

動的陽解法による不連続体解析手法の開発

八木, 唯夫 / YAGI, Tadao

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

118

(発行年 / Year)

2015-09-15

(学位授与番号 / Degree Number)

32675甲第368号

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2015-09-15

(学位名 / Degree Name)

博士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00012338>

法政大学審査学位論文

動的陽解法による不連続体解析手法の開発

平成 27 年度

法政大学大学院デザイン工学研究科
システムデザイン専攻 博士後期課程

八木 唯夫

目 次

第 1 章 緒言	[1]
1.1 本研究の背景と目的	1
1.2 本論文の構成と内容	4
第 2 章 不連続性を扱う解析手法	[6]
2.1 不連続体解析の定義	6
2.2 離散要素モデル	8
2.3 本研究の位置づけ	13
2.4 斜面崩壊と安定解析	16
第 3 章 運動方程式の定式化	[18]
3.1 はじめに	18
3.2 支配方程式	19
3.3 仮想仕事の原理	22
3.4 ハイブリッド型仮想仕事式	23
3.5 要素毎に独立な変位場	25
3.6 Lagrange の未定乗数	27
3.7 相対変位と付帯条件の処理	30
3.8 空間に関する離散化方程式	33
3.9 まとめ	38
第 4 章 接触と破壊の条件	[39]
4.1 はじめに	39
4.2 要素間作用力	40
4.3 接触判定と接触力	44
4.4 破壊基準と摩擦条件	48
4.5 まとめ	50

第 5 章 動的問題の時間積分法	[51]
5.1 はじめに	51
5.2 陰解法の定式化	52
5.3 陽解法の定式化	55
5.4 離散体としての取り扱い	57
5.5 安定条件	59
5.6 解析全体のフロー	61
5.7 陰解法と陽解法の比較	63
5.8 まとめ	71
第 6 章 動的陽解法 RBSM による不連続体解析	[73]
6.1 はじめに	73
6.2 衝突モデルにおける検証	74
6.3 滑動モデルにおける検証	80
6.4 斜面安定解析への適用	85
6.5 複合すべり問題への応用	93
6.6 まとめ	106
第 7 章 結言	[108]
参考文献	[113]
謝辞	

第1章 緒言

1. 1 本研究の目的と背景

公園や道路，建物をはじめとする人工物は，誰もが使いやすく，親切で，環境に配慮されていることが望まれる．デザインはこうした面で果たす役割が大きく，優れた都市計画や景観デザインは街の文化的価値の向上や経済発展に貢献する．しかし，公共施設となると，日常の暮らしだけでなく，非常時における対応も考慮されなければならない．2011年3月11日に発生した東日本大震災，2014年8月20日に広島で発生した大規模斜面崩壊のように，地震や台風などによる自然災害は，日本全国どの場所においても遭遇する可能性があり，そうした脅威に対して，安全性や安心感を与えられるような施設づくりのニーズが高まっている．こうした需要から，最近では業務継続計画（BCP：Business Continuity Plan）など防災減災の取り組みに力を入れる自治体も多くなってきている．

では，災害を想定したものづくりを実現するために，考慮すべき内容とはどのようなことであろうか．内閣府がまとめた防災白書の行動計画[1]では以下の3つの課題をあげている．

- ① ハード・ソフト対策の重点的・効率的実施
- ② 新たな災害形態への対応
- ③ 発災後の被害拡大防止策

これらの課題をクリアするためには，設計段階から発生する被害を予測し，それを活かした計画を立てなければならない．構造物の構築において，この場合の「予測」を行うには，壊れる現象をよく知っている必要がある．すなわち，どのような条件下で壊れるのか，またどのように壊れて行くのかについてである．それらの現象を理解する方法として，実物を創って実験を行う方法と，コンピュータシミュレーションによる解析により理論的に予想する方法がある．前者は確かな情報を得ることが可能であるが，多くの手間やコストが掛かるため，大きな構造物では現実的ではない．縮小モデルにより評価を行うと，解釈に頼る部分が大きくなり，その結果の精度もあいまいなものとなる．

一方，後者はコンピュータ技術の発展により，内容・規模を問わずあらゆる解析が僅かな時間で解けるようになっており，解析精度も高まっている．シミュレーション・デザインの考え

方も、設計実務において普及してきている。こうした技術進歩は、例えば東日本大震災において、阪神大震災や新潟県中越地震を教訓にした世界最高水準の耐震・制震・免震技術が十分に威力を発揮し、多くの人命や資産を守ることにつながった。一方で、津波による都市・集落の壊滅的な破壊、原子力発電所の爆発事故、広域にわたる液状化など、複合的に発生する想定外の事態には無力であり、人々の社会生活大きな被害をもたらした。最近のゲリラ豪雨による大規模斜面崩壊なども同じことがいえる。いま、こうして身近に起こる災害の想定外を少なくし、安全・安心社会を構築するためには、さらなるシミュレーション技術の進歩が望まれている。

破壊問題のシミュレーション技術を考えるにあたり、物体内の応力・変形分布状態を取り扱う従来からの連続体解析との違いを理解することが必要となる。連続体力学では、物体は常に連続で、強固につながっていることを仮定する。こうした解析技術の代表的な手法として、連続体力学に基づく有限要素法（FEM : Finite Element Method）[2]-[3]がある。FEMは、対象とする領域を節点で連結した要素に分割し、1つ1つの要素間に対する変位の連続性を保証することで、各要素を重ね合わせた時に全体的な挙動を明らかにする解析手法である。構造物の弾塑性解析における解の精度も高いことで知られている。

しかし、壊れる現象の中でも構成要素がバラバラとなるような解析を、連続体力学の考え方で行うことは非常に困難である。この場合は、物体の分離や衝突の繰り返しによる「接触力」や、面と面を水平に移動する「すべり」が卓越する。これら不連続面を表現するため開発されたのが Goodman のジョイント要素[4]である。ジョイント要素は、岩盤解析において、その破壊過程の挙動を明らかにする点で画期的だったものの、微小変形仮定が前提のため、大変形や動的問題には適していなかった。

そこで、FEMのような連続体の考え方とは、全く異なる手法として開発されたのが個別要素法（DEM : Distinct Element Method）[5]-[10]である。DEMは固体の集合を連続体近似せず不連続体としてそのまま取り扱うものであり、衝突運動を簡単なアルゴリズムで効率よく解くことができる。さらに要素内を剛体としていた DEM に対し、弾性体として取り扱うことのできる不連続変形法（DDA : Discontinuous Deformation Analysis）[11]-[13]が提案され、解の精度が向上した。これらは、大変形仮定が前提のため、動的問題に適している。

一方で、DEMやDDAは、もともと岩盤解析を主な目的として開発されたこともあり、急激な運動による崩壊や落石などの「接触力」の処理に重きが置かれているのに対し、コンクリートや地盤のような脆性材料など、破壊パターンの想定が難しい進行型破壊現象の解析を目的とした、剛体—ばねモデル（RBSM : Rigid Bodies-Spring Model）[14]-[18]が提案された。RBSMは剛体仮定とした要素同士が非線形バネで結合された物理モデルにより、「すべり」の安定性を評価する極限荷重を知ることができる。また、変位パラメータとして剛体内の任意点に剛体変

位を設定するため、自由度を変更せずに要素間の切断やすべりを導入し、破壊モードを効率よく再現できる。さらに、荷重増分法を用いた弾塑性解析では、破壊の進展性を追跡できる利点もある。

こうして、破壊のメカニズムを明らかにする点で優れた **RBSM** も、元来は微小変形仮定に基づく静的な取り扱いを主とする解析手法のため、複合すべりなど、逐次的に進展する動的挙動には対応することができなかった。そこで、著者らは、**RBSM** をハイブリッド型仮想仕事の原理をもとに運動方程式を再定義し、接触力の考え方は **DEM** 的アプローチとすることで陽解法を適用する手法を開発[19]-[22]した。この手法は、**DEM** と **FEM** を組み合わせた混合要素(**FDEM**: combined Fem-**DEM**) [23]-[26]的展開と異なり、自由度を変更せずに要素毎に独立して運動方程式を解くことができるため、アルゴリズムが簡単であり、上述した **RBSM** のメリットはそのままに、動的挙動を効率よく再現できる。

連続体から不連続体に至る破壊過程を考えると、弾性→塑性→流動の順に不連続性が増して行く。しかし、現在のシミュレーション技術では、主に弾性・塑性を取り扱う連続体ベースのものと、流動問題を取り扱う不連続体ベースのものが分かれてしまっているため、塑性後から流動に至る過程が十分に解明できないのが実情である。本論文は、そうした背景の下、構造物の崩壊過程を横断的に明らかにするマルチステージ対応のシミュレーション技術を開発し、連続体と不連続体を繋げる新しい手法を提案する。さらに、単純ブロックモデルや複層ブロックモデルによる解析例より、崩壊挙動の再現性や極限荷重による安全評価への適用性を示すものである。

1. 2 本論文の構成と内容

本論文は、7章から構成される。

第1章では、本研究の背景と目的、及び本論文の構成について示す。

第2章では、不連続体解析手法で用いられている代表的な離散要素モデルや、近年着目されている混合要素モデルについて整理し、提案手法の位置づけを明確にする。

第3章では、ハイブリッド型の変分原理を基に、空間に関して離散化された運動方程式の定式化について述べる。まず、動的弾性問題における基礎方程式を誘導し、慣性力の項を導入した仮想仕事式を示す。次に、隣接する2つの部分領域共通の境界に、付帯条件を Lagrange の未定乗数 λ を用いて仮想仕事式に導入することで、動的問題のハイブリッド型仮想仕事式を導く。さらに、部分領域毎に独立な線形変位場、ばね定数とペナルティ関数の関係、相対変位と付帯条件の処理方法について記述し、最後に空間に関して離散化された運動方程式を誘導する。

第4章では、接触機構と破壊の条件を示す。動的陽解法 RBSM では、剛体変位場を仮定しているため、要素間作用力は、隣接する要素間に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを評価することで進められ、隣接要素と着目要素の関係から、運動方程式が要素単位で陽に計算できることを示す。要素運動時に境界や別の要素と衝突する場合、DEM は点接触をベースとしているのに対し、RBSM は面接触としていることから、線分交差判定から接触判断を行う手法を適用する。また、接触面上に複数の積分点を分布配置できる RBSM の特徴を活かすことのメリットを示す。次に、摩擦力や粘着力を付加するための破壊条件として、モールクーロンの破壊基準を与え、摩擦によるエネルギー損失として、せん断方向にスライダーを設定する。これにより、要素表面に作用するせん断力が降伏関数 を超える場合、スライダーが摩擦抵抗力として作用し、小さい場合はせん断ばねにより相対変位が固定されることになり、すべりが表現されることになる。

