

## Synthetic CD0のファクターモデルのt分布族への展開

越阪部, 昭太 / OSAKABE, Shota

---

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

32

(発行年 / Year)

2015-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2015-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2014 年度修士論文

# Synthetic CDO のファクターモデルの t 分布族への展開



法政大学理工学研究科  
システム工学専攻

13R6206 越阪部昭太

指導教員 浦谷 規 教授

THE 2014 MASTER'S THESIS

FACTOR MODEL FOR SYNTHETIC CDO  
USING BIVARIATE T-DISTRIBUTION



DEPARTMENT OF SYSTEM ENGINEERING  
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING  
HOSEI UNIVERSITY

13R6206 SHOTA OSAKABE

SUPERVISOR PROF. TADASHI URATANI

## 概 要

本論文では Synthetic CDO の価格について Vasicek によるポートフォリオのファクターモデル [3] を参考に考察する. Synthetic CDO の価格付けで用いられる正規分布モデルを 2 変量  $t$  分布モデルへと拡張する. 全ての企業共通のリスク要因と個別企業ごとのリスク要因を含んだモデルを使用する. 正規分布モデルと 2 変量  $t$  分布モデルを用いて Synthetic CDO のトランシェのスプレッドレート価格の比較を行う.

## Abstract

We consider the price of Synthetic Collateralized Debt Obligation (CDO). The factor model for portfolio of default is originated by Vasicek [3]. In this paper, we extend it to the CDO model where credit defaults are assumed to be bivariate normal distributed to the model of t-distribution. We calculate prices of each CDO tranche under the assumption of the distribution between a common risk factor and the risk factors of each individual company. We compare the prices of tranches of Synthetic CDO in the normal distribution case and bivariate t-distribution case.

# 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>CDS</b>	<b>3</b>
2.1	CDS の仕組み	3
2.2	CDS のレート	3
<b>3</b>	<b>CDO</b>	<b>4</b>
3.1	CDO とは	4
3.2	Synthetic CDO の仕組み	4
3.3	Synthetic CDO	5
<b>4</b>	<b>Vasicek Model</b>	<b>6</b>
4.1	債券損失	6
4.2	ポートフォリオ損失分布	9
4.3	損失分布の特性	10
<b>5</b>	<b>t 分布への展開</b>	<b>12</b>
5.1	2変量 t 分布モデル	12
5.2	債券損失の条件付き期待値	14
5.3	ポートフォリオ損失の累積分布関数	14
<b>6</b>	<b>シミュレーション</b>	<b>15</b>
6.1	モデルの比較	16
6.2	トランシェの期待損失の比較	19
6.3	トランシェのスプレッドレートの比較	20
<b>7</b>	<b>結果</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>付録</b>	<b>23</b>
8.1	導出	23
8.1.1	$s^2$	23
8.1.2	$L_\alpha$	25
8.1.3	Everlein の定理 (Everlein[2])	26
8.2	公式・定理	28
8.2.1	伊藤の公式	28
8.2.2	大数の法則	28
8.2.3	中心極限定理	28
8.3	プログラム	29

## 1 はじめに

米国サブプライムに端を発し、リーマンショックとよばれる世界的不況の元凶は金融工学にあり、証券化のデリバティブの1種であるCDO(Collateralized Debt Obligation)に原因があるとされてきた。CDOの理論的失敗はEmbrechts[1]によるとDavid Leeの正規コピュラモデルによる倒産リスクの相関を実際より低く評価した価格付けが主たる要因であるとされている。しかし、CDOの機能は証券化にあり、リスクを評価し細分化することによって、投資機会を増加させる。近年の世界的な低金利政策によりCDOの一種であるCLO(Collateralized Loan Obligation)などが再生している。その仕組みは単純化すれば、ローンが破綻したときに補償を受けるための保険である。ローンを集めてその破綻の確率が低いグループから高いグループに分類し、対応する保険料を支払う。したがって、破綻確率が高いものから高い保険料を支払う。

本研究は関連する企業の倒産リスクを組み込んだファクターモデルVasicek[3]とそのCDOへの応用Eberlein[2]を参考に正規分布モデルからt分布モデルへの展開を行う。t分布は、正規分布に比べ密度関数の裾野が広いという特徴がある。正規分布では両端の裾野が狭く、実際の市場でのばらつきと違いがある。そこでモデルをt分布に変え自由度を小さくすることで、実際の市場のばらつきに近づく。ファクターモデルでは、全ての企業共通のリスク要因と個別のリスク要因を用いる。求めたt分布モデルと正規分布モデルで(1)モデルの比較、(2)CDOトランシェの期待損失の比較、(3)CDOトランシェのスプレッドレートの比較の三種類についてシミュレーションを行い、考察する。

## 2 CDS

### 2.1 CDS の仕組み

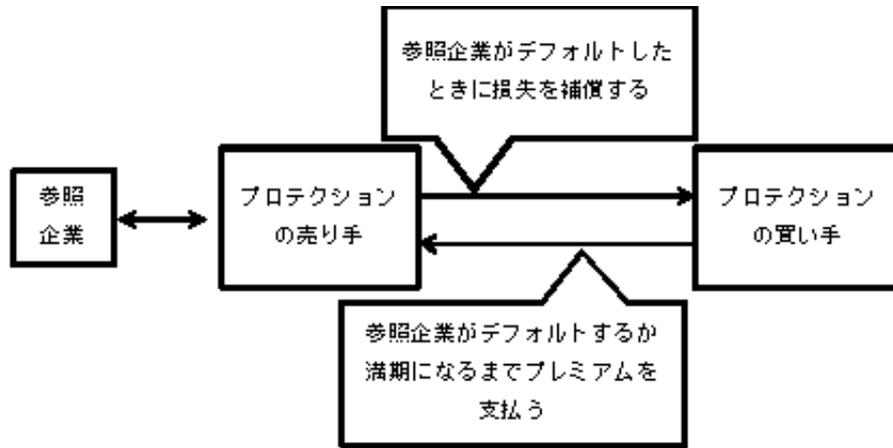


図 1: CDS の基本構造

CDS(Credit Default Swap) とは、定期的な金銭の支払いと引き換えに一定の国や企業のデフォルト (倒産) による損失を補償する保険契約である。この保険 (プロテクション) の買い手は売り手に対して、企業のデフォルトが発生するか契約が満期になるまでプレミアム (保険料) を支払う。売り手は対象とする企業のデフォルトがおこった時に、保険の買い手に対して損失を補償する。補償の方法については、買い手から参照債務を元本額で購入する現物決済や参照債務の価値の下がった部分を補う金額を買い手に支払う現金決済などがある。

### 2.2 CDS のレート

$L$  を満期  $T$  の債務の額面価格,  $\beta(t) = e^{-r_0 t}$  を割引関数,  $G(t)$  をデフォルト時刻の分布関数,  $g(t)$  を  $G(t)$  の密度関数とする。割引後の期待プレミアム  $PL(r_{CDS})$  は Eberlein[2] より以下のように表される。

$$PL(r_{CDS}) = r_{CDS} L \int_0^T \beta(t) g(t) dt + r_{CDS} L \beta(T) (1 - G(T))$$

$R$  を回収率,  $r_0$  を無リスク金利とするとデフォルト時の補償は以下の式となる。

$$D = (1 - R) L \int_0^T g(t) \beta(t) dt$$

裁定取引がない条件から  $PL(r_{CDS}) = D$  となるので CDS のレートは以下になる。

$$r_{CDS} = \frac{(1 - R) \int_0^T g(t) \beta(t) dt}{\int_0^T g(t) \beta(t) dt + \beta(T) (1 - G(T))} \quad (1)$$

### 3 CDO

#### 3.1 CDO とは

CDO とは、社債やローンなどから構成される資産担保証券の一種である。投資家にとっての CDO のメリットは、リスク分散効果、優先劣後構造、信用補完があげられる。CDO を組成することで、社債投資、融資といった従来のクレジット投資と同様に信用リスクへの投資であることと同時に、多数の債券プールを様々なリスク水準に切り分けて広い投資家層にリスクを再分配することができる。多数のプールに優先劣後構造を持たせることにより、各投資家に特有のリスク・リターン志向に合わせた CDO が発行できる。この CDO にはよく取引されるものに、Cash CDO, Synthetic CDO, Unfunded CDO の三種類があげられる。Cash CDO とは、公社債や貸し付けなどの債券を参照して発行される CDO, Synthetic CDO とは、CDS を参照して発行される CDO, Unfunded CDO とは、iTraxx や CDX を参照して発行される CDO である。

