デフォルトリスクを考慮したデリバティブ価格：CVA DVA

石橋, 慎 / ISHIBASHI, Makoto

(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
31
(発行年 / Year)
2015-03-24
(学位授与年月日 / Date of Granted)
2015-03-24
(学位名 / Degree Name)
修士(工学)
(学位授与機関 / Degree Grantor)
法政大学 (Hosei University)

2014 年度修士論文

デフォルトリスクを考慮したデリバティブ価格

-CVA DVA-

法政大学理工研究科
システム工学専攻

13R6204　石橋　慎

指導教員　浦谷 規 教授

The 2014 master's Thesis

CVA AND DVA FOR DEFAULT RISK MANAGEMENT OF EUROPEAN TYPE DERIVATIVES

DEPARTMENT OF SYSTEM ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
HOSEI UNIVERSITY

13R6204 MAKOTO ISHIBASHI

Supervisor Prof. Tadashi URATANI

概　要

本論文では近年デリバティブ取引におけるカウンターパーティリスクを管理する方法として注目されているCVA の検証を行う．CVA はカウンターパーティの信用力を基にデリバティブ価格の時価調整を行うものである．Hull and White [1] を参考にし，新たな CVA モデルの導出について CCAPM とヘッジング・ポートフォリオの理論を用いて説明する．導出したモデルを基にカウンターパーティと金融機関のハザードレートの相関を考慮した場合のシミュレーションを行う．シミュレーションではヨーロッパ型デリバティブについて二変量正規分布と t 分布を参照する．また，一方向 CVA(バーゼル Ⅲ) と双方向 CVA(IFRS) の資本賦課について比較する．

Abstract

We consider the Credit Value Adjustment (CVA) for financial institutions to manage counterparty risk in derivative transactions. CVA is the market value adjustment of derivative price based on the creditworthiness of company in the case of default. The new method for CVA, which is proposed by Hull and White [1], is based on the theory of Continuous CAPM and hedging portfolios approach. We evaluate the effect of correlation of counter party default and the Bank default probability in simulation. The distribution is assumed to be bivariate normal distribution and bivariate t-distribution for default correlation in European type derivatives. We compare capital requirement for bank in calculation by only CVA (BaselⅢ) and by both CVA and DVA (IFRS).

目 次

1　はじめに

1.1　研究背景

今般の世界金融危機では，Lehman Brothers の破綻や相次いだ金融機関の救済合併や国有化により，デリバティブ取引においてカウンターパーティがデフォルトするリスクが顕在化した．特に，Lehman Brothers の破綻では Lehman Brothers と相対のデリバティブ契約を結んでいた AIG などの大手金融機関や投資家がカウンターパーティ・リスクに晒された．

金融危機以降のグローバル大手金融機関においては，デリバティブ取引におけるカウンターパーティリスクを管理する専門のデスクを導入している．グローバル大手金融機関ではデリバティブ取引価格をカウンターパーティの信用力によって時価調整しているケースが一般的であり，近年カウンターパーティリスクを考慮した時価評価及び管理の高度化の重要性が高まっている．

このような背景から，本論文では金融取引におけるカウンターパーティと金融機関の信用力を考慮したデリバティブの時価評価について検証する．

1.2　CVA，DVA の定義

CVA(Credit Value Adjustment) はデリバティブ取引の時価評価において，カウンターパーティの信用リスクに応じてデリバティブ取引に加える時価調整である．

CVA はデリバティブ契約を締結したカウンターパーティの信用力が悪化するほど増加することとなり，その結果当該取引の時価が下落し会計上損失を計上することになる．

一方，DVA(Debt Value Adjustment) は金融機関 (自社) の信用リスクに応じて計算される時価調整のことを指す．

DVA は，カウンターパーティではなく金融機関 (自社) の信用状況によって時価に加えられる調整であるため，金融機関 (自社) の信用力が悪化して DVA が増加するほど金融機関 (自社) の正味の負債が減少し，会計上利益を計上することになる．

図 1 は CVA と DVA の関係を表している．金融機関 A(自社) とカウンターパーティB の間にデリバティブ契約が締結されているとする．このとき，カウンターパーティB の信用力によってデリバティブの時価調整を行うのが CVA であり，金融機関 A の信用力によってデリバティブの時価調整を行うのが DVA である．

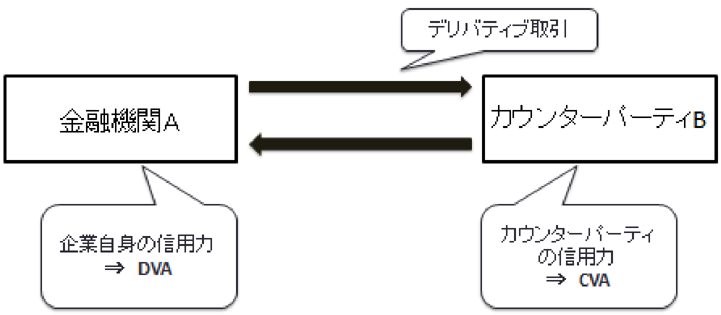

図 1: CVA と DVA

上記のカウンターパーティの信用力のみを考慮した時価調整を一方向 CVA と呼ぶ．また，一方向 CVA と DVA の双方を考慮した時価調整を双方向 CVA と呼ぶ．

1.3　CVA，DVA の意義と課題

前述の通り，金融危機以降のグローバル大手金融機関において CVA，DVA の導入は進んできている．しかし，日本ではまだ CVA の必要性や有効性を感じている金融機関の数，または CVA の必要性を感じていながらも実際に導入している金融機関の数は僅少である．米国ではデリバティブは公正価値測定され，金融機関は双方向 CVA によって価格調整されたデリバティブの時価を会計に計上する．これは米国財務会計基準審議会 (FASB) によってルール化されたものである．このように，日本の CVA と DVA に関する認識と導入は米国に比べて遅れている．OTC デリバティブの取引額が年々増加してきている昨今，日本の金融機関がグローバルにビジネス展開をさせるには，CVA，DVA 制度を導入することでデフォルト時の損失を抑えより機動的なデリバティブ取引を行うことが必要であると考えられる．

海外の CVA と DVA について目を向けると，バーゼル Ⅲ と国際会計基準 (IFRS) の CVA，DVA に対する資本賦課の違いが課題となっている．バーゼル Ⅲ では CVA の資本賦課は一方向 CVA に相当するとしており，DVA を自己資本として認めない方針を示している．一方 IFRS では双方向 CVA によって時価評価を行い資本賦課に反映させることを要求している．IFRS の IAS39 で求められている CVA 計算手法は非常に煩雑であり，今後 CVA，DVA に関する規制によって金融機関は様々な対応をすることが求められる．

1.4　研究目的

従来の CVA のモデルは，カウンターパーティのデフォルト確率とハザードレートなどの確率変数，デリバティブの回収率やエクスポージャの現在価値を用いて計算されるため非常に煩雑な計算となる．その計算式は R を回収率，T を満期，τ をデフォルト時刻，$q(t)$ をデフォルト確率，$v(t)$ をエクスポージャとすると以下のようになる．

$$CVA = (1-R)\int_t^T [q(t)v(t)|\tau = t]\, dt \tag{1.1}$$

Hull and White[2] や Burgard Kjaer[3] の CVA に関する先行研究でもこのモデルが用いられている．本論文で参考にした Hull and White[1] では，カウンターパーティデフォルト時のデリバティブと債券の期待損失率から CVA の価格を算出するモデルを用いているため，従来のモデルに比べると計算しやすいモデルとなっている．Hull and White[1] を参考にし新たな CVA モデルの導出について CCAPM とヘッジ戦略の理論を用いて説明する．

また，Hull and White[1] を参考にしたモデルを基にシミュレーションを行い，カウンターパーティと金融機関 (自社) の信用力によってデリバティブの時価調整を行う CVA，DVA について検証する．また，バーゼル Ⅲ と国際会計基準 (IFRS) の CVA，DVA に対する資本賦課の違いについても考察を行う．

本論文の構成は，第 2 章からデフォルトリスクを考慮しないヨーロッパ型デリバティブの価格式の導出について説明する．第 3 章ではデフォルトリスクを考慮したヨーロッパ型デリバティブの価格式の導出について説明する．ここでは，カウンターパーティの信用力を考慮する CVA と金融機関 (自社) の信用力を考慮する DVA のモデルについてそれぞれ導出説明を行い，双方向 CVA の場合の価格式の説明も行う．第 4 章ではデリバティブの担保の影響を考慮したヨーロッパ型デリバティブの価格式の導出について説明する．第 5 章から CVA，DVA に関して様々な条件下でシミュレーションを行い考察する．第 6 章で本論文の結論を述べる．

