m_{i-2} p_i d_{i-2}^{-1} - f_{i-1} b_i d_{i-1}^{-1}$
32. $f_i = \phi_i - m_{i-1} b_i d_{i-1}^{-1}$
33. EndDo

4 数値実験

上記で示したアルゴリズムを用いて ILU(0) と ILU(1) の前処理を PCG 法に適用した。その結果を表 1 と表 2 に示す。

表 1 ILU(0) と ILU(1) の反復回数の比較

分割数	ILU(0)	ILU(1)
100	131	83
150	197	123
200	255	164

表 2 ILU(0) と ILU(1) の CPU 時間[s]の比較

分割数	ILU(0)	ILU(1)
100	0.041	0.028
150	0.129	0.087
200	0.277	0.190

.5 まとめ

表 1 より反復回数を比較すると、ILU(1)は ILU(0)から 100 分割、150 分割、200 分割でそれぞれ 36.6%、37.5%、35.6%減少していることがわかる。また、反復回数の減少に応じて CPU 時間も減少している。

これらのことから、偏微分方程式など非常に大規模な連立一次方程式を解く解法として L, D, U 分解をより係数行列 A に近づけた ILU(1)は ILU(0)に比べて有効であり、一定の効果があつたと言える。

.6 参考文献

[1] Pieter Wesseling : An Intruduction Multigrid
Method, 2004

[2] Yourself Saad : Iterative Method for Sparse Linear
Systems SECOND EDITION, 2003