第5章では、動的問題に対する時間積分法を示す。はじめに、弾性問題における解の精度を検証するため、Newmark の β 法を用いた陰解法による定式化を示す。変位場として線形変位場を仮定し、各要素境界面上にペナルティ関数を配置した場合の変位を未知数とした Newmark の β 法の適用方法を示す。次に、陽解法による時間積分の定式化を示す。陽解法には、中心差分近似を用いる方法と、DEM で用いられている接触力を加速度から差分近似し、運動量を算出する方法があることを示す。離散体の取り扱いとしては、DEM 的アプローチを用いて運動を表現する方法を示す。また、陰解法と陽解法を比較した結果、動的陽解法による離散体としての適用が望ましいと結論づけたその経緯を説明する。

第6章では、逐次的に進展する崩壊挙動を再現性や、地すべり問題への適用性を確認するための数値解析結果を示す。はじめに、単純ブロックによる評価として不連続体における弾性解の精度を確認するための積層問題、跳躍運動により接触力の精度を確認するための衝突問題、斜面におけるブロックの滑動量の精度を確認するためのすべり問題をそれぞれ解析し、検証する。次に、複数ブロックによる評価として、単層すべりと複層すべりの問題をそれぞれ解析し、検証する。そして最後に、複合すべりを再現した解析による評価を行う。

第7章では、本研究で得られた章毎の成果を概括する。

第2章 不連続性を取り扱う解析手法

2. 1 不連続体解析の定義

破壊問題のシミュレーションは、不連続体解析と呼ばれることが多い。しかし、現実の世界では、不連続体にも様々な形態のものがある。そこで、本研究で取り扱う不連続体解析について、はじめに定義する。

不連続体は大きく以下2種類に分類される。すなわち、①連続体であった固体に、クラックや剥離・すべりなどの破壊が生じ、それが進行して不連続面を形成するものと、②石やレンガなど、もともとばらばらな固体が積まれて一つの集合体として形成されているものである。前者①の状況は、まず物体内部にひび割れやすべりなどが発生することにより破壊が生じ、その破壊の進行に伴ってメカニズムが形成され、最終的には流動状態となるものである。一方、後者②の方の場合は、もともと不連続な固体が集まっているため、振動などの外力を受けてバランスが崩れると、ばらばらな挙動を示すようになるものである。

これらは、どちらも不連続体解析の範囲であるが、大きく異なるのは図 2-1 に示すように、連続体だったものに破壊のメカニズムが形成され不連続体となる過程を経ている、すなわち不連続性を取り扱っているか否かである。②であれば不連続体力学のみを考慮すればよいのに対し、①は連続体力学、不連続体力学の両方を考慮しなければならない。本研究で取り扱う不連続体解析は、こうした①のパターン、連続体・不連続体を横断するシミュレーション手法である。

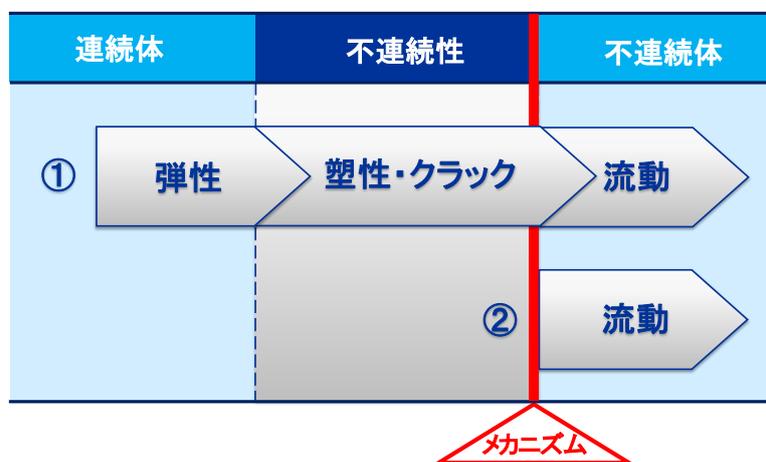


図 2-1 不連続性を取り扱う解析手法

この章では，不連続体解析の定義や分類について整理し，さらに現状の代表的な手法の基礎となる概念や計算アルゴリズムについて記述する．また，近年着目されている混合要素モデルについて言及する．そして，破壊問題への適用性確認のため，斜面崩壊の問題を考えるが，その前提として斜面安定解析の評価手法の現況を示し，本研究の主題を明らかにする．

2. 2 離散要素モデル

不連続体解析における固体のモデル化については，図 2-2 に示すように，連続体の一部に不連続要素を導入する離散ひび割れモデル(discrete crack model) と，要素すべてを直接不連続として取り扱う離散要素モデル (discrete element model) とに大別される．

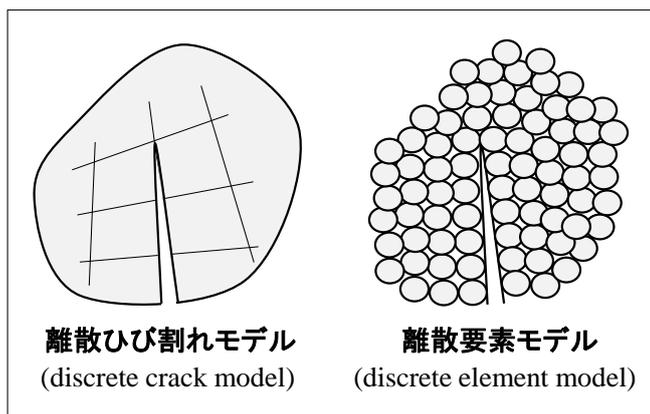


図 2-2 不連続体のモデル化

離散ひび割れモデルでは，RC 梁のひび割れをモデル化した Ngo and Scordelis によるリンク要素[27]や，岩盤内における断層などの不連続面を表現するため開発された Goodman のジョイント要素[4]がある．これらの要素は予め設定した要素境界辺を 2 重節点とし，その間に配置する[28]．基本的には微小変形仮定が前提のため，ひび割れ後の流動問題には適していない．一方離散要素モデルは，大変形仮定が前提であり，大規模な崩落などを問題を解くことができる．離散要素モデルでは，動的取り扱いを主とする解析アルゴリズムと，静的取り扱いを主とする解析アルゴリズムとに分類することができる．

動的取り扱いを主とする離散要素モデルの代表的として Cundall[5]-[10]の DEM や，Shi and Goodman[11]-[13]の DDA が広く知られている．

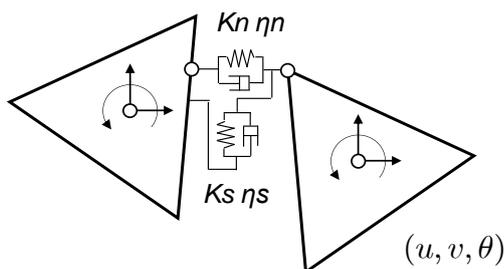


図 2-3 個別要素法 (DEM)

DEM は、当初、個別要素法という言葉は使われておらず、図 2-3 に示すように、要素形状は任意多角形のブロックを前提に、円形要素と正方形要素を用いた例が示されていた。後に、円形要素を用いた粒状体に対する「BALL」と呼ばれるプログラムが開発されるなど、次第にモデルのしやすさ、計算速度の観点から円形要素、球体要素が用いられるケースが多くなってきた。DEM は、要素を剛体と仮定し、それぞれの要素をばねとダッシュポットで接続して、要素の重なり具合から数値的に算出される外力をもとに運動方程式を解く。剛体変位と剛体回転をパラメータとして逐次解く計算アルゴリズムは、図 2-4 に示すとおり、極めて単純である。

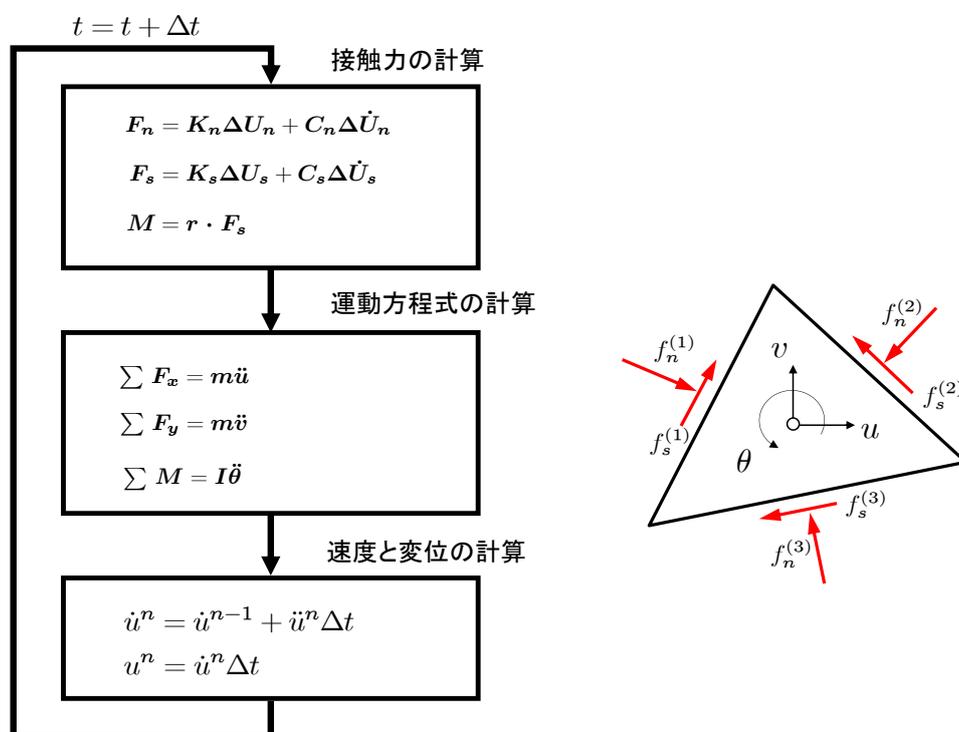


図 2-4 DEM の計算アルゴリズム

まず、要素の位置による接触力の計算を行って外力を求め、その外力より運動方程式を解いて加速度を求める。求まった加速度の差分近似から速度と変位を計算し、新しい位置を算出する。これを時間ステップにより繰り返すというものである。このような動的解析の時間積分において、連立一次方程式を解かずに計算を繰り返すことができる方法を陽解法(explicit scheme)と呼ぶ。陽解法は計算効率の面でメリットがあり、それも一つの要因となって DEM は今現在、不連続体解析手法の中でも最も多く利用され、岩盤工学、土木工学、資源工学の他[29]、宇宙工学[30]や、避難シミュレーション[31]-[33]のツールとして応用されている。ただし、概念図で示したようにばねと並列にダッシュポットでモデル化し