#### 3.2 Synthetic CDO の仕組み

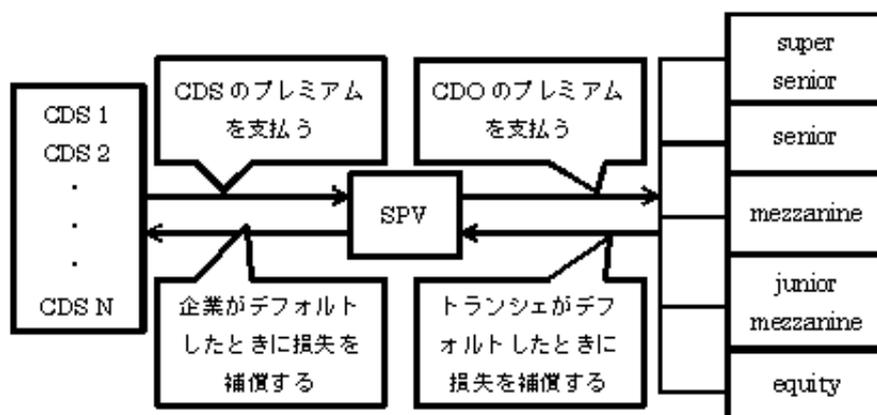


図 2: CDO の基本構造

CDO の組成者は債券のポートフォリオを取得し、それらを SPV(特別目的事業体)に移転させ、債券から得られる収入を各トランシェへ分配する。各トランシェには、最も信用度の低いロートランシェである equity から信用度が上がるにつれ、junior mezzanine, mezzanine, senior となり最も信用度が高いハイトランシェの super senior まで存在する。信用度の高さに応じて、各トランシェの価格は決まる。ロートランシェ(equity など)の買い手は、受け取るプレミアムの金利が高いが、参照企業がデフォルトした場合にすぐに補償を行わなければならない。ハイトランシェ(senior など)の買い手は、受け取るプレミアムの金利が低い、ある一定数がデフォルトするまでは補償を行わない。補償を行ったトランシェは契約が終了する。債券からの収入は、ハイトランシェから支払われる。つまりハイトランシェの方がリスクが低く、安定した収益が見込める。トランシェとトランシェの間をアタッチメントポイントと呼ぶ。

### 3.3 Synthetic CDO

Synthetic CDO とよばれる額面  $L$  で  $N$  個の CDS からなるポートフォリオを対象とし、第  $i$  トランシェのспредドレートを  $r_i$  と定義する。第  $i$  トランシェのアタッチメントポイントの下限を  $K_{i-1}$ 、上限を  $K_i$  とする。また  $Z_t$  を時刻  $t$  までにデフォルトしている CDS の数の相対量、 $L_t^i$  を時刻  $t$  での第  $i$  トランシェの損失と定義し、以下の式とする。

$$L_t^i = \min[(1 - R)Z_t, K_i] - \min[(1 - R)Z_t, K_{i-1}]$$

上式を図で表すと以下の図3になる。時刻  $t$  では、矢印の部分が第  $i$  トランシェの損失を示している。

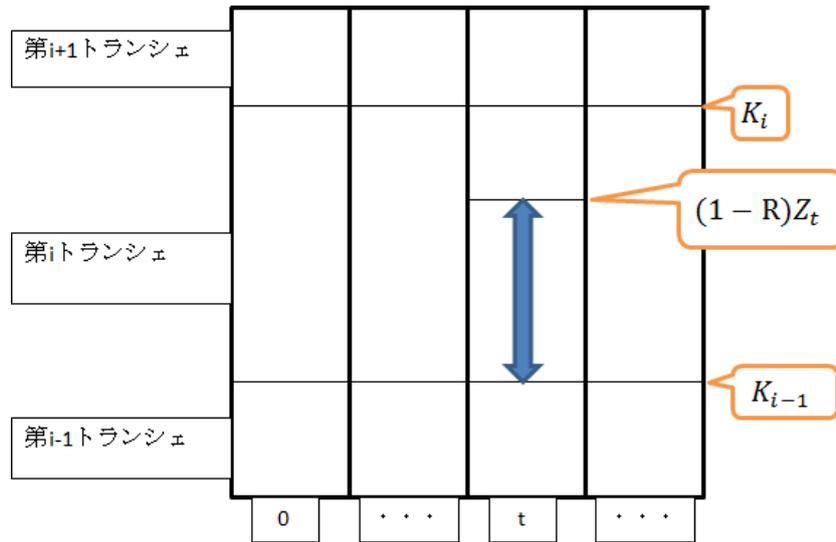


図 3: 第  $i$  トランシェの損失

第  $i$  トランシェのプレミアムは以下の式になる。

$$PL_i(r_i) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \beta(t_k) r_i E [(K_i - K_{i-1} - L_{t_k}^i) NL]$$

第  $i$  トランシェのデフォルト時の補償は以下のようになる。

$$D_i = \sum_{k=1}^n \beta(t_k) E [(L_{t_k}^i - L_{t_{k-1}}^i) NL]$$

裁定取引がない条件では  $PL(r_i) = D_i$  となるので CDO の第  $i$  トランシェのспредドレートは以下のようになる。

$$r_i = \frac{\sum_{k=1}^n \beta(t_k) E [(L_{t_k}^i - L_{t_{k-1}}^i)]}{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \beta(t_k) r_i E [(K_i - K_{i-1} - L_{t_k}^i)]} \quad (2)$$

## 4 Vasicek Model

### 4.1 債券損失

等しい額の  $n$  債券からなるポートフォリオについて考える。債券のデフォルト確率を  $p$  と置き、借入会社の資産価値が任意の 2 社の間で係数  $\rho$  で相関していて、すべての債券には同じ期間  $T$  があると仮定する。

$L_i$  を第  $i$  債券での損失として、第  $i$  債券がデフォルトするならば、 $L_i = 1$  であるとし、それ以外は  $L_i = 0$  とする。 $L$  をポートフォリオパーセントロスとすると

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i$$

が成り立つ。ポートフォリオのデフォルトイベントが互いに独立しているならば、ポートフォリオサイズが増加して、ポートフォリオ損失分布は、中心極限定理によって、正規分布に収束すると考えられる。なぜなら、デフォルトが独立していない場合、中心極限定理の条件が満たされないからである。そして  $L$  は漸近的正規分布ではない。しかし、ポートフォリオの損失分布が制限する形に収束することがわかる。以下に  $L$  が収束することを示していく。

下式の  $X_i$  は、相関係数  $\rho$  の標準正規変数である。また  $Y, Z_i$  ともに時間によってかわる変数である。 $Y$  を経済指標、 $Y\sqrt{\rho}$  を全ての企業に影響を与える共通のリスク要因（エクスポージャー）、 $Z_i\sqrt{1-\rho}$  を会社固有のリスク要因とすると Vasicek[3], Hull[4] より

$$X_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho} \quad (3)$$

確率変数が 1 のときに倒産する、0 のときに倒産しないと考える。 $Y$  で与えられる条件付き確率の共通要因  $Y$  についての期待値としてポートフォリオ損失の確率を評価する。これは、経済のためにいろいろなシナリオを仮定することと解釈されることができ。

ここで時刻  $t$  での企業のデフォルト確率を以下とする。

$$Q_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$$

また、以下のように  $d_i(t)$  を定義する。

$$d_i(t) := N^{-1}(Q_i(t))$$

デフォルト時刻を  $T_i$  とすると

$$T_i = \inf\{t > 0 | X_i < d_i(t)\}$$

企業の倒産確率は以下になる。

$$p = Q_i(t) = P(T_i < t) = P[X_i < d_i(t)]$$

すると債券の損失の条件付き確率は

$$p(Y) = P[L_i = 1 | Y] = P[X_i < d_i(t) | Y] = N \left[ \frac{d_i(t) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \quad (4)$$

[式 (4):証明]

債券のデフォルトを企業価値  $X_i$  が基準価値  $d_i(t)$  以下になると考える. するとその確率は,  $P[X_i < d_i(t)]$  となる. これを用いると以下のように表すことできる.

$$\begin{aligned} p(Y) &= P[L_i = 1|Y] \\ &= P[X_i < d_i(t)|Y] \\ &= P[Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho} < d_i(t)|Y] \\ &= P\left[Z_i < \frac{d_i(t) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \middle| Y\right] \\ &= N\left[\frac{d_i(t) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right] \end{aligned}$$