2　デフォルトリスクを考慮しないヨーロッパ型デリバティブの価格式

本論文で用いる文字を以下のように定義する．

文字の定義

S：株式価格
T：満期
f：デリバティブ価格
f_{nd}：デフォルトリスクを考慮しないデリバティブ価格
μ：株式の期待収益
μ_M：マーケットポートフォリオの期待収益
σ：ボラティリティ
dZ：ブラウン運動
r：無リスク金利
r_S：株式の収益率
r_f：デリバティブの収益率
r_M：マーケットの収益率
γ_C：カウンターパーティデフォルト時のデリバティブの期待損失率
η_C：カウンターパーティデフォルト時の債券の期待損失率
r_C：カウンターパーティが発行した債券の利回り
λ_C：カウンターパーティのハザード率
γ_B：金融機関デフォルト時のデリバティブの期待損失率
η_B：金融機関デフォルト時の債券の期待損失率
r_B：金融機関が発行した債券の利回り
λ_B：金融機関のハザード率
s：担保の金利
Q：確率空間
Π：ヘッジングポートフォリオの価値

2.1　CCAPM による導出

ここから Hull and White[1] を参考にし，デフォルトリスクを考慮しないヨーロッパ型デリバティブ価格式の導出について伊藤の補題と資本資産価格モデル (CCAPM：Continuous Capital Asset Pricing Model) の理論を用いて説明する．

f をデリバティブの価格，S を株価とすると以下の式が成り立つとする．

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \tag{2.1}$$

伊藤の補題より，以下の式が成り立つ．

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dZ \tag{2.2}$$

ここで，

$$\mu_f = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \tag{2.3}$$

と置くと，(2.3) 式は以下のようになる．

$$df = \mu_f f dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dZ \tag{2.4}$$

株式の β 値を求める．β 値はマーケット (市場) の収益率 r_M に対する個別の株式とデリバティブの感応度である．それらの β 値の定義はそれぞれ以下のようになる

$$\beta_f = \frac{Cov(r_f, r_M)}{Var(r_M)} \tag{2.5}$$

$$\beta_S = \frac{Cov(r_S, r_M)}{Var(r_M)} \tag{2.6}$$

したがって

$$\frac{\beta_f}{\beta_S} = \frac{Cov(r_f, r_M)}{Cov(r_S, r_M)}$$

r_f はデリバティブの収益率，r_S は株式の収益率であり以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
r_f &= \frac{df}{f} \\
&= \frac{\mu_f}{f} dt + \sigma \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} dZ \\
r_S &= \frac{dS}{S} \\
&= \mu dt + \sigma dZ
\end{aligned}$$

共分散の公式より (2.5)(2.6) 式はそれぞれ以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\beta_f &= \frac{Cov\left(\mu_f dt + \sigma \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} dZ, r_M\right)}{Var(r_M)} \\
&= \frac{E\left[\sigma \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} dZ (r_M - E[r_M])\right]}{Var(r_M)} \\
\beta_S &= \frac{Cov\left(\mu_S + \sigma dZ, r_M\right)}{Var(r_M)} \\
&= \frac{E\left[\sigma dZ (r_M - E[r_M])\right]}{Var(r_M)}
\end{aligned}$$

CCAPM では期待値および分散，共分散は t における条件付き期待値なので以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_f}{\beta_S} &= \frac{E\left[\sigma \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} dZ (r_M - E[r_M])\right]}{E\left[\sigma dZ (r_M - E[r_M])\right]} \\
&= \frac{\sigma \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} E\left[dZ (r_M - E[r_M])\right]}{\sigma E\left[dZ (r_M - E[r_M])\right]} \\
&= \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} \\
\beta_f &= \frac{S}{f} \frac{\partial f}{\partial S} \beta_S \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

CCAPM の式より以下の式が成り立つ．

$$\mu_f = r + \beta_f(\mu_M - r)$$

この式に (2.7) 式を代入すると

$$\mu_f = r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}\beta_S(\mu_M - r) \tag{2.8}$$

CCAPM の式より

$$\begin{aligned} \mu &= r + \beta_S(\mu_M - r) \\ \mu - r &= \beta_S(\mu_M - r) \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.9) 式を (2.8) 式へ代入すると

$$\mu_f = r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \tag{2.10}$$

(2.3) 式と (2.10) 式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) &= r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= rf + S\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= rf + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} - rS\frac{\partial f}{\partial S} \\ \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= rf \end{aligned} \tag{2.11}$$

(2.11) 式はブラック－ショールズの偏微分方程式である．

ここで，デリバティブの価格式を求めるためにファインマン－カッツの定理を利用する．

Appendix A-1 のファインマン－カッツの定理より，時刻 T で満期のデフォルトリスクを考慮しないヨーロッパ型デリバティブの価格式は以下のようになる．

$$f(S_t, t) = E_Q\left[e^{-\phi(t)}f(S_T, T)\right]$$

このときの終端条件は $f(S_T, T)$ である．また，以下の式を代入すると

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_t^T \rho(s, X(s))ds \\ &= r(T - t) \end{aligned}$$

ヨーロッパ型デリバティブの価格式は以下のようになる．

$$f(S_t, t) = e^{-r(T-t)}E_Q\left[f(S_T, T)\right]$$

このときのヨーロッパ型デリバティブの価格式はデフォルトを考慮していないので，$f(S_t, t) = f_{nd}$(nd は $non - default$ を表す) とすると，以下のようになる．

$$f_{nd} = e^{-r(T-t)}E_Q\left[f(S_T, T)\right] \tag{2.12}$$

2.2 ヘッジ戦略による導出

ヘッジングポートフォリオの価値を Π とする.

デリバティブ 1 単位の売りに対して株式を $\frac{\partial f}{\partial S}$ 株買いリスクをヘッジすると，デルタヘッジの理論から以下の式が成り立つ.

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{2.13}$$

(2.13) 式より

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S}dS$$

(2.1) 式 (2.4) 式をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
d\Pi &= -\left(\mu_f f dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ\right) + \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dZ) \\
d\Pi &= -\left(\mu_f f dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ\right) + \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ \\
d\Pi &= -\mu_f f dt + \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt
\end{aligned}$$

(2.3) 式を代入すると

$$\begin{aligned}
d\Pi &= -\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \mu S\frac{\partial f}{\partial S}f dt \\
d\Pi &= -\frac{\partial f}{\partial t}dt - \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt + \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt \\
d\Pi &= -\frac{\partial f}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt \\
d\Pi &= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

リスク調整した収益率と無リスク金利 r は等しくなるので，以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
d\Pi &= r\Pi dt \\
&= \left(-rf + rS\frac{\partial f}{\partial S}\right)dt \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

(2.14)(2.15) 式より以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt &= \left(-rf + rS\frac{\partial f}{\partial S}\right)dt \\
-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= -rf - rS\frac{\partial f}{\partial S} \\
\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= rf \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

このようにヘッジ戦略による導出方法でも CCAPM を用いる導出方法と同様にヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式を導出できる.

3 デフォルトリスクを考慮したヨーロッパ型デリバティブの価格式

3.1 CVA -Credit Value Adjustment-

3.1.1 CCAPM による導出

ここから Hull and White[1] を参考にし，CVA を含むヨーロッパ型デリバティブ価格式の導出について伊藤の補題と CCAPM の理論を用いて説明する．

カウンターパーティに債務不履行 (デフォルト) の可能性がある場合，以下の式が成り立つ．

$$df = \mu_f f dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dZ - \gamma_C f dq \tag{3.1}$$

ここで，γ_C はカウンターパーティのデフォルトが発生した場合のデリバティブの期待損失率，dq はカウンターパーティのハザードレート λ_C のポアソンプロセスを表している．

その収益率は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} &= \mu_f dt + \sigma \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} dZ - \gamma_C dq \\ E\left[\frac{df}{f}\right] &= (\mu_f - \gamma_C \lambda_C) dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

CCAPM の式より

$$\begin{aligned} E\left[\frac{df}{f}\right] &= r + \beta_f(\mu_M - r) \\ &= r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.2) 式 (3.3) 式より

$$\begin{aligned} \mu_f - \gamma_C \lambda_C &= r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \\ \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) &= r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) + \gamma_C \lambda_C \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{S^2}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= r + \mu \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} - r\frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} + \gamma_C \lambda_C \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + r \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{S^2}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= r + \gamma_C \lambda_C \\ \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= (r + \gamma_C \lambda_C) f \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここからハザードレート λ_C を求める．カウンターパーティが社債を発行しているとすると，その債券プロセスは以下のようになる．

$$dB_C = r_C B_C dt - \eta_C B_C dq \tag{3.5}$$

ここでの r_c はカウンターパーティが発行する債券の利回りである．また，η_c はカウンターパーティのデフォルトが発生した場合の債券の期待損失率である．

(3.5) 式より

$$
\begin{aligned}
\frac{dB_C}{B_C} &= r_C dt - \eta_C dq \\
E\left[\frac{dB_C}{B_C}\right] &= r_C dt - \eta_C \lambda_C dt \\
&= (r_C - \eta_C \lambda_C) dt
\end{aligned}
$$

リスク調整した収益率と無リスク金利 r は等しくなるので

$$
\begin{aligned}
(r_C - \eta_C \lambda_C) dt &= r dt \\
r_C - \eta_C \lambda_C &= r
\end{aligned}
$$

よって，カウンターパーティのハザードレート λ_C は以下のように求まる．

$$
\lambda_C = \frac{r_C - r}{\eta_C} \tag{3.6}
$$

(3.6) 式を (3.4) 式に代入すると以下の式が成り立つ．

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left\{ r + (r_C - r)\frac{\gamma_C}{\eta_C} \right\} f \tag{3.7}
$$