ているため、実際の物理現象との理論的な説明が十分にできないという問題点がある。また、要素を剛体として変形をばねに代表させるため、要素内のひずみエネルギーを考慮できず、弾性解が得られない。

一方、DDAは、図2-5に示すように接触機構にばねとダッシュポットではなくペナルティ関数を導入することで、エネルギーを2次形式で評価しているため、不自然な粘性項を排除できる。また、そのことにより要素の自由度に変化なくエネルギーが保存されるため、要素内を弾性体として取り扱う、すなわち剛体変位と剛体回転に加え、要素内のひずみエネルギーを考慮することが可能となっている。

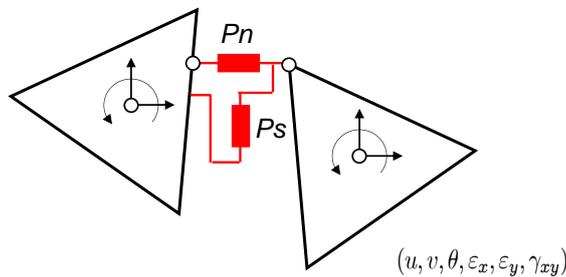


図 2-5 不連続変形法 (DDA)

しかし、こうして弾性解が得られる一方で、時間積分に陽解法を適用することは難しくなる。これは、陽解法では時間増分 Δt を決める際に、剛性係数が含まれるクーラン条件を満たさなければならないという制約があるが、ペナルティ関数はこの剛性係数に含まれるため、弾性解を維持しようとした場合、時間増分 Δt が極めて小さい値となり、繰り返し計算回数が膨大になる。したがって、DDAでは、時間積分として、Newmarkの β 法を用いている。具体的な計算アルゴリズムを図2-6に示す。

運動方程式: $F = m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku$

ニューマーク β 法: $\hat{K}\Delta u = \hat{F}$

$$\hat{K} = \frac{2}{\Delta t^2}M + \frac{\eta}{\Delta t}M + K_e + K_f$$

$$\hat{F} = \frac{2}{\Delta t}M\dot{u} + (\Delta F - f)$$

弾性剛性行列: K_e 拘束・接触等の剛性行列: K_f

図 2-6 DDA の解析アルゴリズム

Newmark の β 法は，運動方程式が未知ベクトルの陰関数として表されており，求解において，時間ステップ毎に連立一次方程式を解く．こうした時間積分法は，陰解法(implicit scheme)と呼ばれている．陰解法は，クーラン条件に関係なく安定するが，その反面，不規則な挙動が生じるため，時間増分 Δt をある程度小さくしなければならない[34]とされ，地震による破壊問題の実用化については課題が残されている[35]．

静的取り扱いを主とする離散要素モデルの中では，RBSM[14]-[18]が代表的な手法である．固体や構造体に破壊が生じ，進行してメカニズムを形成するまでのシミュレーションでは，先に述べたリンク要素やジョイント要素など，離散ひびわれモデルを用いた静的解析法がよく利用されてきた．しかし，離散要素を一部に導入する方法では，不連続面が予め分かっている特定の問題に限られる．一方，RBSM は，塑性変形や破壊の本質はすべりにあるとして開発された離散化極限解析用の離散モデルで，コンクリートや地盤など，予めどこで壊れるか特定することが困難な脆性材料の崩壊解析に適用することができる点で先駆的なモデルである．

RBSM は，任意形状の各要素の境界面上に，体積変化とせん断変形に抵抗する2種類のばねを設けている．この手法の概念図を図2-7に示す．

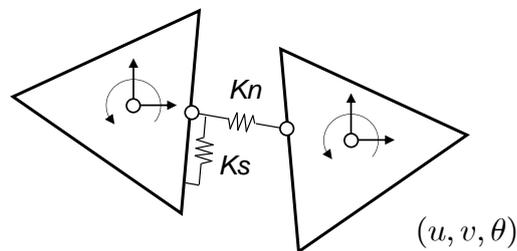


図 2-7 剛体ばねモデル (RBSM)

RBSM は，要素を剛体仮定としているため，自由度は剛体変位と剛体回転となるなどDEM とよく似ているが，2要素間の面接触を元に要素境界面上に集中化させた表面力の仕事を用いてエネルギーを評価している点で大きく異なる．原著論文[14]では，カステリアーノの定理を用いて次式のように誘導した剛体方程式を解くことで剛体変位を求めている．

$$\frac{\partial V}{\partial u} = K \cdot u = P$$

$$V = \frac{1}{2} \int_{l_{35}} \delta \cdot D \cdot \delta ds = \frac{1}{2} u^t \int_{l_{35}} (B^t D B) dsu \quad (2.1)$$

このような表面力をもとに離散化極限解析を行えば，進行型破壊を容易に取り扱うことができるため，実務の安定解析において広く利用されている．しかし，RBSMは，剛体仮定であるがゆえ，要素内の応力状態を求めることができず，DEM同様ひずみの退化の問題が生じるなど，解析精度の欠点を抱えていた．

そこで，剛体要素であるDEMに対して，弾性体要素のモデルとしてDDAが提案されたように，RBSMの剛性要素に対して，弾性体要素として提案されたものがハイブリッド型ペナルティ法（HPM：Hybrid-type Penalty Method）[36]-[39]である．HPMは，ハイブリッド型仮想仕事の原理をもとに，要素を弾性体として，変位の連続性をペナルティ関数で確保する方法である．この手法の概念図を図2-8に示す．

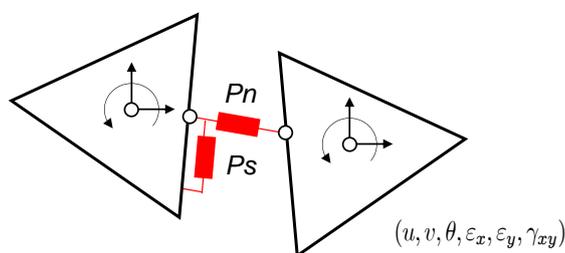


図2-8 ハイブリッド型ペナルティ法（HPM）

Lagrange の未定乗数が表面力を意味することを利用し，これにばね定数をペナルティとする近似を導入する．このペナルティによる反力を表面力として離散化極限解析を行えば，RBSM同様に進行型の破壊解析を行うことができる．また，HPMは要素毎に独立に，高次の変位場を仮定することができ，2次元の線形変位場の場合は，DDAと同様に，剛体変位，剛体回転，要素内のひずみの6自由度であるが，2次の変位場の場合は，これにひずみの勾配が加わり12自由度となり，非常に精度の高い解析を行うことが可能である[40]．逆に，線形変位場を剛体変位場と仮定するとRBSMと同様の離散方程式が得られる．こうしたHPMとRBSMの関係を利用し，本来求めることのできない要素内応力を求める方法も開発されている[41]-[43]．

さて，これまでDEM，DDAを動的取り扱い，RBSMやHPMは静的取り扱いを主とする解析方法として分類してきたが，動的手法に対して準静的，あるいは静的手法で解く方法も開発されており[44]，どちらの分類方法もあいまいになってきている．またRBSMやHPMも，陽解法・陰解法などの動的取り扱いによる解の安定性や精度についての検証が行われてきた[45]-[47]．そうした検証例については，第5章で具体的にとりあげる．

2. 3 本研究の位置づけ

4つの代表的な離散要素モデルを、表 2-1 のように要素剛性，自由度，接触機構，基礎方程式の項目に整理し比較を行う。

要素内変位場性が剛体か弾性体かの相違は，自由度の違い表れる．DEM や RBSM のように要素内を剛体変位仮定とする場合は，ばね定数をそのまま用いるが，DDA や HPM のように弾性変位仮定とする場合は，ばね定数としてペナルティ関数を導入することでひずみエネルギーを考慮することが可能となる．その結果，自由度が DEM や RBSM の場合の 3 自由度から，6 自由度に増加し，弾性体として取り扱うことができる．

接触機構に注目すると，DEM と DDA が点接触であるのに対し，RBSM や HPM は面接触である．点接触とすると要素どうしの接触判定が容易なため，衝突を主体とした解析に有利である．一方，面接触とすると，要素境界面上の法線方向・接線方向のエネルギーを容易に得ることができるため，すべりを主体とした解析の計算効率がよい．

表 2-1 代表的な離散要素モデルの比較

物理モデル	模式図	剛性	自由度	接触機構	方程式
個別要素法 (DEM)		剛体	3自由度 (u, v, θ)	点接触	運動方程式 $F = M\alpha$
不連続変形法 (DDA)		弾性体	6自由度 ($u, v, \theta, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$)	点接触	運動方程式 $F = m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku$
剛体ばねモデル (RBSM)		剛体	3自由度 (u, v, θ)	面接触	剛性方程式 $F = Ku$ 運動方程式 $F = m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku$
ハイブリッド型ペナルティ法 (HPM)		弾性体	6自由度 ($u, v, \theta, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$)	面接触	剛性方程式 $F = Ku$ 運動方程式 $F = m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku$

基礎方程式については、DEM や DDA は要素の運動状態を追跡することから、運動方程式を元に展開されている。一方、RBSM や HPM は離散化極限解析を目的としているため、一般的には剛性方程式を解いている。しかし、著者らは、面接触における接触判定方法を提案し[48], DEM 的なアプローチにより、運動方程式ベースに展開することも可能とした。運動方程式の定式化に関しては第 3 章で、接触判定等については第 4 章で、それぞれ詳しく説明する。

こうして各モデルの特徴を整理すると、計算効率の面では DEM と RBSM に、解析精度については DDA や HPM にそれぞれメリットがあると理解できる。実務においては、計算効率と解析精度を両立させたいのが本音であるが、実情はそれほど容易ではない。近年、計算効率の面で有利な物理モデルを用いた手法と解析結果に信頼のおける数理モデルに基づく手法を組み合わせる解析する、様々な手法が着目されている。それら混合要素的展開を体系的に示したものが、図 2-9 である。