[式 (4):証明終了]

次に,  $Y$  の条件のもとで  $L_i$  は, 分散が有限で独立な同分布である. 大数の法則より  $L$  は

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \\ &= E[L_i] \\ &= 1 * p(Y) + 0 * (1 - p(Y)) \\ &= p(Y) \end{aligned}$$

となり,  $L$  の分布は

$$\begin{aligned} P[L \leq x] &= P[p(Y) \leq x] \\ &= P[Y \geq p^{-1}(x)] \\ &= N(-p^{-1}(x)) \end{aligned}$$

となる. よって

$$P[L \leq x] = P[p(Y) \leq x] = P[Y \geq p^{-1}(x)] = N(-p^{-1}(x)) \quad (5)$$

が成り立つ. そして, 十分に大きなポートフォリオの債券損失の累積分布関数は

$$P[L \leq x] = N\left[\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - d(t)}{\sqrt{\rho}}\right] \quad (6)$$

[式 (6):証明]

$$P[L \leq x] = P[p(Y) \leq x]$$

より,  $p(Y)$  に式 (4) を代入すると

$$\begin{aligned}
 P[L \leq x] &= P \left[ N \left[ \frac{d(t) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \leq x \right] \\
 &= P \left[ \frac{d(t) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \leq N^{-1}(x) \right] \\
 &= P \left[ Y\sqrt{\rho} \geq d(t) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) \right] \\
 &= P \left[ Y \geq \frac{d(t) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right]
 \end{aligned}$$

となり,  $Y$  は標準正規分布なので

$$\begin{aligned}
 P[L \leq x] &= N \left[ - \left[ \frac{d(t) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right] \right] \\
 &= N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - d(t)}{\sqrt{\rho}} \right]
 \end{aligned}$$

[式 (6):証明終了]

式 (6) のポートフォリオ損失分布の収束は, 不均一な重みを持つポートフォリオを保持している. ポートフォリオの重みを  $w_1, w_2, \dots, w_n (\sum w_i = 1)$  とすると, ウェイトによるポートフォリオ損失は

$$L = \sum_{i=1}^n w_i L_i$$

である. 条件  $Y$  の下でポートフォリオ損失  $L$  は, 期待値  $p(Y)$  に収束するための条件は以下を満たすことである.

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 \rightarrow 0$$

ウェイトが  $L_i$  に与える影響が少なくなり, 分散は限りなく 0 に近づく. そのことにより, 損失分布  $L$  は期待値のみによって定まる. ポートフォリオが十分に細分化されてポートフォリオに多くのローンが組み込まれているとき, 損失分布は実際のポートフォリオ損失分布に対して良い近似結果を示す.

## 4.2 ポートフォリオ損失分布

ポートフォリオの損失分布は、区間  $0 \leq x \leq 1$  の連続分布である。累積分布関数によって表すと

$$F(x; p, \rho) = N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - d(t)}{\sqrt{\rho}} \right] \quad (7)$$

となる。この損失分布はパラメーター  $0 < p, \rho < 1$  で、2つのパラメーター集合を作る。

$$\begin{cases} \rho \rightarrow 0 & L = p \text{ で密集した一点分布に収束} \\ \rho \rightarrow 1 & \text{それぞれ } p \text{ と } 1-p \text{ の確率で } 0-1 \text{ 分布に収束} \end{cases}$$

$p \rightarrow 0$  または  $p \rightarrow 1$  のとき、それぞれ分布は  $L=0$  または  $L=1$  に集中され、左右対称である。N が標準正規分布なので

$$F(x; p, \rho) = 1 - F(1-x, 1-p, \rho)$$

と示すことができる。損失分布の密度関数は

$$f(x; p, \rho) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp \left( -\frac{1}{2\rho} (\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - d(t))^2 + \frac{1}{2}(N^{-1}(x))^2 \right) \quad (8)$$

である。

[式 (8):証明]

$N^{-1}(x) = y$  とすると、 $x = N(y)$  と置くことができる。

$F$  を  $x$  で微分すると

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

式 (7) を変形すると

$$F(y; p, \rho) = N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}y - d(t)}{\sqrt{\rho}} \right] \quad (9)$$

となる。  $\left[ \frac{\sqrt{1-\rho}y - d(t)}{\sqrt{\rho}} \right] = A$  と置くと、式 (9) は

$$\begin{aligned} F(y; p, \rho) &= N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}y - d(t)}{\sqrt{\rho}} \right] \\ &= \int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

である。また、 $F$  を  $x$  で微分すると

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}A^2} \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (10)$$

となり、 $A$  を  $y$  で微分すると

$$\frac{dA}{dy} = \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (11)$$

となるので、式 (10) に式 (11) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\rho}y-d(t)}{\sqrt{\rho}}\right)^2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ N(y) &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \text{ より、損失分布の密度関数は} \\ f(x; p, \rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\rho}y-d(t)}{\sqrt{\rho}}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-d(t)}{\sqrt{\rho}}\right)^2\right] \cdot e^{\frac{1}{2}y^2} \\ &= \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp\left[-\frac{1}{2\rho}(\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-d(t))^2 + \frac{1}{2}(N^{-1}(x))^2\right] \end{aligned}$$

[式 (8):証明終了]

### 4.3 損失分布の特性

相関係数  $\rho$  の値によって損失分布のグラフは形状が変わる.  $\rho < \frac{1}{2}$  のとき下式 (図 4) は単峰性があり,  $\rho = \frac{1}{2}$  のとき単調減少 (図 5),  $\rho > \frac{1}{2}$  のとき U 型 (図 6) であることを示していく.

$$L_{mode} = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho}d(t)\right) \quad (12)$$

[式 (12):証明]

$\frac{f(x;p,\rho)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$  より

$$\begin{aligned} [f(x; p, \rho)]' &= \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\rho}(\sqrt{1-\rho}y-d(t))^2 + \frac{1}{2}y^2\right) \\ &\quad - \frac{2}{2\rho} \sqrt{1-\rho}(\sqrt{1-\rho}y-d(t)) + y = 0 \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-\rho}}{\rho}(\sqrt{1-\rho}y-d(t)) + y = 0 \\ &\quad - \frac{1-\rho}{\rho}y + \frac{\sqrt{1-\rho}}{\rho}d(t) + y = 0 \\ &\quad y\left(\frac{-1+\rho+\rho}{\rho}\right) = -\frac{\sqrt{1-\rho}}{\rho}d(t) \\ &\quad y = \frac{-\sqrt{1-\rho}}{\rho}d(t) \cdot \left(\frac{\rho}{2\rho-1}\right) \\ &\quad x = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho}d(t)\right) \end{aligned}$$

以上より

$$L_{mode} = N \left( \frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho} d(t) \right)$$

[式 (12):証明終了]

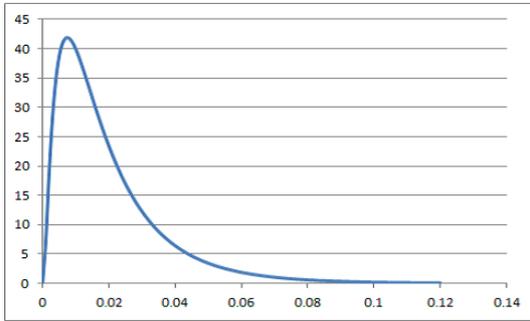


図 4:  $p = 0.02, \rho = 0.1$  のときのグラフ

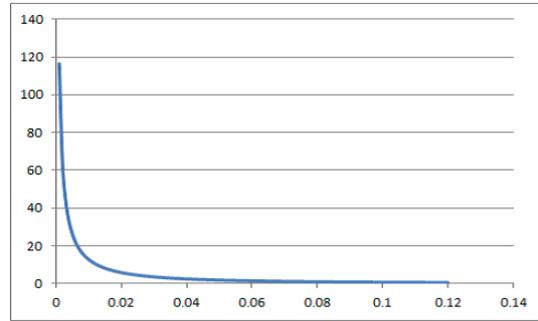


図 5:  $p = 0.02, \rho = 0.5$  のときのグラフ

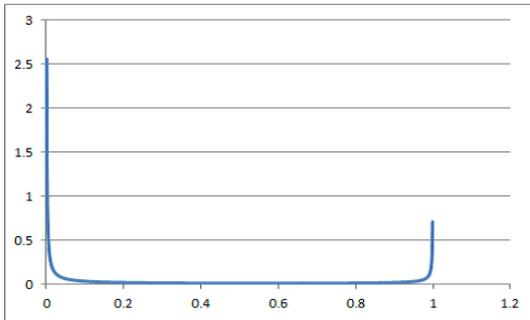


図 6:  $p = 0.02, \rho = 0.99$  のときのグラフ

次に分散を求める.  $EL = p$  と定義すると,  $EL = p = E[p(Y)]$  である. ゆえに

$$s^2 = \text{Var}L = N_2(d(t), d(t), \rho) - p^2$$

$N_2$  は二変量の標準正規分布である.  $L$  の  $\alpha$  番目の値  $L_\alpha$  は, 損失分布の逆関数によって導きだし, 以下のように示すことができる.