ここで

$$
r_C^* = r + (r_C - r)\frac{\gamma_C}{\eta_C} \tag{3.8}
$$

とすると，CVA を含むヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式は以下のようになる．

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_C^* f \tag{3.9}
$$

ファインマン－カッツの定理より，時刻 T で満期の CVA を含むヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式は以下のようになる．

$$
f(S_t, t) = e^{-r_C^*(T-t)} E_Q \left[f(S_T, T) \right] \tag{3.10}
$$

(2.12) 式 (3.18) 式より

$$
\begin{aligned}
f(S_t, t) &= e^{-r_C^*(T-t)} \frac{f_{nd}}{e^{-r(T-t)}} \\
f(S_t, t) &= f_{nd} e^{-r_C^*(T-t)} e^{r(T-t)} \\
f(S_t, t) &= f_{nd} e^{-(r_C^* - r)(T-t)} \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

CVA(Credit Value Adjustment) はデリバティブ取引の時価評価において，カウンターパーティの信用リスクに応じてデリバティブ取引に加える時価調整である．また，カウンターパーティの信用リスクにみではなく金融機関 (自社) の信用リスクも同様に勘案して CVA を計算する方法を双方向 CVA(Bilateral CVA) という．

デフォルトの可能性があるということはデリバティブ価値を下げるので CVA に関して以下の式が成り立つ．

命題 1 CVA の価格式

$$
\begin{aligned}
f &= f_{nd} - CVA \\
CVA &= f_{nd} - f_{nd} e^{-(r_C^* - r)(T-t)} \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

3.1.2 ヘッジ戦略による導出

ここから，CVA を含むヨーロッパ型デリバティブ価格式の導出についてヘッジングポートフォリオの理論を用いて説明する．

Hull and White[1] を参考にすると，デリバティブ 1 単位に対して n ユニットの債券を保有しヘッジを行うとすると以下の式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
nB_C\eta_C &= \gamma_C f \\
nB_C &= \frac{\gamma_C}{\eta_C} f \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

ここでポートフォリオの価値を Π とすると

$$
\begin{aligned}
\Pi &= f - S\frac{\partial f}{\partial S} - nB_C \\
&= f - S\frac{\partial f}{\partial S} - \frac{\gamma_C}{\eta_C} f \\
&= \left(1 - \frac{\gamma_C}{\eta_C}\right) f - S\frac{\partial f}{\partial S} \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

伊藤公式より

$$
\begin{aligned}
d\Pi &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - \frac{\partial f}{\partial S}dS - ndB_C \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - ndB_C
\end{aligned}
$$

この式に (3.5) 式を代入する．

$$
d\Pi = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - n(r_C B_C dt - \eta_C B_C dq)
$$

η_c の項はデフォルトがない限り 0 であるので

$$
d\Pi = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - nr_C B_C dt
$$

この式に (3.13) 式を代入すると

$$
d\Pi = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - r_C \frac{\gamma_C f}{\eta_C}dt \qquad (3.15)
$$

また，リスク調整した収益率と無リスク金利 r は等しくなるので

$$d\Pi = r\Pi dt$$

よって以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\left\{f\left(1-\frac{\gamma_C}{\eta_C}\right)-\frac{\partial f}{\partial S}S\right\}dt \\ &= rf\left(1-\frac{\gamma_C}{\eta_C}\right)dt - r\frac{\partial f}{\partial S}Sdt \end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.15) 式 (3.16) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - r_C\frac{\gamma_C f}{\eta_C}dt &= rf\left(1-\frac{\gamma_C}{\eta_C}\right)dt - rS\frac{\partial f}{\partial S}dt \\ \frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= rf\left(1-\frac{\gamma_C}{\eta_C}\right)+r_C\frac{\gamma_C f}{\eta_C}f \\ \frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \left\{r+(r_C-r)\frac{\gamma_C}{\eta_C}\right\}f \end{aligned}$$

ここで (3.8) 式と同様に

$$r_C^* = r + (r_C - r)\frac{\gamma_C}{\eta_C}$$

とすると，CVA を含むヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_C^* f \tag{3.17}$$

ファインマン－カッツの定理の終端条件によって，コール・オプション，プット・オプション，先物オプション，先渡し契約などの CVA を含むヨーロッパ型デリバティブの価格式を導出することができる．

3.1 節と同様に，ファインマン－カッツの定理より，時刻 T で満期の CVA を含むヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式は以下のようになる．

$$f(S_t,t) = e^{-r_C^*(T-t)}E_Q\left[f(S_T,T)\right] \tag{3.18}$$

3.2 DVA -Debt Value Adjustment-

3.1 節と同様に DVA を含むヨーロッパ型デリバティブ価格式の導出について伊藤の補題と CCAPM の理論を用いて説明する.

金融機関 (自社) に債務不履行 (デフォルト) の可能性がある場合, (2.3) 式 (2.4) 式より以下の式が成り立つ.

$$df = \mu_f f dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dZ - \gamma_B f dq \tag{3.19}$$

ここで, γ_B は金融機関 (自社) がデフォルトした場合のデリバティブの期待損失率, dq は金融機関 (自社) のハザードレート λ_B のポアソンプロセスを表している.

その収益率は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} &= \mu_f dt + \sigma \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} dZ - \gamma_B dq \\ E\left[\frac{df}{f}\right] &= (\mu_f - \gamma_B \lambda_B) dt \end{aligned} \tag{3.20}$$

CCAPM の式より (3.3) 式が成り立つので, (3.3) 式 (3.20) 式より

$$\begin{aligned} \mu_f - \gamma_B \lambda_B &= r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \\ \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) &= r + \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) + \gamma_B \lambda_B \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{S^2}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= r + \mu \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} - r\frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} + \gamma_B \lambda_B \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + r \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{S^2}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= r + \gamma_B \lambda_B \\ \frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= (r + \gamma_B \lambda_B) f \end{aligned} \tag{3.21}$$

また, 金融機関 (自社) が割引社債を発行しているとすると, 債券プロセスは以下のようになる.

$$dB_B = r_B B_B dt - \eta_B B_B dq \tag{3.22}$$

ここでの r_B は金融機関 (自社) が発行する債券の利回りである. また, η_B は金融機関 (自社) のデフォルトが発生した場合の債券の期待損失率である.

(3.22) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dB_B}{B_B} &= r_B dt - \eta_B dq \\ E\left[\frac{dB_B}{B_B}\right] &= r_B dt - \eta_B \lambda_B dt \\ &= (r_B - \eta_B \lambda_B) dt \end{aligned}$$

リスク調整した収益率と無リスク金利 r は等しくなるので, 金融機関 (自社) のハザードレート λ_B は以下のようになる.

$$\begin{aligned} (r_B - \eta_B \lambda_B) dt &= r dt \\ r_B - \eta_B \lambda_B &= r \end{aligned}$$

よって，金融機関 (自社) のハザードレート λ_B は以下のように求まる．

$$\lambda_B = \frac{r_B - r}{\eta_B} \tag{3.23}$$

(3.23) 式を (3.21) 式に代入すると以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left\{ r + (r_B - r)\frac{\gamma_B}{\eta_B} \right\} f \tag{3.24}$$

ここで

$$r_B^* = r + (r_B - r)\frac{\gamma_B}{\eta_B} \tag{3.25}$$

とすると，DVA を含むヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_B^* f \tag{3.26}$$

3.1 節と同様に時刻 T で満期の DVA を含むヨーロッパ型デリバティブの価格式は以下のようになる．

$$f(S_t, t) = e^{-r_B^*(T-t)} E_Q \left[f(S_T, T) \right] \tag{3.27}$$

(2.12) 式 (3.27) 式より

$$\begin{aligned} f(S_t, t) &= e^{-r_B^*(T-t)} \frac{f_{nd}}{e^{-r(T-t)}} \\ f(S_t, t) &= f_{nd} e^{-r_B^*(T-t)} e^{r(T-t)} \\ f(S_t, t) &= f_{nd} e^{-(r_B^* - r)(T-t)} \end{aligned} \tag{3.28}$$

DVA(Debt Value Adjustment) は双方向 CVA において金融機関 (自社) の信用リスクに応じてデリバティブ取引に加える時価調整である．よって DVA に関して以下の式が成り立つ．

命題 2 DVA **の価格式**

$$\begin{aligned} f &= f_{nd} + DVA \\ DVA &= f_{nd} e^{-(r_B^* - r)(T-t)} - f_{nd} \end{aligned} \tag{3.29}$$

CVA はデリバティブ契約を締結したカウンターパーティの信用力が悪化するほど増加することとなり，その結果当該取引の時価が下落し会計上損失を計上する．

一方 DVA はこの逆の概念であり，カウンターパーティではなく金融機関 (自社) の信用状況によって時価に加えられる調整であるため，金融機関 (自社) の信用力が悪化して DVA が増加するほど金融機関 (自社) の正味の負債が減少し，会計上利益を計上する．

3.3 双方向 CVA

3.1，3.2 節では，カウンターパーティと金融機関 (自社) の信用力を個々に考えた．この節では，CVA と DVA を同時に考慮する双方向 CVA の導出について説明する．