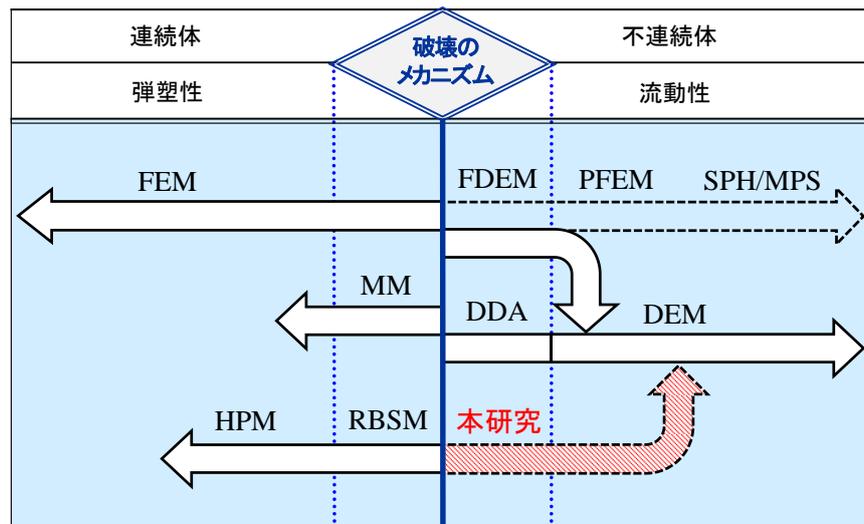


図 2-9 不連続体解析における混合要素的展開

まず、弾塑性解析において汎用的な FEM と離散要素モデルを混合要素的に取り扱う手法がある。固体力学系だと DEM と組み合わせた FDEM[23]-[26]が、流体力学系だと要素ではなく粒子の挙動を追跡する粒子法[49]-[50] と組み合わせた粒子有限要素法 (PFEM : Particle Finite Element Method) [51]-[52]がそれぞれ先駆的である。FDEM は、ガラスやコンクリートが衝撃により破壊・貫通する際における適用例があるが、自由度の違いや定ひずみ要素との関係を物理モデルで関連付けることが難しい。一方、PFEM は、津波などの流動性の高い流体・固体の運動から受ける力を、粒子を結んでメッシングし、有限要素で評価する点で画期的であるが、リメッシュする必要があるため、計算負荷が大きくなる傾

向にある。ただし、これらの手法は開発されて間もないため、今後不連続体への適用事例が増え発展していくことが期待されている。

次に、DDA における各要素ブロックを有限要素に分割し、FEM と DDA の特徴を組み合わせたマニフォールド法 (MM : Manifold Method) [53]-[54]がある。この方法は、物理領域に被さるような複数の数学メッシュを設け、物理領域に設定されるつり合い方程式を数学メッシュで解析する方法で、積分および接触は物理領域間で行うものである[55]。物理領域毎に三角形の数学メッシュが設定されていることが特徴である。領域の積分に関して、数学的な部分領域と物理的な部分領域があるため工夫が必要であるが、不連続性体に特化した手法の DDA をベースとし、連続体解析までを統一して扱えるようにしようと試みている。

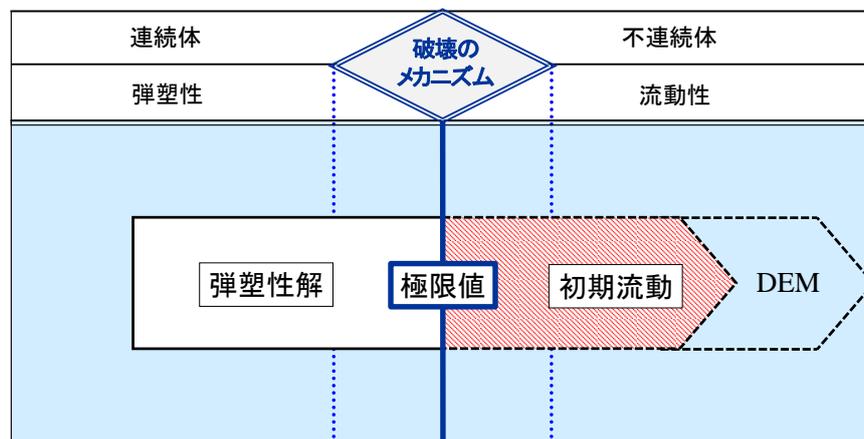


図 2-10 本研究の位置づけ

本研究は、こうした混合要素的展開と同様であるが、基本的には統一された定式化にもとづいて解こうとする試みである。図 2-10 に示すように、破壊の進展順で考えた時、弾性解から極限值を得るところまでは既に可能となっているが、その先の崩壊挙動を HPM/RBSM で解くことができない。その部分を可能とするための提案が、本論文に収められている。すなわち、破壊において重要なパラメータが得られる極限解析に重きを置きつつ、その前後の初期流動を明らかにすることを重要なテーマとしている。将来的には、崩壊後完全な流動状態における DEM への展開も視野に入れている。

2. 4 斜面崩壊と安定解析

本論文で提案する動的陽解法の破壊問題への適用性については，斜面安定解析により評価を行う．斜面崩壊は，図 2-11 に示すように，弾性，塑性そして極限值を超えた後の流動など，各ステージでの挙動が明らかになっているため，マルチステージ対応の検討を行うのに適している．この節では，斜面崩壊の種類及び特徴，並びにそれらに対応する解析手法について整理する．

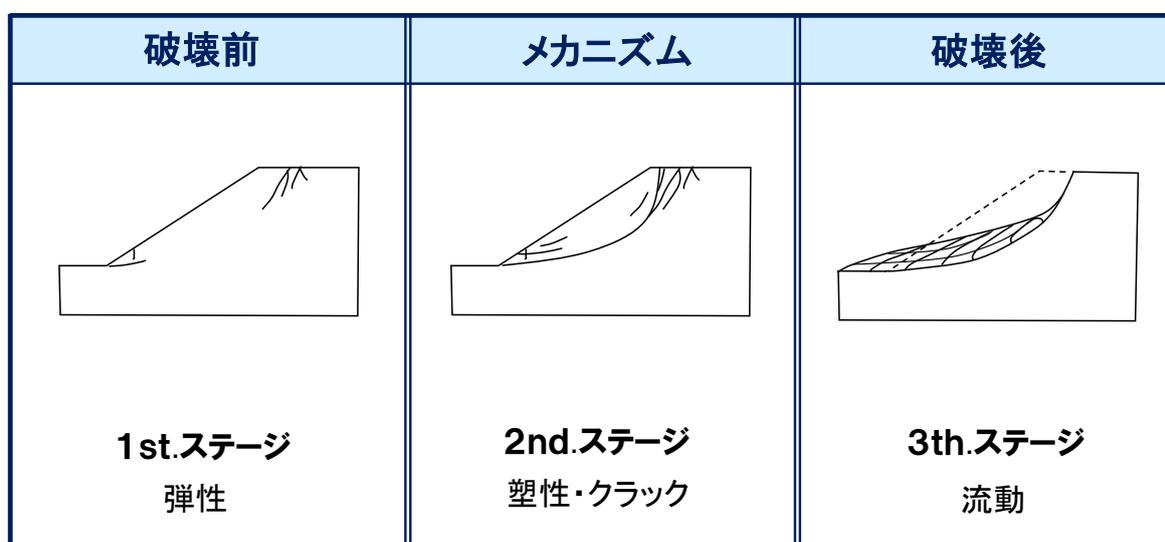


図 2-11 斜面崩壊のステージ

斜面の内部では，重力作用の他，外力としての地下水浸透力（間隙水圧），上載荷重，または，地震時の慣性力などが作用する．これらは斜面を滑動させようとする力として存在し，これらが斜面の持つせん断強さを超えると，斜面の平衡が保たれなくなり滑り破壊が生じる．一般に，滑り破壊の初期には，まず斜面末端部分で強度的な飽和状態（極限平衡状態という）が起こり，局所的破壊が生じる．その破壊周辺で，それまでの平衡が失われ，破壊部の隣接で応力集中が生じ破壊が上方へ伝播して逐次破壊する．この結果，末端から頭部の一連の曲面であるすべり面が形成される．すなわち，斜面の安定は，このようなすべり面でのせん断応力と土塊の持つせん断強さとの総合的なバランスを論ずる問題と考えることができる．

一般に斜面災害の場合，その運動様式によって崩壊形態が区分される．例えば急激な運動を起因とする「崩壊・落石」と，すべり面を形成し大規模かつ緩慢に運動する「地すべ

り」に分けられる。しかし、実際の崩壊では、単一の崩壊形態の場合は少なく、いくつかの崩壊形態が複合的に生じる場合が多く、運動様式も複雑である。こうした場合の安定解析手法としては、大きく「極限平衡法」と「数値解析法」に大別される。

前者は、前述のすべり面をあらかじめ仮定し、モール・クーロン則による破棄基準をもとに応力の極限平衡により安定性を考えるものである[56]。極限平衡法でよく用いられる2次元簡便スライス法（いわゆる簡便法）は、すべる要素を鉛直に切ったスライス分割し、円弧すべりに対して安全率を定義した Fellenius 法[57]が広く知られている。これらは、Sweden 法とも呼ばれているもので、現在も国土交通省を初めとする官庁の指針にも多く採用されている。Fellenius 法では、スライス間に作用する応力を無視するが、スライス間に作用する応力をモデル化し、解析精度を向上させた Bishop 法もよく用いられる[58]。

一方、後者の数値解析法では、FEM による実績が多く、斜面安定解析法としての地位も確立している。しかし、ここで最大の障壁となるのは、不連続箇所の取扱いである。連続体ベースの FEM では、すべり面の特定が困難な破壊現象の動的挙動を解くことが難しい。そこで不連続性の取扱いに優れた DEM などの離散要素モデルが併用されるようになってきている。DEM は点接触としているため、「崩壊・落石」などを得意としており、崩壊後の到達距離などの動的挙動を想定するのに用いられている。

一方、RBSM は面接触としているため、「地すべり」問題では要素間の表面力の仕事を用いたエネルギー評価から、極限解析が行える。こうした特性を発展させ、斜面技術者の実務面に配慮した簡易三次元斜面解析法[59]なども提案されている。しかし、RBSM は、元来微小変形仮定に基づく静的な取り扱いを主とする解析手法のため、逐次的に進展する動的挙動には対応することができなかった。そこで、著者らは、RBSM をハイブリッド型仮想仕事の原理をもとに運動方程式を再定義し、接触力の考え方は DEM 的アプローチとすることで陽解法を適用する手法を開発[19]-[22]した。離散要素モデルの特性を活かし、極限解析と動的解析を一元化することで、安定解析の信頼性と計算効率を高めようとするものである。