$$L_\alpha = F(\alpha; 1-p, 1-\rho) \tag{13}$$

(これらの  $s^2, L_\alpha$  の式については付録により証明)

## 5 t分布への展開

### 5.1 2変量t分布モデル

t分布は、正規分布に比べ密度関数の裾野が広いという特徴がある。正規分布では両端の裾野が狭く、実際の市場でのばらつきと違いがある。そこでモデルをt分布に変え自由度を小さくすることで、実際の市場のばらつきに近づくと考えた。そこで、ここまで正規分布で考えてきたものをt分布に拡張する。Y, Z<sub>i</sub>を互いに独立な標準正規分布, X<sub>i</sub>を分散共分散が  $R = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$  の2変量正規分布, fをカイ二乗分布の自由度, Vをカイ二乗分布の値とする。以下の変量は2変量t分布となる。

$$\frac{X_i}{\sqrt{\frac{V}{f}}} = \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_i\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \quad (14)$$

[式(14):証明]

Y, Z<sub>i</sub>を標準正規分布とする。そして、以下のようにX<sub>i</sub>を定義する。

$$X_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}$$

この式をベクトルに変形すると

$$X_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z_i \end{pmatrix}$$

次にこのX<sub>i</sub>とX<sub>i</sub>の転置をかけ、期待値をとる。

$$\begin{aligned} E[XX^T] &= E\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix}\right] \\ &= E\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^2 & YZ_i \\ YZ_i & Z_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} E\left[\begin{pmatrix} Y^2 & YZ_i \\ YZ_i & Z_i^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{1-\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、X<sub>i</sub>が2変量正規分布であることがわかる。ここでX<sub>i</sub> = Y√ρ + Z<sub>i</sub>√(1-ρ)の両辺を√(V/f)で割ると

$$\frac{X_i}{\sqrt{\frac{V}{f}}} = \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_i\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}$$

このとき  $\frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{Y}{f}}}$ 、 $\frac{Z_i\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{Y}{f}}}$  は t 分布、 $\frac{X_i}{\sqrt{\frac{Y}{f}}}$  は 2 変量 t 分布となる。

[式 (14):証明終了]

また  $\frac{X_i}{\sqrt{\frac{Y}{f}}}$  の密度関数は以下のようにになる。

$$f(x_1, x_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+2}{2}\right)}{\pi f \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) |R|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}\right)^{-\frac{f+2}{2}} \quad (15)$$

[式 (15):証明]

2 変量 t 分布の導出を行う。

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{f}}}$$

$X$  は  $N(x_1, x_2, R)$  とし、 $Y$  は自由度  $f$  のカイ二乗分布とする。

$$\begin{aligned} P[Z < z] &= P\left[\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{f}}} < z\right] \\ &= \int_0^\infty P\left[\frac{X}{\sqrt{\frac{y}{f}}} < z \mid Y = y\right] g(y) dy \\ &= \int_0^\infty P\left[X < \sqrt{\frac{y}{f}} z\right] g(y) dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{y}{f}} z_1} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{y}{f}} z_2} \frac{e^{-\frac{x^T R^{-1} x}{2}}}{2\pi |R|^{\frac{1}{2}}} dx_1 dx_2 \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} y^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \end{aligned}$$

ここで  $x_1, x_2$  で微分を行う。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi |R|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y x^T R^{-1} x}{2f}} \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} y^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \frac{y}{f} dy \\ &= \frac{1}{2^{\frac{f}{2}+1} \pi f |R|^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{f}{2}} e^{-\frac{(1+\frac{x^T R^{-1} x}{f})y}{2}} dy \end{aligned}$$

次に  $u = \frac{(1+\frac{x^T R^{-1} x}{f})y}{2}$  とおく。

$$y = \frac{2u}{1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}}, \quad du = \frac{1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}}{2} dy$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2^{\frac{f}{2}+1} \pi f |R|^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}}\right)^{\frac{f}{2}} e^{-u} \frac{2}{1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}} du \\ &= \frac{1}{\pi f \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) |R|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}\right)^{-\frac{f+2}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{f+2}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{f+2}{2}\right)}{\pi f \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) |R|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{x^T R^{-1} x}{f}\right)^{-\frac{f+2}{2}} \end{aligned}$$

[式 (15):証明終了]

## 5.2 債券損失の条件付き期待値

t 分布の債券損失の条件付き期待値は, 正規分布の債券損失の条件付き期待値と同様に求めると

$$\begin{aligned}
 P \left[ T_i < t \middle| \frac{Y}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \right] &= P \left[ \frac{X_i}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_i(t) \middle| \frac{Y}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \right] \\
 &= P \left[ \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_i\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_i(t) \middle| \frac{Y}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \right] \\
 &= P \left[ \frac{Z_i\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_i(t) - \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \middle| \frac{Y}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \right] \\
 &= P \left[ \frac{Z_i}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < \frac{d_i(t) - \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}}{\sqrt{1-\rho}} \middle| \frac{Y}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \right] \\
 &= H \left[ \frac{F^{-1}(p) - \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \tag{16}
 \end{aligned}$$

このとき,  $H$  は 1 変量 t 分布,  $F$  は 2 変量 t 分布を表している.

## 5.3 ポートフォリオ損失の累積分布関数

Everlein の定理 Everlein[2] によると正規分布と同様にポートフォリオ損失の累積分布関数は以下のように表すことができる. (Everlein の定理については付録により証明)

$$F_{Z_t}(x) = H \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}H^{-1}(x) - F^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right] \tag{17}$$

ここで求めた  $F_{Z_t}(x)$  の値を用いることで, CDO のスプレッドレートを以下のように表すことができる.

$$E[L_t^i] = \int_{\min\left[\frac{K_{i-1}}{1-R}, 1\right]}^{\min\left[\frac{K_i}{1-R}, 1\right]} (1-R) \left( x - \frac{K_{i-1}}{1-R} \right) dF_{Z_t}(x) \tag{18}$$

また, 確率点  $\alpha$  での値  $L_\alpha$  は, 損失分布の逆関数として次のように表す.

$$L_\alpha = H \left[ \frac{\sqrt{\rho}H^{-1}(\alpha) - F^{-1}(1-p)}{\sqrt{1-\rho}} \right] \tag{19}$$

## 6 シミュレーション

ここまで導出したモデルを用いて、2変量  $t$  分布と Vasicek の正規分布の比較を行い、CDO のスプレッドレートを求める。そこで、モデルの比較、トランシェの期待損失の比較、トランシェのスプレッドレートの比較の三種類についてシミュレーションを行う。モデルの比較では、 $L_\alpha$  の値を2変量  $t$  分布とバシチェックの正規分布モデルとで発生させ、ばらつきの大きさを比較する。トランシェの期待損失の比較では、トランシェの期待損失のグラフを作り傾きやふくらみを比較する。トランシェのスプレッドレートの比較では、2変量  $t$  分布と Vasicek の正規分布でのスプレッドレートを自由度、相関を変化させ比較する。

## 6.1 モデルの比較

次の図は、式 (13) と式 (19) の  $L_\alpha$  の値を  $10^4$  個発生させたものである。横軸が発生させた個数で、縦軸が  $L_\alpha$  の値を示している。相関を 0.1, 倒産確率を  $1 - e^{-\lambda_i t}$  とし,  $\lambda$  を 0.01,  $t$  を 5 としている。