Hull and White[1] を参考にすると，デリバティブの価値が正である場合は (3.9) 式を適用しデリバティブの価値が負である場合は (3.26) 式を適用する．

その式は以下のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_C^* \max(f, 0) + r_B^* \min(f, 0) \tag{3.30}$$

$$f(S_t, t) = f_{nd} - CVA + DVA \tag{3.31}$$

ここで，デリバティブの価値について三つの場合に分けて考える．第 1 に f_{nd} が正になる場合，第２に f_{nd} が負になる場合，第３にそのどちらでもなく $r_C^* = r_B^* = r^*$ となる場合である．第 1 と第２についてはは 3.1 節 3.2 節で説明した通りである．第３の場合，以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r^* f \tag{3.32}$$

3.2 節と同様に時刻 T でペイオフを提供する双方向 CVA を含むヨーロッパ型デリバティブの価格式は以下のようになる．

$$f(S_t, t) = e^{-r^*(T-t)} E_Q \left[f(S_T, T) \right] \tag{3.33}$$

(2.12) 式 (3.33) 式より

$$\begin{aligned} f(S_t, t) &= e^{-r^*(T-t)} \frac{f_{nd}}{e^{-r}(T-t)} \\ f(S_t, t) &= f_{nd} e^{-r^*(T-t)} e^{r}(T-t) \\ f(S_t, t) &= f_{nd} e^{-(r^*-r)(T-t)} \end{aligned} \tag{3.34}$$

よって (3.31) 式より以下の式が成り立つ．

命題 3 双方向 CVA の価格式

$$\begin{aligned} f &= f_{nd} - CVA + DVA \\ CVA - DVA &= f_{nd} - f_{nd} e^{-(r^*-r)(T-t)} \end{aligned} \tag{3.35}$$

4　担保の影響を考慮したヨーロッパ型デリバティブの価格式

4.1　CRA-Collateral Rate Adjustment-

ここから，担保の影響を考慮したヨーロッパ型デリバティブの価格式の導出について説明する．

Hull and White[1] を参考にすると，$s+r$ を担保の支払金利とするときデリバティブの収益率の式は以下のようになる．

$$\mu_f = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) - (r+s) \tag{4.1}$$

また，CCAPM の式より

$$\begin{aligned} \mu_f &= r + \beta_f(\mu_M - r) - r \\ &= \beta_f(\mu_M - r) \end{aligned} \tag{4.2}$$

(2.7) 式 (2.9) 式を (4.2) 式へ代入すると

$$\mu_f = \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \tag{4.3}$$

(4.1) 式 (4.3) 式より，担保金利を含んだヨーロッパ型デリバティブの偏微分方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) - (r+s) &= \frac{S}{f}\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) - (r+s)f &= S\frac{\partial f}{\partial S}(\mu - r) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - (r+s)f &= \mu S\frac{\partial f}{\partial S} - rS\frac{\partial f}{\partial S} \\ \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= (r+s)f \end{aligned} \tag{4.4}$$

２章と同様に時刻 T で満期の担保の影響を含むヨーロッパ型デリバティブの価格式は，ファインマンーカッツの定理より以下のようになる．

$$f(S_t, t) = e^{-(r+s)(T-t)}E_Q[f(S_T, T)] \tag{4.5}$$

(2.12) 式 (4.5) 式より

$$\begin{aligned} f(S_t, t) &= e^{-(r+s)(T-t)}\frac{f_{nd}}{e^{-r}(T-t)} \\ f(S_t, t) &= f_{nd}e^{-(r+s)(T-t)}e^{r}(T-t) \\ f(S_t, t) &= f_{nd}e^{-s(T-t)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

CRA(Collateral Rate Adjustment) は以下の式のようになる．

命題 4 CRA の価格式

$$\begin{aligned} f &= f_{nd} - CRA \\ CRA &= f_{nd} - f_{nd}e^{-s(T-t)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 ヘッジ戦略による導出

担保を含むヨーロッパ型デリバティブの価格式の導出についてヘッジング・ポートフォリオの理論を用いて説明する．

ヘッジポートフォリオの価値をポートフォリオの価値を Π とすると，(2.13) 式より

$$\begin{aligned} \Pi &= -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \\ d\Pi &= -df + \frac{\partial f}{\partial S}dS \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.8) 式に (2.4) 式を代入すると

$$d\Pi = -\left(\mu_f f dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ\right) + \frac{\partial f}{\partial S}dS \quad (4.9)$$

(4.9) 式に (4.1) 式 (2.1) 式を代入すると

$$\begin{aligned} d\Pi = &-\left[\left\{\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) - (r+s)\right\} f dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ\right] \\ &+ \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dZ) \\ \\ = &-\left[\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) - (r+s)f\right\} dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ\right] \\ &+ \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dZ) \\ \\ = &-\left\{\frac{\partial f}{\partial t}dt + \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt - (r+s)f dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ\right\} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dZ) \\ \\ = &-\frac{\partial f}{\partial t}dt - \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt + (r+s)f dt - \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ \\ &+ \mu S\frac{\partial f}{\partial S}dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dZ \\ \\ = &-\frac{\partial f}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt + (r+s)f dt \end{aligned}$$

(4.8) 式を用いると (4.4) 式と同じ偏微分方程式を導出することができる．

5 シミュレーション

ここから，S-PLUS を用いて CVA の価格付けシミュレーションを行う．

本論文では，ブラックーショールズのヨーロッパ型オプション式からヨーロッパ型コール・オプションの価格を算出しシミュレーションに用いた．

ブラックショールズのヨーロッパ型コール・オプション式

株価：S，行使価格：K，満期：T とした時のヨーロッパ型コール・オプションの価格 $f(S_t,t)$ は以下のようになる．

$$f(S_t,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

d_1，d_2 はそれぞれ以下のようになる．

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

ただし，無リスク金利 r は一定であるとする．

CVA，DVA **の価格式**

f_{nd}：ヨーロッパ型デリバティブの価格，T：満期とした時の CVA と DVA の価格式は以下のようになる．

$$CVA = f_{nd} - f_{nd}e^{-(r_C^* - r)(T-t)}$$
$$DVA = f_{nd}e^{-(r_B^* - r)(T-t)} - f_{nd}$$

ただし，無リスク金利 r は一定であるとする．

算出したヨーロッパ型コール・オプションの価格を f_{nd}(デフォルトリスクを考慮しないヨーロッパ型デリバティブ価格) とし，f_{nd} を基に CVA 価格のシミュレーションを行う．

また，以下のようにパラメータを固定する．

$$S(\text{株価}) = 100$$
$$K(\text{行使価格}) = 90$$
$$r(\text{無リスク金利}) = 0.02$$
$$r_C(\text{債券の利回り}) = 0.05$$
$$\sigma(\text{ボラティリティ}) = 0.4$$
$$T(\text{満期}) = 1$$

5.1 時間を変化させた CVA

5.1 節ではデリバティブ契約の満期を 1 年に固定し，時間を 0 から 1 まで進めた場合の CVA 価格の変化をシミュレーションする．使用する式は命題 1(3.12) 式である．

シミュレーションを行うにあたって，γ_C=0.6，η_C=0.5 とした．ヨーロッパ型コール・オプションの価格 f_{nd} は 17.9002 となった．

時間	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
CVA 値	0.629	0.567	0.505	0.443	0.380	0.317	0.254	0.191	0.128	0.064	0
CVA/f	0.035	0.032	0.028	0.025	0.021	0.018	0.014	0.011	0.007	0.004	0

表 1: 時間変化による CVA 価格

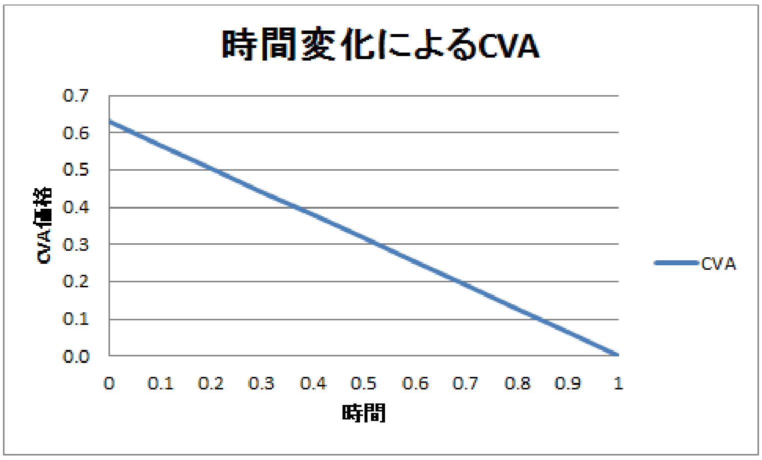

図 2: 時間変化による CVA

5.1.1 考察

時間以外のパラメータを固定した場合，CVA は時間が進むと共に減少していくという結果が得られた．これは時間が進むにつれてカウンターパーティのデフォルト確率が下がるためであると考えられる．

5.2 γ_C，η_C に相関がある場合の CVA

5.2.1 相関がある二変量正規分布

5.2 節ではカウンターパーティのデフォルトが起こった場合のデリバティブの期待損失率 γ_C と債券の期待損失率 η_C の相関を考慮したシミュレーションを行う．使用する式は (3.8) 式，命題 1(3.12) 式である．

Hull and White[1] のモデルは，デリバティブ価値の期待損失率 γ_C と債券価値の期待損失率 η_C を用いて CVA の価格を算出するモデルである．デリバティブの期待損失率 γ_C と債券の損失率 η_C について実際の市場データから推定するのは難しいと考え, ランダム性を持たせた.