本研究では、ハイブリッド型仮想仕事の原理に基づく動的陽解法アルゴリズムを用いて、単純ブロックモデルでは運動方程式に基づく理論解と、複数ブロックモデルでは簡便法による安全率と解析解を比較し、さらに動的挙動を考察することで斜面安定解析への適用性を検証している。また、引っ張りに対する抵抗力が弱く、その力がごく僅かでしかない地盤材料に、引っ張りクラックが発生し不安定化した斜面がすべり出すことで、さらに破壊が進行し地盤全体が不安定化する、いわゆる複合すべりなど複雑な挙動を示す問題へ応用についても言及している。

第3章 運動方程式の定式化

3.1 はじめに

進行型破壊などの問題では、破壊面上の表面力を取り扱う必要がある。FEM では、このような問題の解析にあたり、節点における変位の連続性を若干緩め、要素境界边上での変位の連続性に関する付帯条件を Lagrange の未定乗数によって変分表示に導入するハイブリッド型の変分原理が用いられる[60]。この未定乗数は要素境界面上の表面力という物理的な意味を有しており、変位場は要素毎に独立に仮定することができる。

このハイブリッド型変位モデルの考え方に着目し、Lagrange の未定乗数にばねの考え方を導入し、ペナルティ関数を用いたものが HPM である。これは、不連続 Galerkin 法における interior penalty (IP) FEM と類似の方法で、ペナルティ関数に関する考え方を要素間の変位のジャンプに適用することで、要素間の弱い連続性を満たす方法である[61]。一方、線分変位場を仮定した HPM の展開において、剛性変位場を仮定し、ペナルティ関数にばね定数を仮定すると RBSM の離散化方程式が得られる[41]-[43]。

本章では、ハイブリッド型仮想仕事の原理に基づく離散化手法の動的問題に関する基本的な考え方を整理し、空間に関する離散化方程式を誘導する。

3.2 節では、基礎となる弾性体の運動方程式を誘導し、離散化にあたっての支配方程式を整理する。3.3 節では、慣性項を導入した支配方程式に対する仮想仕事式を示し、3.4 節において、変位の連続性を付帯条件とするハイブリッド型の仮想仕事式を誘導する。HPM の特徴は、変位場の仮定方法にある。HPM では元々ばらばらであった部分領域間の変位の連続性を、Lagrange の未定乗数を用いて導入するため、FEM のように節点で変位の共有する必要はない。このため、部分領域毎に独立に変位場を仮定することができる。3.5 節ではこの変位場の考え方について述べる。

3.6 節と 3.7 節では、離散化にあたっての付帯条件と処理方法について述べる。まず、3.6 節で Lagrange の未定乗数の処理方法を説明し、3.7 節で仮定した変位場を用いて、具体的に付帯条件の離散化方法について述べる。

最終的に 3.8 節において、空間に関して離散化された方程式を誘導し、3.9 節において、離散化過程を概括する。

3.2 支配方程式

弾性問題の基礎方程式は次で与えられる.

$$\text{(釣合い方程式)} \quad \mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (3.1)$$

$$\text{(応力-ひずみ関係)} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{in } \Omega \quad (3.2)$$

$$\text{(ひずみ-変位関係)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \quad (3.3)$$

ここで, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ は, それぞれ, 変位, ひずみ, 応力ベクトルであり, \mathbf{D} は構成行列, \mathbf{f} は物体力を表している. また, \mathbf{L} は微分作用素であり, Ω は境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ で囲まれた領域, もしくは体積である. ただし, 図 3-1 に示すように, $\Gamma_t := \partial\Omega_t$ は表面力が与えられる境界, $\Gamma_u := \partial\Omega_u$ は変位が与えられる境界を表している.

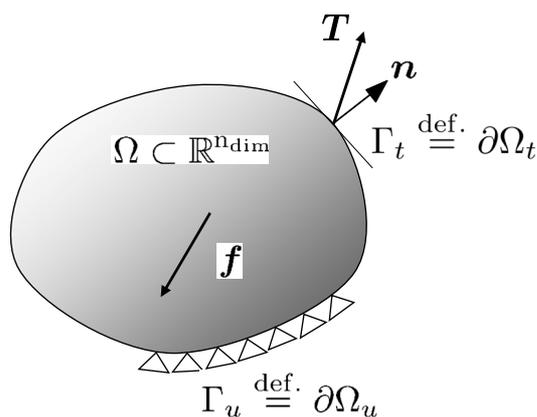


図 3-1 有限領域 Ω と境界 $\partial\Omega$

各境界上において, 以下の条件を満たしている.

$$\text{(力学的境界条件)} \quad \mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (3.4)$$

$$\text{(幾何学的境界条件)} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3.5)$$

ここで, \mathbf{T} は表面力で, $\mathbf{T} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ であり, \mathbf{n} は境界上の外向き単位法線ベクトルである. また, 上付の $\bar{\bullet}$ は既知量を表している.

2次元問題の場合、それぞれの係数は以下のように表される.

$$\mathbf{L}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{平面応力の場合})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比であり、 f_x, f_y は、それぞれ x, y 軸方向の物体力を表している。また、 u, v は、それぞれ x, y 軸方向の変位である。

また、方向余弦と表面力に関する係数は以下のとおりである。

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$$

ここで、 n_x, n_y は境界上の方向余弦であり、 T_x, T_y は境界における法線および接線方向の表面力である。

一方、ダランベールの原理によれば、動的問題は加速度による慣性力を物体力として導入することで静学的に取り扱うことができる。これは、式(3.1)に、以下の単位面積当たりの慣性力を考慮すれば動的問題として扱えることを意味している。

$$\mathbf{f}_\alpha = -\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

すなわち、運動中のつり合い方程式は、

$$\mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_\alpha = 0 \quad (3.7)$$

で与えられる。

いま、2次元平面応力状態の場合、それぞれの式(3.1)及び(3.6)、(3.7)は次のように与えられる。

(応力のつり合い方程式)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

(慣性力)

$$\left. \begin{aligned} f_{\alpha x} &= -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ f_{\alpha y} &= -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

(運動中のつり合い方程式)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{\alpha x} \\ f_{\alpha y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

ここで、 ρ は物体の密度を表している。

3.3 仮想仕事の原理

変位 \mathbf{u} と仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ に果たせられる許容関数空間を

$$\mathbb{U} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}\} \quad (3.11)$$

$$\mathbb{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\delta\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \delta\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}\} \quad (3.12)$$

とする。このとき、仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ を運動方程式(3.7)の両辺に乘じ、物体領域 Ω について積分すると以下の関係が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t (\mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\alpha}) d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

2次元問題の場合、式(3.13)は次のように表される。

$$\int_{\Omega} [\delta u, \delta v] \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{\alpha x} \\ f_{\alpha y} \end{Bmatrix} \right) d\Omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

ここで、 $\delta\mathbf{u}^t = [\delta u, \delta v]$ は仮想変位である。

これにガウスの発散定理を適用すると、式(3.13)は次のように展開され、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t (\mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\alpha}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f}_{\alpha} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f}_{\alpha} d\Omega = 0 \end{aligned}$$

最終的に、動的問題に対する仮想仕事式(3.15)を得る。すなわち、左辺第1項の内力による仮想仕事とそれ以外の項の外力による仮想仕事は等しい。

$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f}_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^t \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.15)$$

3.4 ハイブリット型仮想仕事式

いま, 図 3-2 に示すように領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする.

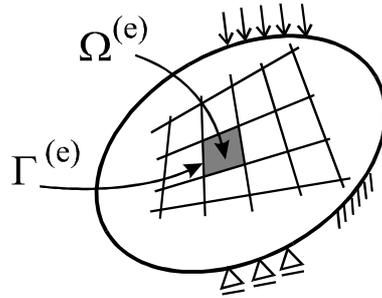


図 3-2 部分領域 $\Omega^{(e)}$

すなわち,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (3.16)$$

このとき, 式(3.15)の仮想仕事式は各部分領域の和として以下のように表すことができる.

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f}_\alpha d\Omega \right) - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^t \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

また, 図 3-3 に示すように, 隣接する 2 つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界を $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ とするとき,

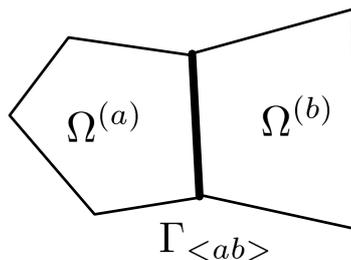


図 3-3 共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ は次の条件を満たしている境界である.

$$\Gamma_{\langle ab \rangle} = \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (3.18)$$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では, この境界において付帯条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (3.19)$$

を Lagrange の未定乗数 λ を用いて,

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda^t (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) d\Gamma \quad (3.20)$$

と表し, 仮想仕事式(3.17)に導入する. ただし, $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は, それぞれ部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の変位を表している. また, $\delta(\bullet)$ は (\bullet) の変分量を表している.

いま, 隣接する2つの要素境界辺の数を N とすると, ハイブリッド型仮想仕事式は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f}_\alpha d\Omega \right) - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^t \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \\ - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda^t (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

ただし, 領域や境界を示す上付や下付の (e) や $\langle s \rangle$ は省略して示している.

なお, Lagrange の未定乗数 λ は, 次式のとおり, $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を意味している[60].

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = -\mathbf{T}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad (3.22)$$

ここで, $\mathbf{T}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ と $\mathbf{T}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ は, それぞれ, 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を表している.