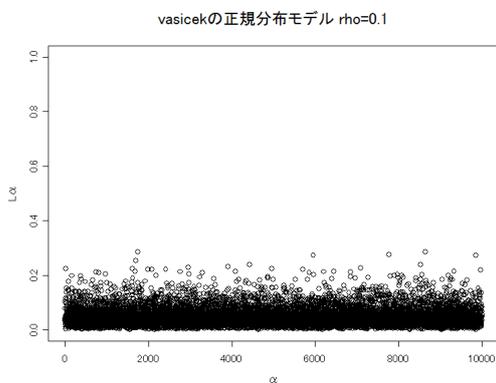


図 7: Vasicek の正規分布モデル  $\rho = 0.1$

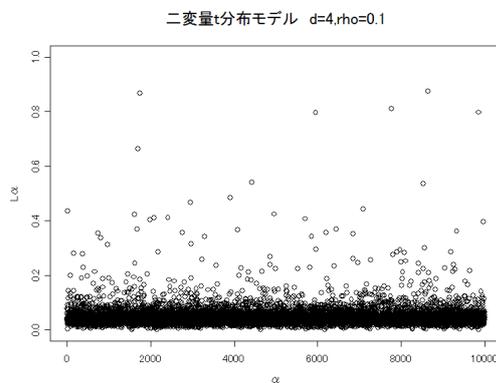


図 8: 2変量 t 分布モデル  $d = 4, \rho = 0.1$

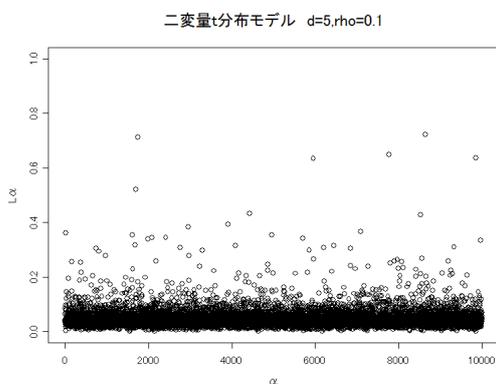


図 9: 2変量 t 分布モデル  $d = 5, \rho = 0.1$

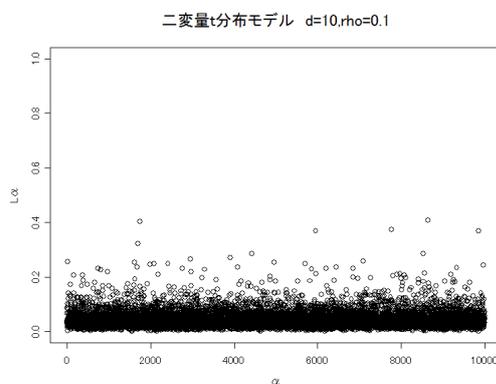


図 10: 2変量 t 分布モデル  $d = 10, \rho = 0.1$

図 7, 図 8 を比べると自由度 4 の 2 変量 t 分布では、正規分布に比べ大きい値が発生し、上側にばらつきが大きいことがわかる。2 変量 t 分布のばらつきの大きさが正規分布のばらつきに比べ、実際の市場に近いと考えられる。次に図 8, 図 9, 図 10 を比べる。それぞれ自由度が 4, 5, 10, の 2 変量 t 分布の図である。それぞれを比べると自由度の小さいものが自由度の大きいものよりばらつきが大きいことがわかる。自由度 10 と正規分布ではあまり大きな違いは見られない。

下の図は、相関を 0.5, 倒産確率を  $1 - e^{-\lambda t}$  とし,  $\lambda$  を 0.01,  $t$  を 5 として  $L_\alpha$  を発生させた.

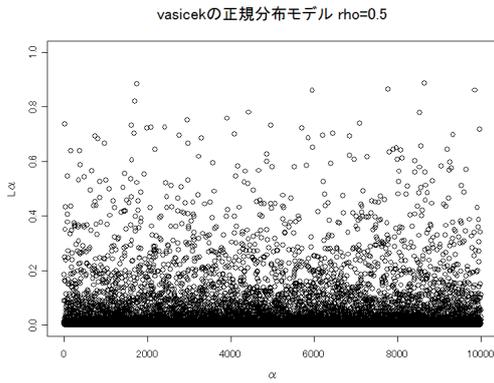


図 11: Vasicek の正規分布モデル  $\rho = 0.5$

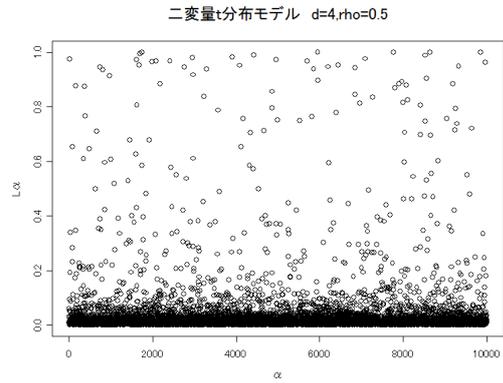


図 12: 2変量 t 分布モデル  $d = 4, \rho = 0.5$

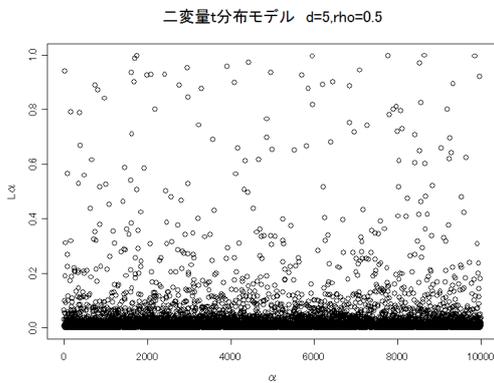


図 13: 2変量 t 分布モデル  $d = 5, \rho = 0.5$

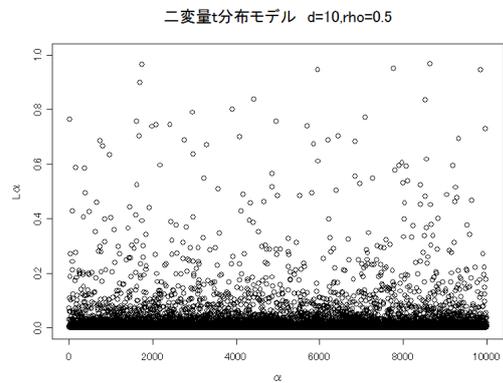


図 14: 2変量 t 分布モデル  $d = 10, \rho = 0.5$

図 11 と図 12 を比べると相関が 0.1 の場合と同じく, 上側へのばらつきは 2 変量 t 分布の方が大きいことがわかる. しかし,  $L_\alpha$  の値が 0.0 から 0.4 までの部分では, Vasicek の正規分布の方が発生している値が集中している. 次に図 12, 図 13, 図 14 を比べると相関が 0.1 の場合と同じく, 自由度が小さいものの方が上側にばらつきがあることがわかる. しかし, 0.0 から 0.2 までの下側ではあまり大きな違いは見られない.

下の図は、相関を 0.9, 倒産確率を  $1 - e^{-\lambda t}$  とし,  $\lambda$  を 0.01,  $t$  を 5 として  $L_\alpha$  を発生させた。