5.2.1 項では，二変量正規分布 (平均 0，分散 1) の基で γ_C，η_C の相関 ρ を 0 から 1 の範囲で動かした場合の CVA を 500 個発生させ，CVA 価格の平均，分散，デリバティブ価格に対する割合を算出した．ヨーロッパ型コール・オプションの価格は 5.1 節と同値である．また，時刻 t は 0.25 とした．

相関	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
mean	1.627	1.503	1.378	1.249	1.110	0.964	0.817	0.677	0.554	0.458	0.396
var	10.857	9.479	8.239	6.898	5.344	3.752	2.289	1.109	0.391	0.090	0
cva/f	0.091	0.084	0.077	0.070	0.062	0.054	0.046	0.038	0.031	0.026	0.022

表 2: 相関がある二変量正規分布での結果

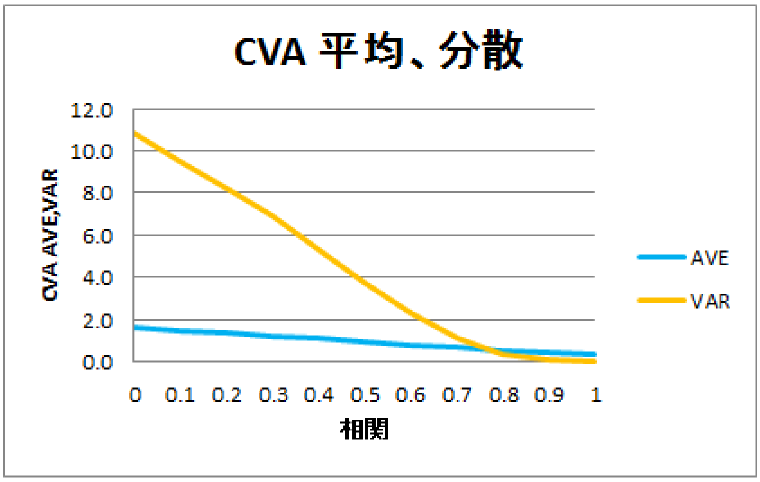

図 3: 二変量正規分布による CVA の平均と分散

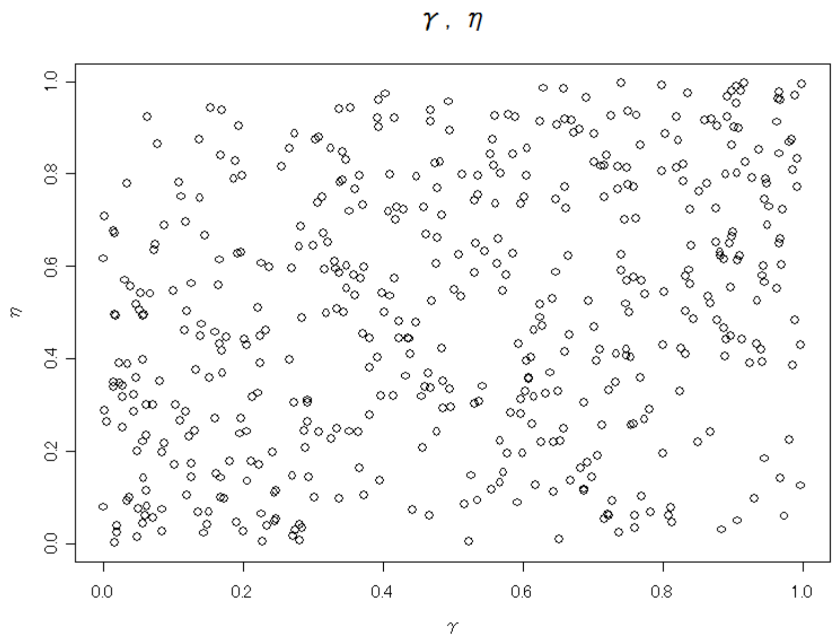

図 4: 相関がある γ_C，η_C（$\rho = 0.3$）

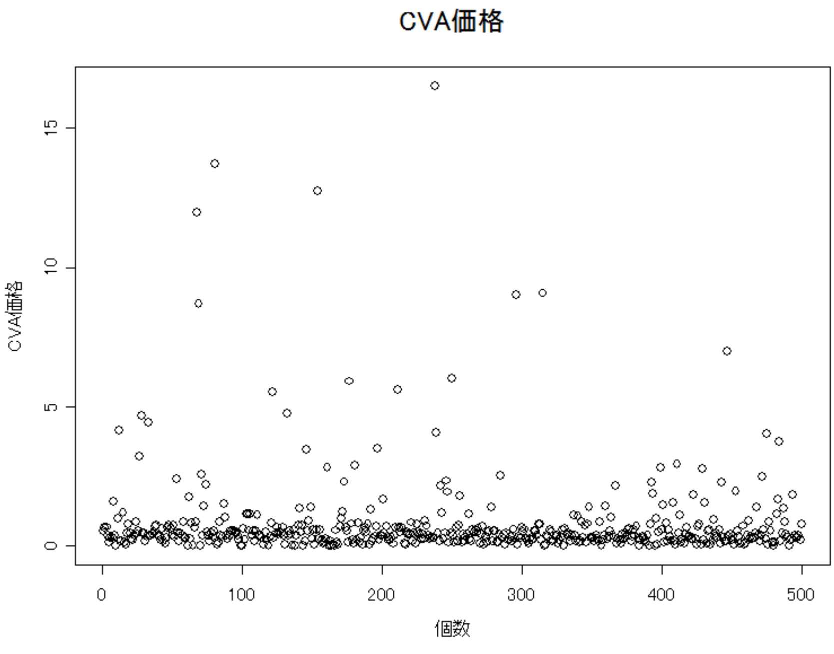

図 5: CVA の価格（$\rho = 0.3$）

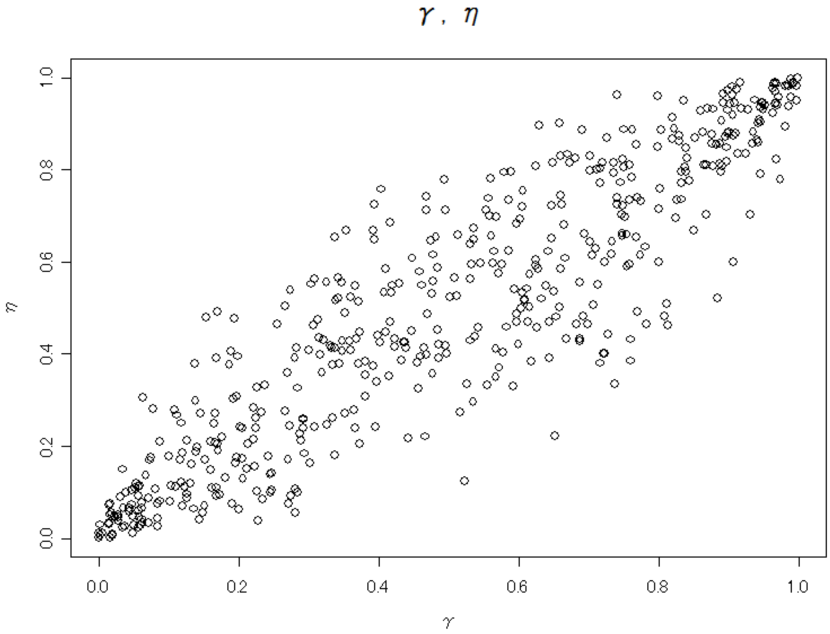

図 6: 相関がある γ_C，η_C（$\rho = 0.9$）

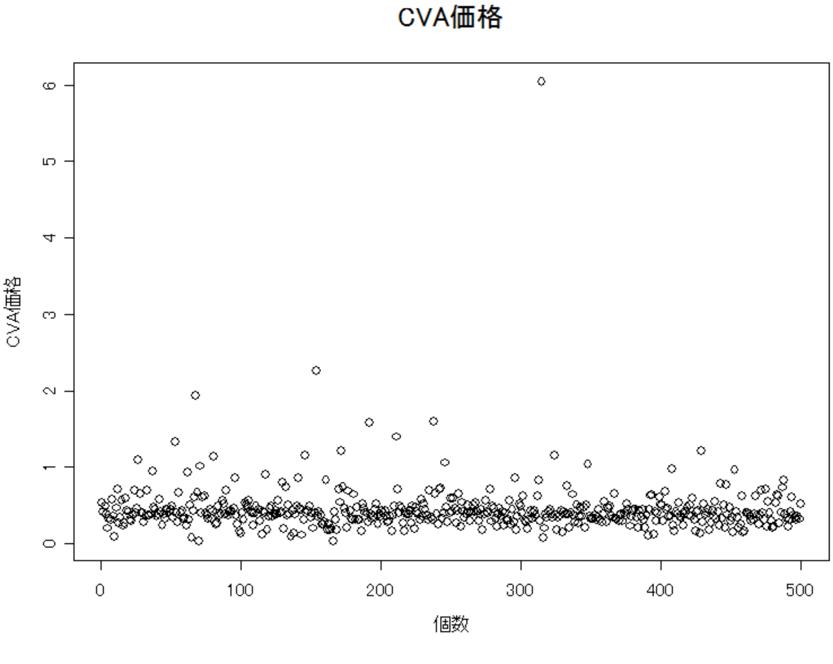

図 7: CVA の価格（$\rho = 0.9$）

5.2.2　t 分布

5.2.2 項では，自由度 3 の t 分布の基で γ_C，η_C の相関 ρ を 0 から 1 の範囲で動かした場合の CVA を 500 個発生させ，CVA 価格の平均，分散，デリバティブ価格に対する割合を算出した．ヨーロッパ型コール・オプションの価格は 5.1 節と同値である．また，時刻 t=0.25 とした．