3.5 要素毎に独立な変位場

解析領域を部分領域に分割する際、各部分領域において、独立に変位場を仮定する。その時の変数パラメータは、通常要素重心に置かれる。これから、2次元問題における変位場に対して、線形変位場を用いた場合の定式化を説明する。

いま、部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内における線形変位場を表すと次のようになる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (3.23)$$

ここで、上付の(e)は部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する物理量であることを意味している。式(3.23)における係数は以下のとおりである。

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u^P, v^P, \theta^P]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x^P, \varepsilon_y^P, \gamma_{xy}^P]^t$$

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y^{(e)} \\ 0 & 1 & X^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X^{(e)} & 0 & Y^{(e)}/2 \\ 0 & Y^{(e)} & X^{(e)}/2 \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X^{(e)} &= x - x_P \\ Y^{(e)} &= y - y_P \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

とし、下付 P は任意点で、前述のとおり通常は重心に設定する。したがって、図 3-4 に示すように、式(3.23)の $\mathbf{d}^{(e)}$ は、部分領域 (e) 内の点 P における剛体変位と剛体回転を表している。また、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ は、部分領域内で一定なひずみを表している。

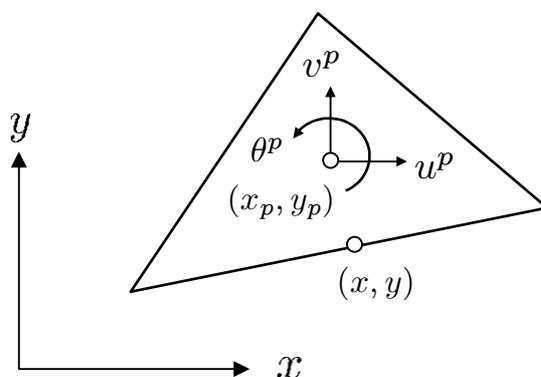


図 3-4 部分領域内における座標系と自由度

一方，剛体変位場を仮定すると $\epsilon^{(e)}$ は0となるので

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \quad (3.25)$$

となる．

このように，領域内における任意点の変位場の仮定については，剛体変位に加え，ひずみを自由度として取り扱う線形変位場のモデルが **HPM**，剛体変位と剛体回転のみを取り扱う剛体変位場のモデルが **RBSM** となる．また，それぞれ各領域内の任意点におけるパラメータを用いて変位場を表しているため，自由度を要素頂点にも設定する従来の変位型 **FEM** の要素とは異なり，頂点において変位を共有しない．すなわち，頂点は領域形状を認識するために用いるのであって，従来の変位型 **FEM** のように頂点は形状関数に支配されないため，要素形状は，特に限定されず，任意の多角形，多面体，曲面体を部分領域として用いることができる．

3. 6 Lagrange の未定乗数

前述のとおり，Lagrange の未定乗数は，物理的には表面力を意味している．従来のハイブリッド型変分原理を用いる手法では，この未定乗数を要素境界边上の点における値と補間関数を用いて表し，その値を未知数として重ね合わせを行い，全体係数行列を作成する．したがって，要素内変位場を独立に設定しても，この時点で要素形状は補間関数に依存し，何らかの拘束が生ずる．

一方，HPM は，Lagrange の未定乗数 λ が表面力に対応するという物理的意味を考慮して，部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ の表面力を式(3.26)のように表した[36]．

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} \quad (3.26)$$

ここで， \mathbf{k} はばね定数， $\delta_{\langle ab \rangle}$ は領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の相対変位を表しており，2次元問題の場合，以下のように仮定される．

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{n\langle ab \rangle} \\ \lambda_{s\langle ab \rangle} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{n\langle ab \rangle} \\ \delta_{s\langle ab \rangle} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$\lambda_{n\langle ab \rangle}$ ， $\lambda_{s\langle ab \rangle}$ は，図 3-5 に示すように，法線および接線の x ， y 方向に対する Lagrange の未定乗数，すなわち表面力である．

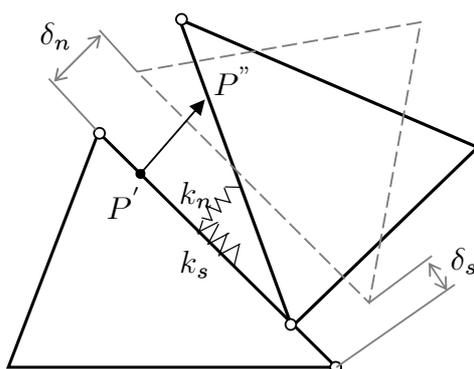


図 3-5 変形後の要素関係

式(3.26)のばね定数を決定するにあたり，単位長さあたりの相対変位を以下のように仮定する．

$$\varepsilon = \frac{\delta}{h} \quad (3.28)$$

ここで、 ϵ を仮想ひずみ成分として、

$$\epsilon = \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_n \\ \gamma_s \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

と表す。 ϵ_n は法線方向の単位長さあたりの相対変位、 γ_s はせん断方向の単位長さあたりの相対変位である。 h は $h_1 + h_2$ であり、 h_1 、 h_2 は、図 3-6 に示すように、各要素の図心から、該当境界辺に下した垂線の高さである。

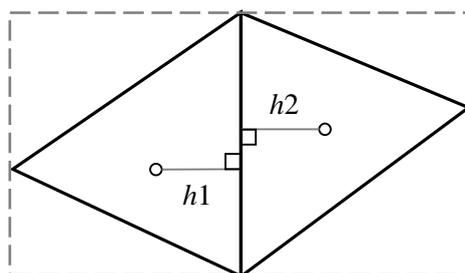


図 3-6 垂線の高さの定義

RBSM では、剛体要素仮定としているため、その値をばね定数に代表させ、近似的に 1 軸状態の応力—ひずみ関係から求めている[16]、こうした関係を、平面応力状態を考えると、次のようにばね定数が決定される。

$$\left. \begin{array}{l} k_n = \frac{E}{(1 - \nu^2)(h_1 + h_2)} \\ k_s = \frac{E}{(1 + \nu)(h_1 + h_2)} \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比である。

HPM では、要素内応力考慮されているため、RBSM のような、要素の変形を考慮するためのばね定数を用いる必要はない。同様な考え方として、Shi ら[11]が開発した、剛体変位と要素内のひずみをパラメータとする DDA がある。佐々木ら[12]は、DDA において、近似的に変位の連続性を確保するため、ペナルティ関数による接続を提案している。この方法では多角形の頂点と相対する要素境界辺に関する点接触を原則としており、DEM と同様の方法で処理している。しかし、要素内を弾性体として扱う場合、点接触は一点に集中荷重が作用するような状態となり、応力—ひずみ関係において、局所的な応力集中により不自然な応力状態が生ずることも考えられる。そこで、物理領域に数学メッシュを設ける方法などが提案されている[53]-[54]。一方 HPM は DDA と同様、要素境界面上の相対変位と表面力の関係式(3.26)において、 \mathbf{k} をペナ

ルティとして取り扱い，近似的に要素境界面上で変位の連続性を導入している．DDA と異なるのは，図 3-7 に示すように，点接触ではなく面接触としている部分である．面接触とすることで，局所的に応力が集中する恐れがなく，弾塑性解が得られる．しかし，極めて硬いばねを設定する必要があるため，動的問題における時間積分の安定条件に関する課題が生じる．なお，面接触に関しては第 4 章で，時間積分における課題に関しては，第 5 章で詳しく説明する．

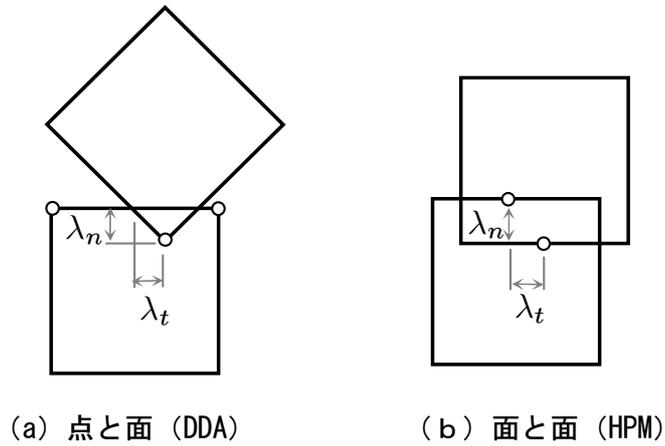


図 3-7 要素境界面上の変位の取り扱い

こうして，ペナルティ関数を p とすれば，式(3.26)の関係において，以下のとおり定義される．

$$k_n = k_s = p \tag{3.31}$$

3. 7 相対変位と付帯条件の処理

はじめに、図 3-8 に示すようなある部分領域 $\Omega^{(e)}$ における全体座標系と局所座標系の関係を考える。ここで、 $x - y$ 軸は全体座標系であり、 $n - s$ 軸は領域境界边上の局所座標系である。また、領域境界边上の法線方向 n 軸、接線方向 s 軸に関する変位を u_n, v_s とし、全体座標系 x 軸および y 軸方向の変位を u, v とする。

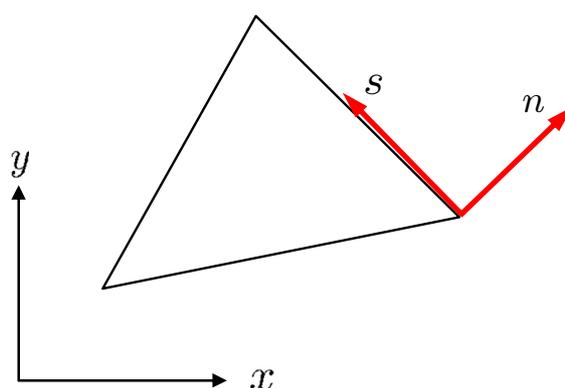


図 3-8 全体座標系と局所座標系

局所座標系と全体座標系の変位の関係は、次のように表される。

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \mathbf{u} \quad (3.32)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列である。

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

いま、式(3.3)を 2次元状態の成分で表すと、以下のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

一方、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上での相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ は、以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \delta_{\langle ab \rangle} &= \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} \\ &= \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} - \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで, $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$, $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ を部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの領域から見た座標変換行列とすれば

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} = -\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad (3.36)$$

の関係にある. したがって, 相対変位は, 下記のように表すことができる.

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} + \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} = \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \tilde{\mathbf{u}}^{(l)} \quad (3.37)$$

次に付帯条件の処理を考える. 式(3.19)で示した付帯条件は, 全体座標系で表したものであった. これを, 式(3.36)を用い要素境界面に沿った局所座標系の成分に変換すると次のようになる.

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (3.38)$$

このとき, 式(3.20)は, 式(3.36)(3.38)の関係を用いて次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) d\Gamma \\ &= -\sum_{l=1}^2 \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \tilde{\mathbf{u}}^{(l)} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.39)$$

式(3.39)において, 式(3.37)の関係を用いるなら

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda_{\langle ab \rangle}^t \delta_{\langle ab \rangle} d\Gamma \quad (3.40)$$

となり, さらに, 式(3.26)の関係を代入すると以下のようになる.