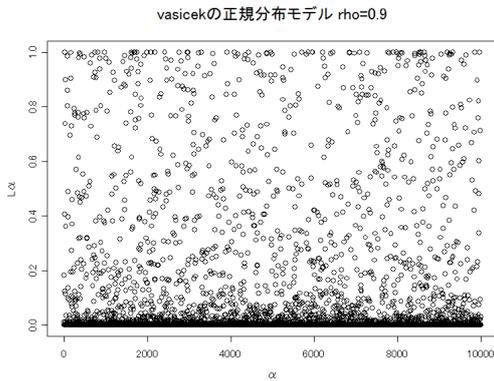


図 15: Vasicek の正規分布モデル  $\rho = 0.9$

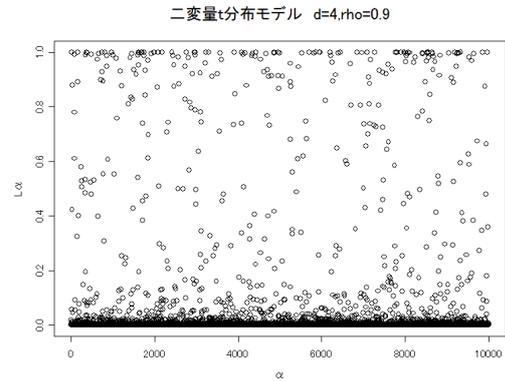


図 16: 2変量 t 分布モデル  $d = 4, \rho = 0.9$

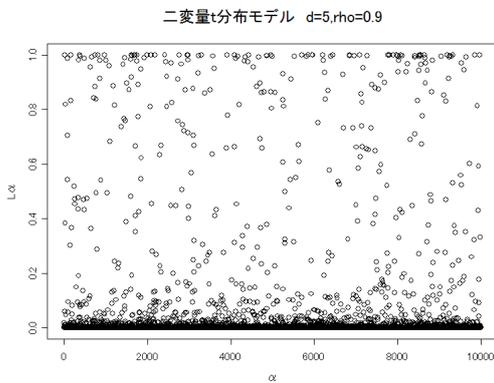


図 17: 2変量 t 分布モデル  $d = 5, \rho = 0.9$

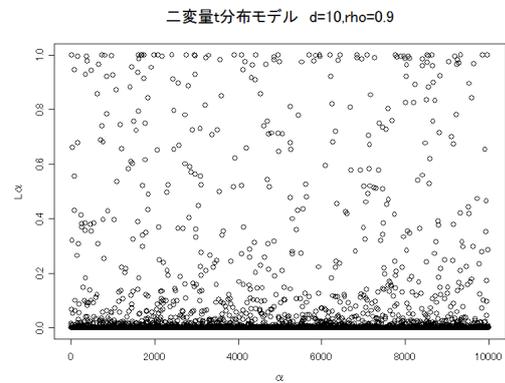


図 18: 2変量 t 分布モデル  $d = 10, \rho = 0.9$

図 15 と図 16 を比べると Vasicek の正規分布の方が自由度 4 の 2 変量 t 分布よりもばらつきが大きいことがわかる。  $L_\alpha$  の値が 0.0 近辺, 1.0 近辺ではばらつきとして大きな違いは見られないが, その間の部分では明らかに Vasicek の正規分布の方がばらつきが大きい。 図 16, 図 17, 図 18 では, 自由度が小さいものに比べ自由度が大きいものの方がばらつきが大きくなっている。

以上より, 相関が 0.1 のように低い場合には正規分布に比べ 2 変量 t 分布の方がばらつきが大きくなる。 相関が 0.9 のように大きい場合には正規分布の方が 2 変量 t 分布よりもばらつきが大きくなっていることがわかる。 しかし, 相関が大きい場合には 0.0 近辺に値が集中してしまい,  $L_\alpha$  の確率点が 0 から 0.8 までの部分ではほとんどふくらみがないことがわかる。 つまり相関が高い場合にはスプレッドレートなどがうまくはかれない可能性がある。

## 6.2 トランシェの期待損失の比較

次にトランシェの期待損失について比較を行う。ここでのトランシェの期待損失は式 (13) と式 (19) の  $L_\alpha$  の値と以下の式 (18) を用いる。

$$E[L_t^i] = \int_{\min\left[\frac{K_{i-1}}{1-R}, 1\right]}^{\min\left[\frac{K_i}{1-R}, 1\right]} (1-R) \left(x - \frac{K_{i-1}}{1-R}\right) dF_{Z_t}(x)$$

次の図は相関を 0.1, 回収率を 0.5, 時刻を 1 から 5 として  $L_\alpha$  の値を発生させたものである。また,  $x$  軸上に  $y$  軸と平行な直線を引いた。これは, 各トランシェのアタッチメントポイントの場所を示しており, 左から equity, junior mezzanine, mezzanine の順になっており, 0.075, 0.13, 0.175 の点である。アタッチメントポイント間で傾きが大きければ, その間ではデフォルトする可能性が高いことを示している。図の右上の数値は時刻を表しており, 一番下の曲線が時刻 1, 一番上の曲線が時刻 5 を示している。

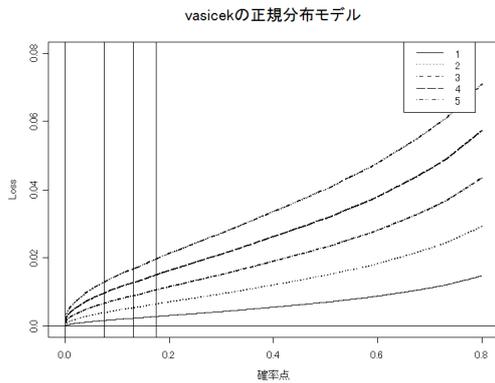


図 19: Vasicek の正規分布モデルの期待損失

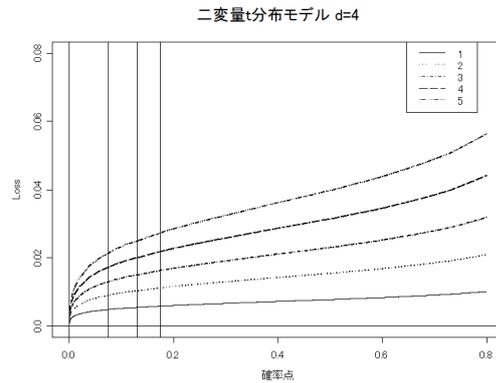


図 20: 2 変量 t 分布モデルの期待損失  $d = 4$

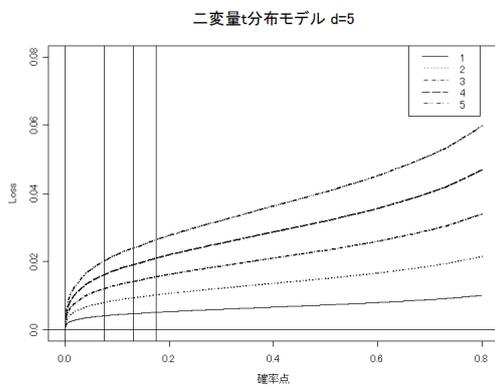


図 21: 2 変量 t 分布モデルの期待損失  $d = 5$

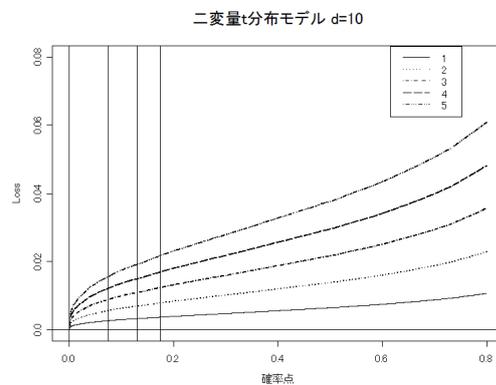


図 22: 2 変量 t 分布モデルの期待損失  $d = 10$

まず図 19 と図 20 を比較する。図 19 は Vasicek の正規分布でのトランシェの期待損失, 図 20 は自由度が 4 の 2 変量 t 分布でのトランシェの期待損失を表している。アタッチメントポイントが 0

から 0.075 の部分では自由度 4 の 2 変量 t 分布の方が Vasicek の正規分布に比べ膨らんでいることがわかる。これは、アタッチメントポイントが 0 から 0.075 の間では自由度 4 の 2 変量 t 分布の方がデフォルトする可能性が高いことを示している。つまり、この区間では 2 変量 t 分布は正規分布よりもリスクを評価しているということである。0.075 以降の部分ではあまり大きな違いは見られないが、Vasicek の正規分布の方が若干傾きが大きくなっている。次に図 20, 図 21, 図 22 を比較する。自由度が小さいものは自由度の大きいものに比べ、アタッチメントポイントが 0 から 0.075 の部分で膨らんでいることがわかる。0.075 以降の部分では大きな違いは見られなかった。

### 6.3 トランシェのспредレートとの比較

次にトランシェのспредレートを求める。ここでのспредレートは以下の式 (2) を用いる。

$$r_i = \frac{\sum_{k=1}^n \beta(t_k) E[L_{t_k}^i - L_{t_{k-1}}^i]}{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \beta(t_k) r_i E[(K_i - K_{i-1} - L_{t_k}^i)]}$$

下の表は、回収率を 0.5, 安全利子率を 0.001 としている。ここでは、2 変量 t 分布の自由度の値を変化させ、спредレートの値がどのようにかわるのかを見ている。

表 1: トランシェのспредレート 自由度の比較

		equity	junior mezzanine	mezzanine	senior	super senior	
$\rho = 0.1$	アタッチメントポイント	0~0.0375	0.0375~0.065	0.065~0.0875	0.0875~0.125	0.125~1	合計値
期待損失	正規分布	0.112865	0.010817	0.001799	0.000463	0.000002	0.125945
	2 変量 t 分布 自由度 4	0.140252	0.004256	0.000710	0.000408	0.000086	0.145721
	2 変量 t 分布 自由度 5	0.137481	0.005507	0.000882	0.000401	0.000053	0.144324
	2 変量 t 分布 自由度 10	0.122633	0.006553	0.000901	0.000474	0.000010	0.130571

表 1 を見ると、equity では 2 変量 t 分布の方が高くなっていることがわかる。これは equity では、2 変量 t 分布の方が安全であることを示している。また、super senior でも 2 変量 t 分布の方が高い値になっている。junior mezzanine, mezzanine, senior の三カ所は正規分布の方が値が大きくなった。また、合計値では最初の equity が大きかった分 2 変量 t 分布の方が大きくなっている。さらに自由度について比較すると、自由度が小さいものの方が equity と super senior ではリスクを評価しており、junior mezzanine, mezzanine, senior の三カ所では自由度の大きいものの方がリスクを評価している。

続いて表3, 表4, 表5では, 相関を変化させスプレッドレートの値がどのように変化するかを見ている.