相関	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
mean	0.957	1.406	1.458	1.403	1.351	1.317	1.266	1.166	1.021	0.826	0.396
var	15.430	10.464	11.690	10.998	11.172	11.296	10.803	9.171	7.291	4.800	0
cva/f	0.054	0.079	0.082	0.079	0.076	0.074	0.071	0.066	0.057	0.046	0.022

表 3: t 分布での結果

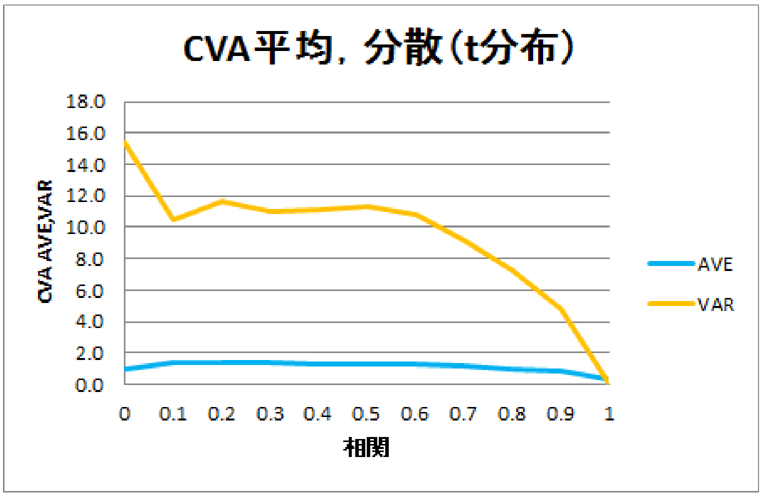

図 8: t 分布の基での CVA の平均と分散

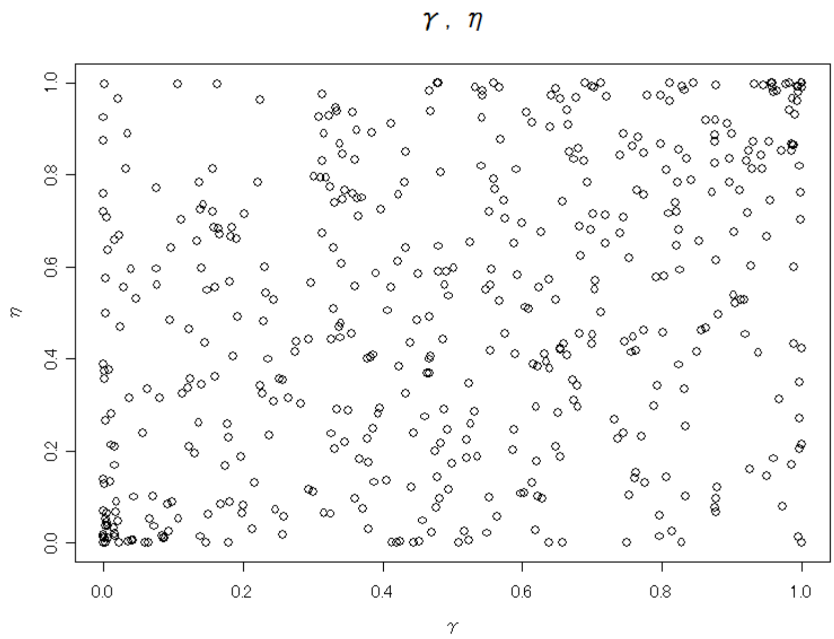

図 9: t 分布の基での γ_C，η_C（$\rho = 0.3$）

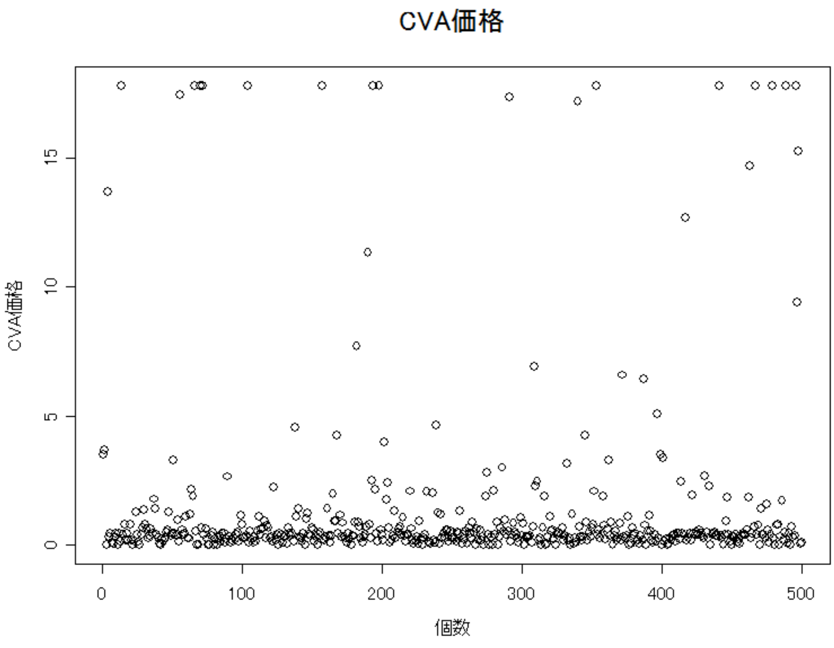

図 10: t 分布の基での CVA の価格（$\rho = 0.3$）

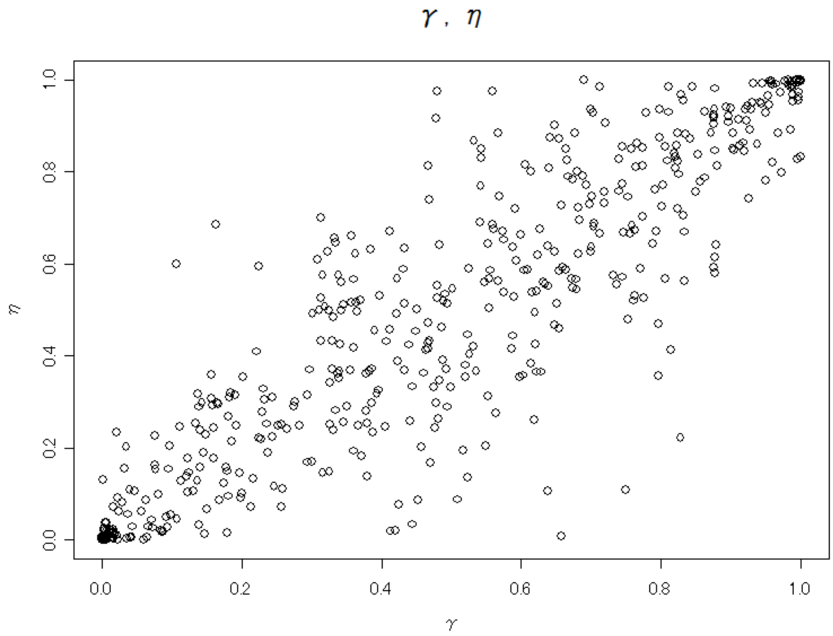

図 11: t 分布の基での γ_C，η_C（$\rho = 0.9$）

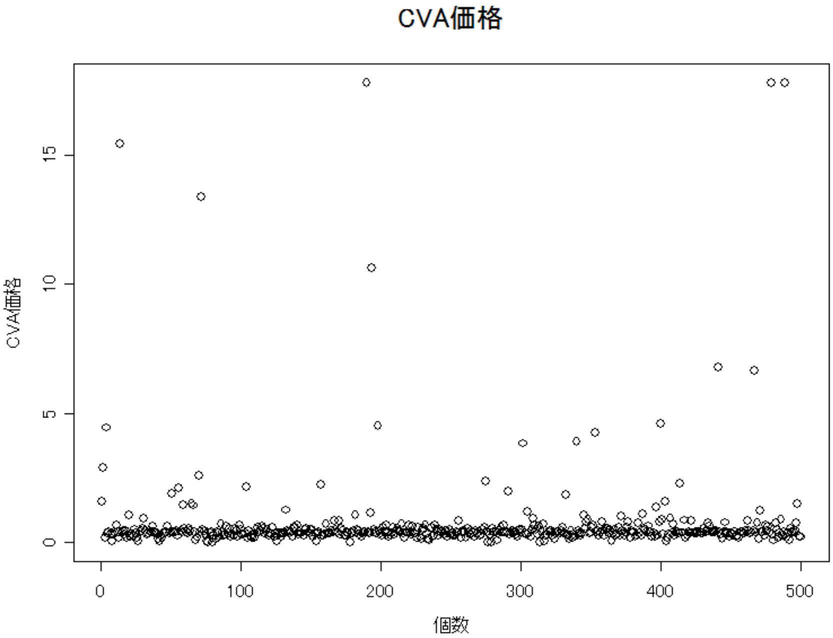

図 12: t 分布の基での CVA の価格（$\rho = 0.9$）

5.2.3 考察

二変量正規分布の基では，γ_C と η_C の相関が高くなるにつれて CVA の平均，分散は単調に減少していく結果となった．相関が高くなるほど突出した CVA の値が少なくなった．γ_C と η_C の相関が高くなるほどリスクを低く評価するという結果が得られた．