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \delta_{\langle ab \rangle}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} d\Gamma \quad (3.41)$$

したがって, 式(3.21)は次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta \mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f}_\alpha d\Omega \right) - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \\ + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \delta_{\langle s \rangle}^t \cdot \mathbf{k}_{\langle s \rangle} \cdot \delta_{\langle s \rangle} d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

ただし、領域や境界を示す上付や下付の(e)や<s>は省略して示している。また、左辺第4項は、便宜上、領域の和の () 内に入れておく。これに式(3.2)(3.3)の関係を代入すれば、最終的に以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f}_\alpha d\Omega \right) - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{T} d\Gamma \\ + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \delta_{<s>}^t \mathbf{k}_{<s>} \delta_{<s>} d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

3. 8 空間に関する離散化方程式

空間に関する離散化方程式は、式(3.43)に対して、以下に示す変位場の関係を代入することによって得られる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (3.44)$$

また、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ についても、同様に、次のように表されるものとする。

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \delta \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (3.45)$$

いま、式(3.44)(3.45)を部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関して、簡単にまとめて次のように書く。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (3.46)$$

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (3.47)$$

それぞれの係数は以下のとおりである。

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]^t$$

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = [\delta \mathbf{d}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]^t$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}]$$

式(3.9)によれば、式(3.43)における左辺第3項は要素 e について次のように表すことができる。

$$-\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f}_\alpha d\Omega \right) = \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \rho^{(e)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega \right) \quad (3.48)$$

ここで、 $\rho^{(e)}$ は、この要素 e における材料の密度である。

これらを式(3.48)に代入すれば、以下のようになる。

$$-\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{(e)t} \mathbf{f}_\alpha^{(e)} d\Omega \right) = \sum_{e=1}^M \left(\left(\delta \mathbf{U}^{(e)} \right)^t \int_{\Omega^{(e)}} \rho \mathbf{N}^{(e)t} \mathbf{N}^{(e)} d\Omega \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} \right) \quad (3.49)$$

したがって、次式が得られる。

$$-\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{(e)t} \mathbf{f}_\alpha^{(e)} d\Omega \right) = \sum_{e=1}^M \left(\left(\delta \mathbf{U}^{(e)} \right)^t \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} \right) \quad (3.50)$$

ここで、 $M^{(e)}$ は質量行列と呼ばれ、次式で与えられる。

$$M^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \rho N^{(e)t} N^{(e)} d\Omega \quad (3.51)$$

すなわち、

$$M^{(e)} = \rho \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} ({}^t N_d^{(e)} N_d^{(e)}) & ({}^t N_d^{(e)} N_\varepsilon^{(e)}) \\ ({}^t N_\varepsilon^{(e)} N_d^{(e)}) & ({}^t N_\varepsilon^{(e)} N_\varepsilon^{(e)}) \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.52)$$

と表すことができる。

式 (3.46) より、以下の関係が得られる。

$$L u^{(e)} = L N^{(e)} U^{(e)} = B^{(e)} U^{(e)} \quad (3.53)$$

ここで、 $B^{(e)}$ は、以下の通りである。

$$B^{(e)} = L N^{(e)} \quad (3.54)$$

2次元における線形変位場の場合、以下のように表すことができる。

$$B^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

すなわち、 $B^{(e)} = [0, I]$ であり、 0 はすべての成分が0の行列、 I は単位行列を表している。同様に、

$$L \delta u^{(e)} = B^{(e)} \delta U^{(e)} \quad (3.55)$$

以上の関係を用いると、式(3.43)における左辺第1項は次のように表すことができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [L \delta u]^t D L u d\Omega = (\delta U^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t D^{(e)} B^{(e)} d\Omega U^{(e)} \quad (3.56)$$

いま、全要素における自由度を並べた1次元配列を U とすると、部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $U^{(e)}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{U} \quad (3.57)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(e)}$ は、全要素における自由度と着目要素における自由度を関係付ける行列である。

同様にして、仮想変位についても、

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta \mathbf{U} \quad (3.58)$$

とすると、式(3.56)は次のように整理することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta \mathbf{u}]^t \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U} \quad (3.59)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \quad (3.60)$$

また、式(3.43)の左辺第2項および第4項は、以下のように表すことができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{T} d\Gamma = (\delta \mathbf{U}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{T} d\Gamma \right) \quad (3.61)$$

式(3.60)は、式(3.58)の関係を用いると、次のように整理することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{T} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{P}^{(e)} \quad (3.62)$$

ここで、 $\mathbf{P}^{(e)}$ は以下の関係にある。

$$\mathbf{P}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\mathbf{P}_b^{(e)} + \mathbf{P}_t^{(e)} \right) \quad (3.63)$$

$$\text{(物体力)} \quad \mathbf{P}_b^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} d\Omega \quad (3.64)$$

$$\text{(表面力)} \quad \mathbf{P}_t^{(e)} = \int_{\Gamma_t} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{T} d\Gamma \quad (3.65)$$

一方、要素境界面に関する項を整理するにあたり、相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ を次のように表す。

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (3.66)$$

ここで, $\mathbf{B}_{\langle ab \rangle}$, $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は, 以下の通りである.

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}] \quad (3.67)$$

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t \quad (3.68)$$

ただし, 上付の(a), (b)は, 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ に関する量を表している. これらの関係を用いると, 式(3.43)の左辺第5項は変分を考慮して次のように表すことができる.

$$\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \delta^t \mathbf{k} \delta \, d\Gamma = \delta \mathbf{U}_{\langle ab \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \, d\Gamma \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (3.69)$$

いま, 式(3.60)と同様に, 全要素における自由度を並べた1次元配列を \mathbf{U} とすると, 要素境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に関する自由度 $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は, 以下のように関係付けられる.

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U} \quad (3.70)$$

ここで, $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$ は, 全要素における自由度と着目要素境界面に関する自由度を関係付ける行列である. 同様にして, 仮想変位についても,

$$\delta \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \delta \mathbf{U} \quad (3.71)$$

とする. これらの関係を用いると, 式(3.69)は一般式として次のように書くことができる.

$$\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \delta^t \mathbf{k} \delta \, d\Gamma = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \mathbf{U} \quad (3.72)$$

ここで, $\mathbf{K}_{\langle s \rangle}$ は以下のとおりである.

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \mathcal{M}_{\langle s \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \mathbf{B}_{\langle s \rangle}^t \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle s \rangle} \, d\Gamma \mathcal{M}_{\langle s \rangle} \quad (3.73)$$

以上より, 式(3.43)は以下のよう表すことができる.

$$\delta \mathbf{U}^t \sum_{e=1}^M \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \right) \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \quad (3.74)$$

式(3.74)の関係において、仮想変位 δU は任意であるため、最終的に以下の空間に関して離散化された運動方程式が得られる。

$$M\ddot{U} + KU = P \quad (3.75)$$

U は全自由度を並べたベクトルで、上付の $\ddot{\cdot}$ は時間に関する2階の微分、すなわち加速度を示している。ただし、 M, K および P は以下のとおりである。

$$M = \sum_{e=1}^M M^{(e)} \quad (3.76)$$

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{\langle s \rangle} \quad (3.77)$$

$$P = \sum_{e=1}^M P^{(e)} \quad (3.78)$$

3. 9 まとめ

本章では、運動方程式の定式化を示した。

3.2 節では、動的問題の離散化手法の概要について説明し、力学的境界条件と幾何学的境界条件を満たす弾性問題の支配方程式を示した。また動的問題については、加速度による慣性力を物体力として導入することで、静力学的に扱うことができるというダランベールの原理に基づき、運動中の釣合い方程式を示した。

3.3 節では、釣合い方程式に仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を乗じて領域 Ω について積分し、その式の左辺第 1 項にガウスの発散定理を適用し、仮想仕事式を導いた。仮想仕事式は、内力仮想仕事と外力仮想仕事が等しいことを表している。

3.4 節では、領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとしたとき、 $\Gamma^{(a)}$ 側の変位 $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ と $\Gamma^{(b)}$ 側の変位 $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は等しいという条件を Lagrange の未定乗数を用いて導入し、隣接する 2 つの要素境界辺の数を N としたハイブリッド型仮想仕事式を示した。

3.5 節では、部分領域毎に独立な変位場について示した。剛体変位と剛体回転とひずみによって、要素ごとに独立している線形変位場を仮定した HPM の考え方と、剛体変位と剛体回転のみを考慮する剛体変位場を仮定した RBSM の考え方を示した。

3.6 節では、3.4 節で用いられた Lagrange の未定乗数について説明した。Lagrange の未定乗数は、物理的には表面力を意味している。RBSM は、要素の変形を考慮するためのばね定数が要素境界面に導入しているが、HPM は、DDA と同様、要素内応力が考慮されているので、変位の連続性を確保するためのペナルティが導入されている。ただし、DDA が点接触としているのに対し、HPM は RBSM 同様、面接触としている。

3.7 節では、全体座標系から局所座標系への座標変換した相対変位を求め、全体座標系で表されていた付帯条件を、要素境界面に沿った局所座標系の成分に変換したハイブリッド型仮想仕事式を示した。

3.8 節では、離散化方程式の誘導を示した。各要素剛性と要素境界辺に関する付帯条件の関係を組み合わせた剛性行列に質量行列加えることで、空間に関して離散化された運動方程式を得ることができた。

第4章 接触と破壊の条件

4.1 はじめに

第3章では主に、要素毎に独立な変位場を用いて離散化方程式の誘導をした。しかし、全要素の挙動を追跡するためには、要素と境界（地面や壁）、または、要素同士の接触に対するアルゴリズムが重要である。

接触力を算定するにあたり、まずは、要素毎に働く作用力を求める必要がある。HPMにおける線形変位場では、剛体変位とひずみをパラメータとして扱っており、これをハイブリッド型の仮想仕事式に適用すると、剛体変位とひずみが連成した連立方程式が得られる。これを、剛体変位とひずみの方程式に分離すると、RBSMと同様の離散化方程式と剛体変位を用いたひずみの関係が得られる[41]-[43]。

こうした関係を利用すると、着目要素の周辺要素から、着目要素に働く要素間作用力を、要素毎に独立に求めることができる。4.2節では、この要素間作用力の求め方について述べる。要素間作用力は、着目した要素の近傍にある要素が接触している場合に発生する。すなわち、着目要素が境界や他の要素と接触しているか、否か、すなわち、接触判定を行う必要が生じる。ここで、DEMやDDAなど動的問題で先行している手法は、点接触としているため接触判定が容易であるが、RBSMは面接触をベースとしているので、接触判定や接触力の算定に工夫が必要となる。そこで4.3節では、線分交差判定から接触判断を行う手法を提示する。

4.4節では、すべりを表現するのに必要な破壊条件と摩擦特性について記述する。RBSMは要素境界面のエネルギーを表面力として評価しているため、摩擦力や粘着力を付加することは容易である。モールクーロンの破壊基準を与え、摩擦によるエネルギー損失として、せん断方向にスライダを設定する方法を示す。また、引張破壊時の表面力解放についても記述する。

最後に、4.5節において、本章全体を概括する。

4.2 要素間作用力

HPM を用いて空間方向に離散化された方程式を再掲すると以下のとおりである.

$$M\ddot{U} + KU = P \quad (4.1)$$

これを, \mathbf{d} と $\boldsymbol{\varepsilon}$ で整理し, 全体系で表すと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & M_{d\varepsilon} \\ M_{\varepsilon d} & M_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{d\varepsilon} \\ K_{\varepsilon d} & K_{\varepsilon\varepsilon} + D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_d \\ \mathbf{P}_\varepsilon \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

RBSM は, 剛体変位場を仮定し, 隣接する要素間に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを評価するので, 式(4.2)を剛体変位のみで表せば,

$$M_{dd}\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{P}_d - K_{dd}\mathbf{d} \quad (4.3)$$

となる. このとき, 質量行列 M_{dd} は,

$$M_{dd} = \rho \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

である. A は要素の面積, I_p は慣性モーメントを表す.