表 2: トランシェのスプレッドレート 相関の比較  $\rho = 0.1$

		equity	junior mezzanine	mezzanine	senior	super senior	
$\rho = 0.1$	アタッチメントポイント	0~0.0375	0.0375~0.065	0.065~0.0875	0.0875~0.125	0.125~1	合計値
	正規分布	0.112865	0.010817	0.001799	0.000463	0.000002	0.125945
	2変量 t 分布 自由度 4	0.140252	0.004256	0.000710	0.000408	0.000086	0.145721

表 3: トランシェのスプレッドレート 相関の比較  $\rho = 0.5$

		equity	junior mezzanine	mezzanine	senior	super senior	
$\rho = 0.5$	アタッチメントポイント	0~0.0375	0.0375~0.065	0.065~0.0875	0.0875~0.125	0.125~1	合計値
	正規分布	0.033261	0.006425	0.002634	0.002945	0.000818	0.046083
	2変量 t 分布 自由度 4	0.037962	0.002183	0.000660	0.000670	0.000722	0.042197

表 4: トランシェのスプレッドレート 相関の比較  $\rho = 0.9$

		equity	junior mezzanine	mezzanine	senior	super senior	
$\rho = 0.9$	アタッチメントポイント	0~0.0375	0.0375~0.065	0.065~0.0875	0.0875~0.125	0.125~1	合計値
	正規分布	0.006349	0.001471	0.000736	0.001363	0.002855	0.012774
	2変量 t 分布 自由度 4	0.005857	0.000738	0.000310	0.000252	0.001766	0.008923

表2, 表3, 表4を見ると相関が低い場合には, 2変量 t 分布の方がリスクを高く評価しているが, 相関が大きくなると正規分布の方がリスクを高く評価していることがわかる. これは図7から図18において相関が大きいときには, 正規分布の方が2変量 t 分布よりもばらつきが大きいことからわかる. つまり相関が低い場合には, 正規分布ではリスクを低く設定してしまうため2変量 t 分布を用いる方が良いと考えられる. また相関が大きい場合には, 2変量 t 分布の方がリスクを低く評価してしまうため, 正規分布を用いる方が良いと考えられる.

## 7 結果

以上より次のことがわかる。第一に、相関が低い場合には2変量t分布の方がリスクを高く評価していることである。これは相関が0.1のときのそれぞれのスプレッドレートの合計値を比べると2変量t分布の方が高くなっていることからわかる。第二に、正規分布モデルでは相関が低い場合にequityとsuper seniorの価格を低くしすぎていることである。この二つの価格を低く設定したことが正規分布モデルでのCDOの理論的失敗であると考えられる。以上より、相関が低い場合には2変量t分布を用いることで、リスクの評価を良くすることができると考えられる。

## 8 付録

### 8.1 導出

#### 8.1.1 $s^2$

[証明]

$$L = p(Y) = N\left(\frac{N^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad Y \sim N(0, 1)$$

$s^2 = V[L] = E[L^2] - E[L]^2$  より,  $E[L^2]$  を求める.

$$\begin{aligned} E[L^2] &= E[p(Y)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(y)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N\left(\frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left( \int_{-\infty}^{\frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}} \int_{-\infty}^{\frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}} e^{-\frac{u^2+v^2+y^2}{2}} dudvdy \end{aligned} \quad (20)$$

$$u = \frac{u_1 - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \text{ より, } u_1 \text{ が求められる.}$$

$$\begin{cases} u_1 = u\sqrt{1-\rho} + y\sqrt{\rho} \\ \frac{du_1}{du} = \sqrt{1-\rho} \end{cases}$$

$$u \text{ が } -\infty \rightarrow \frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \text{ のとき, } u_1 \text{ は } -\infty \rightarrow N^{-1}(p) \text{ となる.}$$

$$\text{同様に, } v = \frac{v_1 - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \text{ より, } v_1 \text{ が求められる.}$$

$$\begin{cases} v_1 = v\sqrt{1-\rho} + y\sqrt{\rho} \\ \frac{dv_1}{dv} = \sqrt{1-\rho} \end{cases}$$

$$v \text{ が } -\infty \rightarrow \frac{N^{-1}(p) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \text{ のとき, } v_1 \text{ は } -\infty \rightarrow N^{-1}(p) \text{ となる.}$$

$$(20) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} e^{-\frac{(\frac{u_1-y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}})^2 + (\frac{v_1-y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}})^2 + y^2}{2}} \frac{du_1}{\sqrt{1-\rho}} \cdot \frac{dv_1}{\sqrt{1-\rho}} \cdot dy \quad (21)$$

$$-\frac{(\frac{u_1-y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}})^2 + (\frac{v_1-y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}})^2 + y^2}{2} = (\diamond) \text{ を計算していく.}$$

$$\begin{aligned} (\diamond) &= -\frac{u_1^2 - 2\sqrt{\rho}yu_1 + \rho y^2 + v_1^2 - 2\sqrt{\rho}yv_1 + \rho y^2 + (1-\rho)y^2}{2(1-\rho)} \\ &= -\frac{(1+\rho)y^2 - 2\sqrt{\rho}(u_1+v_1)y + u_1^2 + v_1^2}{2(1-\rho)} \\ &= -\frac{1+\rho}{2(1-\rho)} \left( y^2 - 2\frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho}y \right) - \frac{u_1^2 + v_1^2}{2(1-\rho)} \\ &= -\frac{1+\rho}{2(1-\rho)} \left( \left( y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho} \right)^2 - \frac{\rho(u_1+v_1)^2}{(1+\rho)^2} \right) - \frac{u_1^2 + v_1^2}{2(1-\rho)} \\ &= -\frac{(y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho})^2}{2\frac{1-\rho}{1+\rho}} + \frac{\rho(u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)}{2(1-\rho^2)} - \frac{(1+\rho)(u_1^2 + v_1^2)}{2(1-\rho^2)} \\ &= -\frac{(y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho})^2}{2\frac{1-\rho}{1+\rho}} - \frac{u_1^2 - 2\rho u_1v_1 + v_1^2}{2(1-\rho^2)} \end{aligned}$$

( $\diamond$ ) が求められたので、これを式 (20) に当てはめる。

$$(21) = \frac{1}{(1-\rho)(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} e^{-\frac{(y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho})^2}{2\frac{1-\rho}{1+\rho}}} \cdot e^{-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1v_1 + v_1^2}{2(1-\rho^2)}} du_1 dv_1 dy \quad (22)$$

$$\frac{1}{(1-\rho)(2\pi)^{\frac{3}{2}}} = (\star) \text{ を計算する.}$$

$$(\star) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1-\rho}{1+\rho}}\sqrt{1+\rho}\sqrt{1-\rho} \cdot 2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1-\rho}{1+\rho}} \cdot 2\pi\sqrt{1-\rho^2}}$$

よって式 (21) は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} (22) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1-\rho}{1+\rho}}} e^{-\frac{(y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho})^2}{2\frac{1-\rho}{1+\rho}}} dy \cdot e^{-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1v_1 + v_1^2}{2(1-\rho^2)}} du_1 dv_1 \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1-\rho}{1+\rho}}} e^{-\frac{(y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho})^2}{2\frac{1-\rho}{1+\rho}}} \text{ は密度関数なので} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1-\rho}{1+\rho}}} e^{-\frac{(y - \frac{\sqrt{\rho}(u_1+v_1)}{1+\rho})^2}{2\frac{1-\rho}{1+\rho}}} dy = 1 \text{ となる.} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 (22) \text{ の続き} &= \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 v_1 + v_1^2}{2(1-\rho^2)}} du_1 dv_1 \\
 &= N(N^{-1}(p), N^{-1}(p), \rho)
 \end{aligned}$$

以上より,  $s^2 = N(N^{-1}(p), N^{-1}(p), \rho) - p^2$  が証明された.