t 分布の基では，CVA の平均は相関 0.2 まで増加しその後減少していく結果となった．分散に関しては相関 0.5 まで増加と減少を繰り返しその後減少していく結果となった．t 分布の基で相関が低い場合，二変量正規分布に比べて突出した CVA の値が多くみられ分散の値も高くなった．t 分布は正規分布よりも密度関数の裾野が厚いのが原因として考えられる．今回のモデルで γ_C と η_C の相関を考慮する場合，用いる確率分布よって CVA の価格が大きく変化する．

5.3 λ_B，λ_C に相関がある場合の双方向 CVA

ここから，カウンターパーティのハザードレート λ_C と金融機関 (自社) のハザードレート λ_B の相関を考慮したシミュレーションを行う．使用する式は命題 1(3.12) 式，(3.6) 式，(3.23) 式，命題 2(3.29) 式，命題 3(3.35) 式である．ハザードレート λ_B と λ_C は市場データからの推定が難しいと考え，他のパラメータは固定し λ_B と λ_C にランダム性を持たせることにした．

λ_B と λ_C の相関を 0 から 1 の範囲で動かした場合の数値を発生させ，発生した λ_B と λ_C を基に双方向 CVA を 500 個算出した．ヨーロッパ型コール・オプションの価格は 5.1 節と同値である．また，γ_B=0.1，γ_C=0.2，時刻 t=0.25 とした．

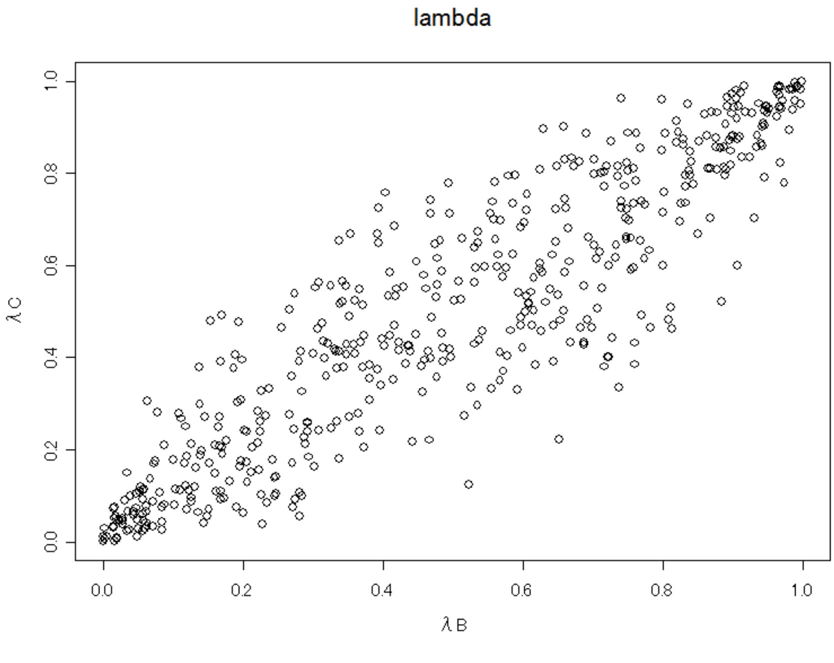

図 13: λ_B，λ_C の値（$\rho = 0.9$）

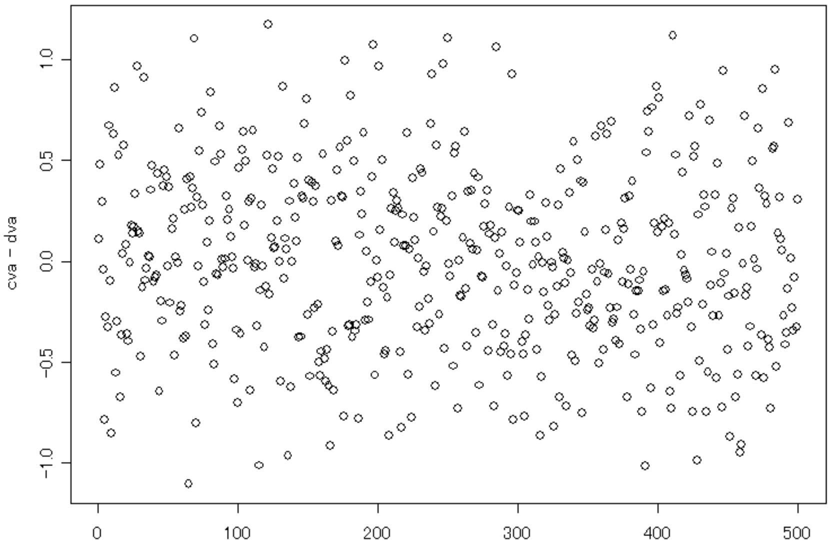

図 14: 双方向 CVA の値（$\rho = 0.3$）

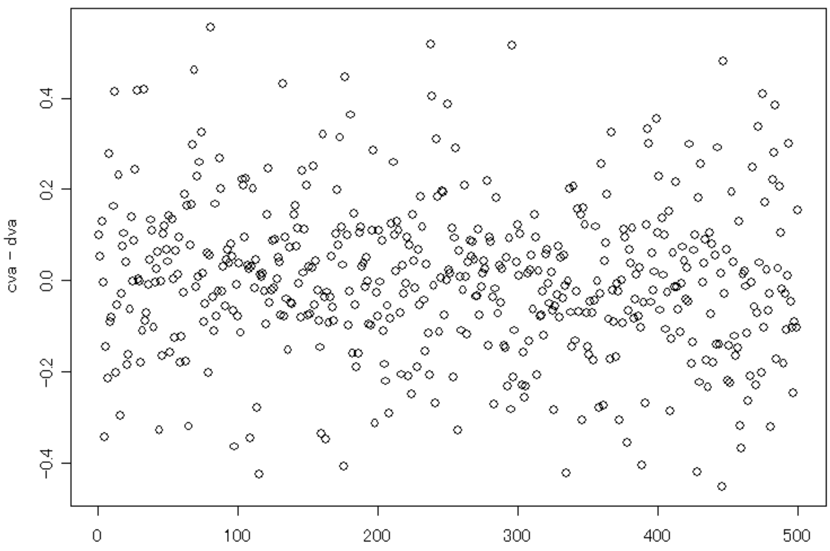

図 15: 双方向 CVA の値（$\rho = 0.9$）

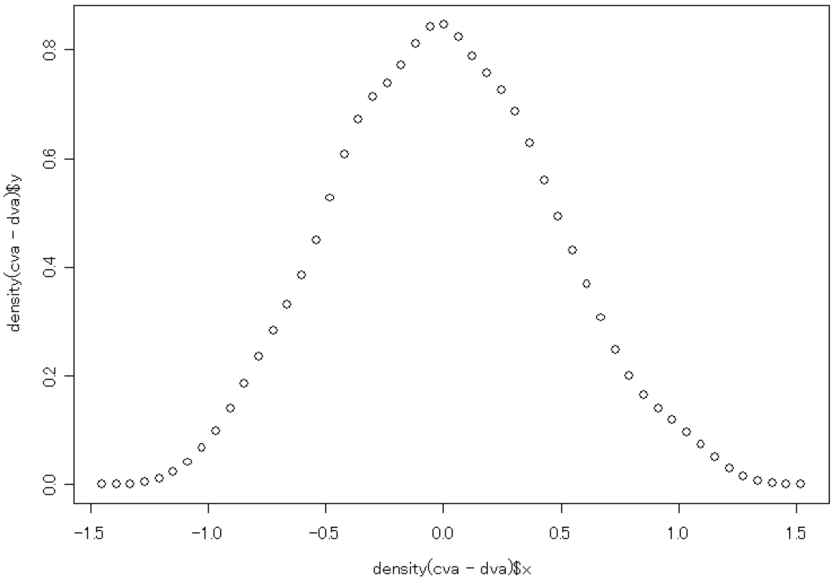

図 16: 双方向 CVA のヒストグラム（$\rho = 0.3$）

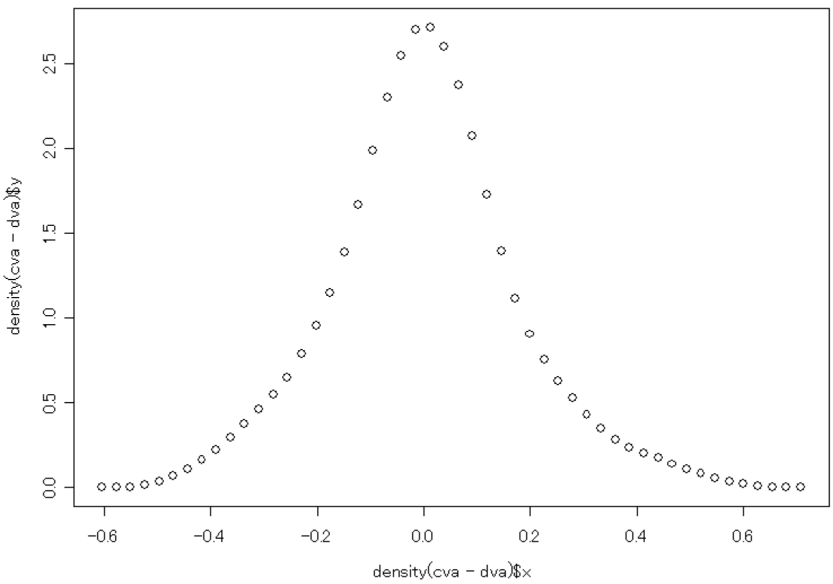

図 17: 双方向 CVA のヒストグラム（$\rho = 0.9$）

5.3.1　考察

5.3 節ではカウンタパーティのハザードレート λ_C と金融機関 (自社) のハザードレート λ_B の間に相関がある場合の CVA と DVA を計算し，双方向 CVA の算出を行った．双方向 CVA の値を散布した図 14,15 を見ると，相関が高くなるにつれて価格の幅が狭くなりばらつきも少なくなっていることが分かる．これは図 16，17 のヒストグラムを見ても明らかである．図 16 の横軸を見ると -1.5 から 1.5 の間で発生しているのに対し，図 17 の横軸を見ると -0.6 から 0.6 の間で価格が発生している．λ_C と λ_B の相関が低いということは，カウンターパーティあるいは金融機関 (自社) のハザードレートどちらか一方が高い状態であることを意味する．そのような状態ではデリバティブ取引におけるリスクが高く，双方向 CVA の値は高いものとなると考えられる．

5.4　一方向 CVA と双方向 CVA の比較

バーゼル III が推進する一方向 CVA と IFRS が推進する双方向 CVA について，信頼区間を 95%とした VaR を算出し比較をした．

相関	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
一方向 CVA	3.223	3.278	3.129	2.803	2.502	2.218	1.816	1.436	1.072	0.831	0.396
双方向 CVA	0.890	0.858	0.817	0.744	0.710	0.669	0.592	0.513	0.412	0.299	0.097
一方向/双方向	3.623	3.821	3.830	3.769	3.526	3.317	3.067	2.802	2.603	2.781	4.095

表 4: 一方向 CVA と双方向 CVA の VaR(95%)

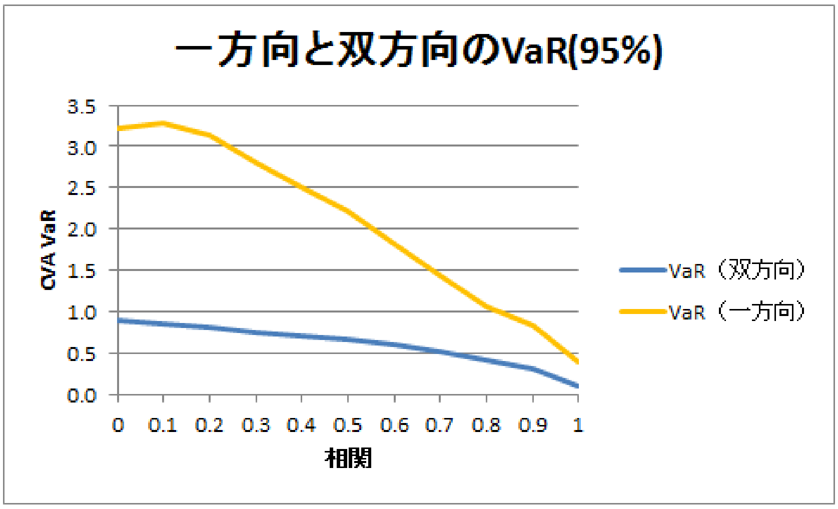

図 18: 一方向 CVA と双方向 CVA の VaR

5.4.1　考察

図 18 を見ると，バーゼル III が推進する一方向 CVA の方が IFRS の推進する双方向 CVA よりも高い値が出ていることが分かる．一方向 CVA はカウンターパーティの信用力による時価調整を行い

損失を計上することになっているが，双方向 CVA は金融機関 (自社) の信用力による時価調整も行い DVA として利益に計上させる．双方向 CVA では損失として計上された CVA が利益として計上された DVA と相殺されるため一方向 CVA に比べて低い値が出ており，リスクを低く評価していると考えられる．

6　結論

本論文のシミュレーションで，バーゼル Ⅲ が推進する一方向 CVA の方が IFRS の推進する双方向 CVA よりもリスクを高く評価しているという結果が得られた．

本論文で行ったモデルの導出とシミュレーションは，ヨーロッパ型デリバティブと債券一単位についてである．グローバルなデリバティブ取引の現場では莫大な量と様々な種類のデリバティブ取引が成されいる．Hull and White[1] によると，デフォルトする以前の Lehman Brothers. では約 8000 のカウンターパーティと契約があり約 100 万のデリバティブ商品を保有していた．デリバティブ取引の数だけリスクは存在しており，そのリスク管理は非常に煩雑なものになる．そのため，今回のモデルを実務に用いるためにはモデルのさらなる改良が求められる．

また，バーゼル Ⅲ が推進する一方向 CVA の規制と IFRS が推進する双方向 CVA の規制のどちらを採用するかが企業の資本賦課に大きな影響を与えることが明らかとなった．今後グローバル視点での統一が急務になると考えられる．

Appendix

A-1 資本資産価格モデル CCAPM

資本資産価格モデル (CCAPM：Continuous Capital Asset Pricing Model) とは，リスク資産の均衡市場に関する理論である．十分に分散投資が行われているポートフォリオにおいては，経済指標のような全企業共通のリスク要因のみ影響を受ける．そこで各株が持つ β 値から投資家がリスクを負担した分に見合う利益 μ を予想したものであり，以下の式で理論化したもの．

$$\mu = r + \beta_S(\mu_M - r)$$

r を無リスク金利，μ_M をマーケットポートフォリオの期待収益，β_S を株式のベータ値 (資産と市場ポートフォリオの分散で割ったもの) とする．

A-2 ファインマンーカッツの定理

確率微分方程式が区間 $[0, T]$ において

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

であり、偏微分方程式が関数 $\rho(t,x)u(t,x)$ に対して

$$\frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2(t,x) + V_x\mu(t,x) + V_t - \rho(t,x)V(t,x) + u(t,x) = 0$$

であり、その終端条件が

$$V(T, X(T)) = g(T, X(T))$$

であるときに

$$V(t, X(t)) = E\left[\int_t^T e^{-\phi(t)}u(s, X(s))ds + e^{-\phi(t)}g(T, X(T))\middle| F_t\right]$$

が成り立つ．ただし，

$$\phi(t) = \int_t^T \rho(s, X(s))ds$$

とする．

参考文献

[1] John Hull and Alan White ”Collateral and Credit Issues in Derivatives Pricing” (October 2012 Revised : June 2014)

[2] John Hull and Alan White ”CVA AND WRONG WAY RISK” (Financial Analysts Journal Vol.68 No.5 2012)

[3] Cristoph and Mats Kjaer ”Pertial Differential Equation representation of derivatives with Bilateral Counterparty Risks and Funding Costs” (Revised : July 2012,The Journal of Credit Risk Vol.7 No. 3 pp1-19 2011.)

[4] Juan Carlos Garcia Cespedes ”Effective modeling of wrong way risk,counterparts credit risk capital,and alpha in Basel II”(The Journal of Risk Model Validation pp71-98 Vol.4 Number 1 Spring 2010)

[5] 浦谷 規 『無裁定理論とマルチンゲール』(2008 年 9 月)

[6] 富安 弘毅 『カウンターパーティリスクマネジメント』(2011 年 3 月)

[7] W.N. ヴェナブルズ/B.D. リプリー 『S-PLUS による統計解析』(2001 年 7 月)

謝辞

本論文を作成するにあたり，熱心な御指導を賜るとともに素晴らしい研究環境を与えてくださった担当教官の浦谷規教授に深く感謝致します．また，本研究への丁寧な御指導と示唆をくださった安田和弘教授に感謝致します．御二人の御助言により修士論文を書き上げる事ができました．

学生時代に出会った仲間にも感謝致します．この論文は多くの仲間の協力と励ましに基づいています．研究活動や就職活動，アルバイトなどを通じ，素晴らしい出会いに恵まれ多くの励ましを頂きました．

最後に，7 年間という長い大学生活を支え続けどんなときも応援してくれた家族に深く感謝し，心からの御礼を申し上げ謝辞とさせて頂きます．