[証明終了]

### 8.1.2 $L_\alpha$

[証明]

$$\begin{aligned}
 N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right) &= \alpha \\
 \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} &= N^{-1}(\alpha) \\
 \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) &= \sqrt{\rho}N^{-1}(\alpha) + N^{-1}(p) \\
 N^{-1}(x) &= \frac{\sqrt{\rho}N^{-1}(\alpha) + N^{-1}(p)}{\sqrt{1-\rho}} \\
 x &= N\left(\frac{\sqrt{\rho}N^{-1}(\alpha) + N^{-1}(p)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \\
 &= N\left(\frac{\sqrt{\rho}N^{-1}(\alpha) - N^{-1}(1-p)}{\sqrt{1-\rho}}\right)
 \end{aligned}$$

[証明終了]

### 8.1.3 Everlein の定理 (Everlein[2])

まず時刻  $t$  での倒産確率を以下のように表す.

$$\begin{aligned}
p_k &= P \left[ \frac{X_{kT}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_k(t) \right] \\
&= \binom{n}{k} P \left[ \frac{X_{1T}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_1(t), \dots, \frac{X_{kT}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_k(t), \frac{X_{k+1T}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq d_{k+1}(t), \dots, \frac{X_{nT}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq d_n(t) \right] \\
&= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} P \left[ \frac{X_{1T}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_1(t), \dots, \frac{X_{kT}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_k(t), \frac{X_{k+1T}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq d_{k+1}(t), \right. \\
&\quad \left. \dots, \frac{X_{nT}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq d_n(t) \middle| Y = u \right] dP[Y < u] \\
&= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} P \left[ \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_{1T}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_1(t), \dots, \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_{kT}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} < d_k(t), \right. \\
&\quad \left. \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_{k+1T}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq d_{k+1}(t), \dots, \frac{Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} + \frac{Z_{nT}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq d_n(t) \middle| Y = u \right] dP[Y < u] \\
&= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ H \left[ \frac{F^{-1}(p) - \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right]^k \left[ 1 - H \left[ \frac{F^{-1}(p) - \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right]^{n-k} dH(u)
\end{aligned}$$

$n$  社のうち  $Z_t$  社がデフォルトしたとすると以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
F_{Z_t}(x) &= \sum_{k=0}^{nx} \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ H \left[ \frac{F^{-1}(p) - \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right]^k \left[ 1 - H \left[ \frac{F^{-1}(p) - \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{V}{f}}}}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right]^{n-k} dH(u) \\
&= \sum_{k=0}^{nx} \binom{n}{k} \int_0^1 s^k (1-s)^k dG_{p_t}(s) \tag{23}
\end{aligned}$$

$P(L_i = 1) = s$  とする.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{nx} \binom{n}{k} s^k (1-s)^k &= P \left( \sum_{k=0}^{nx} L_i \leq nx \right) \\
&= P \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{nx} L_i \leq x \right)
\end{aligned}$$

これを  $n \rightarrow \infty$  とすると以下のように表すことができる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{nx} L_i \leq x \right) = \mathbf{1}_{[0,x]}(s)$$

この式を (23) 式に代入することで以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 F_{Z_t}(x) &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,x]}(s) dG_{p_t}(s) \\
 &= G_{p_t}(x) \\
 &= P \left[ \frac{Y}{\sqrt{\frac{V}{f}}} \geq \frac{F^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}H^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right] \\
 &= H \left[ -\frac{F^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}H^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right] \\
 &= H \left[ \frac{\sqrt{1-\rho}H^{-1}(x) - F^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right]
 \end{aligned}$$

## 8.2 公式・定理

### 8.2.1 伊藤の公式

$X_t$  を

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

で定義される過程を伊藤過程と呼ぶ。

時間  $t$  と伊藤過程  $X_t$  の関数

$$Y_t = g(t, X_t)$$

は再び伊藤過程であり

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX_t)^2$$

を満たす。ここで  $(dX_t)^2$  は次の計算で求められる。

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

### 8.2.2 大数の法則

$X_1, X_2, \dots, X_n$  が互いに独立で同一の分布に従うとする。この分布は平均  $\mu$  を持つとする。このとき、ほとんどすべての標本  $\omega$  に対し

$$\frac{S_n(\omega)}{n} \rightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。これを詳しく表すと

$$P \left[ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - \mu \right| = 0 \right] = 1$$

となる。

### 8.2.3 中心極限定理

$X_1, X_2, \dots, X_n$  が互いに独立で同一の分布に従うとする。この分布の平均, 分散は存在しそれぞれ  $\mu, \sigma^2$  とする。このとき, 標本平均

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

を標準化した量を

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

とおくと,  $n$  が大きいときこの  $Z_n$  の分布は  $N(0, 1^2)$  の正規分布で近似できる。

つまり, 任意の  $x$  に対して

$$P[Z_n \leq x] \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。

### 8.3 プログラム

2変量t分布のトランシェのスプレッドレート

```
tt = function(n,rho,d,R,ki,ki1,lam,tk,r){
  # n:発生させる個数
  # rho:相関係数
  # d:自由度
  # R:回収率
  # ki:アタッチメントポイントの上限
  # ki1:アタッチメントポイントの下限
  # kt:時刻
  # lam:デフォルト強度
  # r:安全利子率

  set.seed(7)
  x=sqrt(d/rchisq(n,d))*rmvnorm(n,rho=rho)
  tt1=sort(x%%c(rho^0.5,(1-rho)^0.5))
  p=(1:n)/n
  qi=1-exp(-lam*tk)
  set.seed(7)
  pl2=pt((sqrt(rho)*qt(runif(10000),d)-tt1[n-qi*n])/sqrt(1-rho),d)
  pl4=pl2-ki1/(1-R)
  pl3=((ki1/(1-R)<p12) & (p12<ki/(1-R)))
  EL0=(1-R)*mean(pl3*p14)
  print(EL0)
}
tt(n=100000,rho=0.1,d=5,R=0.5,ki=0.0375,ki1=0,lam=0.01,r=0.001,tk=5)
```

正規分布のトランシェのスプレッドレート

```
p11 = function(rho,R,ki,ki1,lam,tk){
  # rho:相関係数
  # d:自由度
  # R:回収率
  # ki:アタッチメントポイントの上限
  # ki1:アタッチメントポイントの下限
  # kt:時刻
  # lam:デフォルト強度
  # r:安全利子率

  qi=1-exp(-lam*tk)
  set.seed(7)
  Lalpha1=pnorm((sqrt(rho)*qnorm(runif(10000),0,1)-qnorm(1-qi,0,1))/sqrt(1-rho),0,1)
  y=Lalpha1-ki1/(1-R)
```

```
    p14=((ki1/(1-R)<Lalpha1) & (Lalpha1<ki/(1-R)))
    EL1=(1-R)*mean(p14*y)
    print(EL1)
}
p11(rho=0.1,R=0.5,ki=0.0375,ki1=0,lam=0.01,tk=5)
```

## 参考文献

- [1] Paul Embrechts: QRM, Extremes, Mathematics and the Financial Crisis, リスクと保険, vol. 6, March 2010
- [2] E. Eberlein, R. Frey, and E.A.v. Hammerstein: Advanced credit portfolio modeling and CDO pricing, Mathematics - Key technology for the future, 2008.
- [3] O. Vasicek: The distribution of loan portfolio value, Risk, Vol. 15, No. 12, pp. 160-162, 2002.
- [4] J. Hull: Risk Management and Financial Institutions Third Edition, Wiley, pp. 240-252, 2012
- [5] Samuel Kotz and Saralees Nadarajah: Multivariate t Distributions and their Applications, Cambridge, pp. 74-80, 2004

## 謝辞

本論文の作成及び研究に際し、長きに渡りご指導頂いた浦谷規教授に深く感謝申し上げます。また日頃から研究内外で助言を頂いた先輩、同輩の諸氏に感謝致します。最後に学生生活を支え、常に見守ってくれた両親に感謝します。