HPM における要素境界上の表面力は, 3 章でも述べたように,

$$\boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} \quad (4.5)$$

で表される. 2次元問題の場合, これは

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{n\langle ab \rangle} \\ \lambda_{t\langle ab \rangle} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{n\langle ab \rangle} \\ \delta_{t\langle ab \rangle} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

と表される. ここで, k はばね定数, $\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle}$ は領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の相対変位で, 平面応力状態の場合は, 以下のように定義されている.

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{E}{(1-\nu^2)(h_1+h_2)} \\ k_t &= \frac{E}{(1+\nu)(h_1+h_2)} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

E は弾性係数, ν はポアソン比, h_1, h_2 は, 図 3-6 に示すように, 各要素の図心から, 該当境界辺に下した垂線の高さである.

いま, 図 4-1 のように, 要素(1)とそれに隣接する要素(2)~(4)を例に式(4.3)を展開してみる. このとき, 着目要素(1)の境界辺に関する積分は(2)~(4)要素のみに関係し, その他の要素とは連立方程式上の関連性はない.

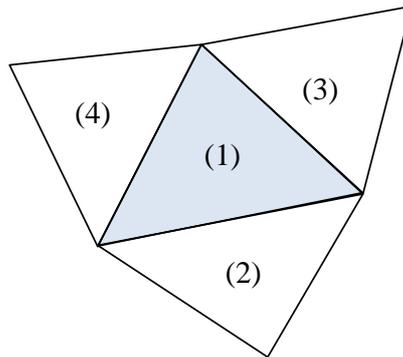


図 4-1 着目要素と隣接要素

この例に対する式の一部を示すと次のようになる.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & M^{(1)} & & & & \\ & & M^{(2)} & & & \\ & & & M^{(3)} & & \\ 0 & & & & M^{(4)} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \ddot{\mathbf{d}}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{d}}^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{d}}^{(3)} \\ \ddot{\mathbf{d}}^{(4)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \vdots \\ P_d^{(1)} \\ P_d^{(2)} \\ P_d^{(3)} \\ P_d^{(4)} \\ \vdots \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & 3k_{dd}^{(1,1)} & k_{dd}^{(1,2)} & k_{dd}^{(1,3)} & k_{dd}^{(1,4)} & 0 \\ & & k_{dd}^{(1,2)} & k_{dd}^{(2,2)} & & & \\ & & k_{dd}^{(1,3)} & & k_{dd}^{(3,3)} & & \\ & & k_{dd}^{(1,4)} & & & k_{dd}^{(4,4)} & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \mathbf{d}^{(2)} \\ \mathbf{d}^{(3)} \\ \mathbf{d}^{(4)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

ここで $M^{(e)}$ は要素毎に独立であるため, (1)番目の要素に着目すると, 全体系において, 以下の関係が得られる.

$$M^{(1)} \ddot{\mathbf{d}}^{(1)} = P_d^{(1)} - \left(3k_{dd}^{(1,1)} \mathbf{d}^{(1)} + k_{dd}^{(1,2)} \mathbf{d}^{(2)} + k_{dd}^{(1,3)} \mathbf{d}^{(3)} + k_{dd}^{(1,4)} \mathbf{d}^{(4)} \right) \tag{4.9}$$

式(4.9)の関係は, 運動方程式が要素単位で計算できることを意味している.

また、右辺の () 内は、要素(1)の境界 $\Gamma^{(1)}$ 周辺に作用している表面力の合計であり、図 4-2 を参照して以下のように表される。

$$M^{(1)} \ddot{\mathbf{d}}^{(1)} = \mathbf{P}_d^{(1)} - \Sigma \mathbf{F}^{(1)} \quad (4.10)$$

ここで、

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{N}_d^{(1)} \mathbf{t}^{(1)} \quad (4.11)$$

である。

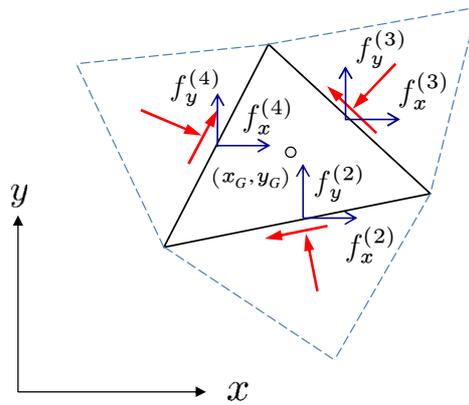


図 4-2 表面力の総和

こうして、式(4.10)を一般式として書くと次のようになり、表面力から要素間作用力が得られる。

$$M^{(e)} \ddot{\mathbf{d}}^{(e)} = \mathbf{P}_d^{(e)} - \oint_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{t}^{(e)} d\Gamma \quad (4.12)$$

いま、式(4.2)を用い、式(4.12)を成分で表すと、表面力は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} &= \sum_{e=1}^3 f_x^{(e)} / m^{(e)} \\ \ddot{\mathbf{v}}^{(e)} &= \sum_{e=1}^3 f_y^{(e)} / m^{(e)} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}^{(e)} &= \sum_{e=1}^3 -(y - y_G) f_x^{(e)} + (x - x_G) f_y^{(e)} / I^{(e)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

一方、DEM は点接触による接点力の合計で要素毎に運動方程式を解くので、図 4-3 を参照して以下のように表される。

$$M^{(e)} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} = \mathbf{P}_d^{(e)} - \sum_{s=i}^n \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (4.14)$$

ここで、RBSM と DEM の違いは表面力か、接点力かの違いのみとなるので、流動解析における RBSM から DEM への展開も可能であることを示している。

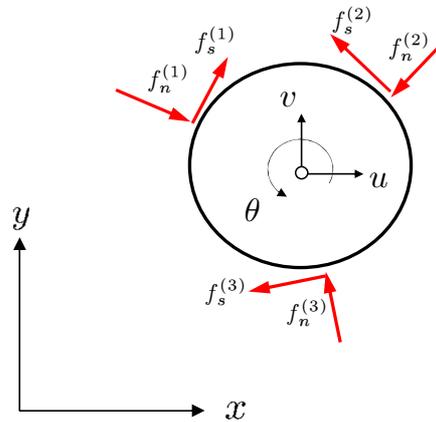


図 4-3 接点力の総和

式(4.13)は表面力が与えられれば、要素毎加速度が求められることを意味しているが、この考え方は、DEM で用いられている考え方と同じである。よって、第 5 章で説明する時間積分において DEM 的アプローチを用いれば、不連続な要素運動を表現することができる。一方、式(4.12)の右辺第 2 項は、静的な解析で用いられている表面力の考え方（理論）を、そのまま陽解法においても利用可能であるため、静的から動的への展開も可能となる。こうして統一した定式化によるマルチステージ対応を可能としている。

4.3 接触判定と接触力

要素運動により，境界や別の要素と衝突する場合，接触有無の判定や接触力を算定しなければならない．DEM や DDA の接触機構は点接触であり，接触力を求めるにあたり，様々な近似方法が提案されているが，HPM や RBSM は面接触としていることから，接触判定には工夫が必要である．本研究では，線分交差判定から接触判断を行う手法を適用する．

(境界－ブロック)

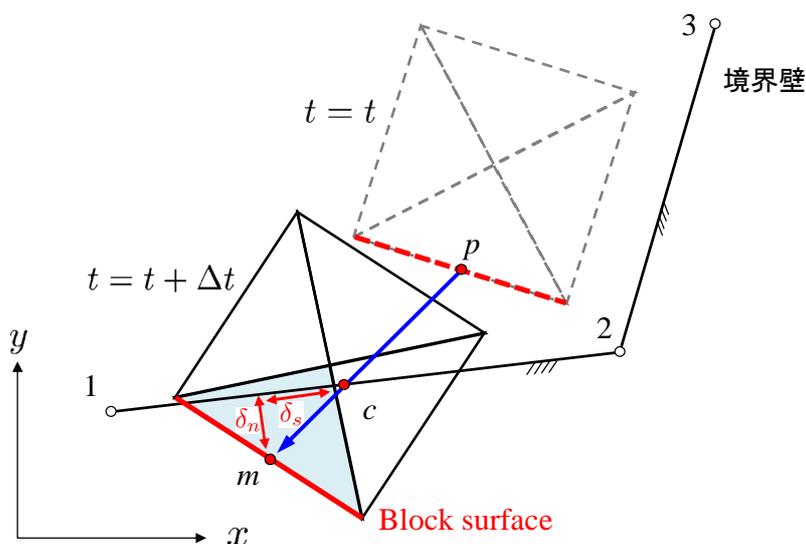


図 4-4 境界との面接触

いま，図 4-4 のように，ブロックが境界壁に接触する場合を考える．交差判定で用いる点は，境界線上の点 1 と点 2，そして，衝突するブロックの境界面上の点 p とその位置更新後の点 m である．これらの点と点を結び，線分 12 に対して，線分 pm を構成する点 p と m が，両側に存在するときの交点 c を接触点として処理する．それぞれの点が直線に対して，どちら側にあるかは，図 4-5 を参照して，以下の方程式を用いる．

$$\left. \begin{aligned} t_p &= (x_{b_1} - x_{b_2})(y_p - y_{b_1}) - (y_{b_1} - y_{b_2})(x_p - x_{b_1}) \\ t_m &= (x_{b_1} - x_{b_2})(y_m - y_{b_1}) - (y_{b_1} - y_{b_2})(x_m - x_{b_1}) \\ t_{b_1} &= (x_p - x_m)(y_{b_1} - y_p) - (y_p - y_m)(x_{b_1} - x_p) \\ t_{b_2} &= (x_p - x_m)(y_{b_2} - y_p) - (y_p - y_m)(x_{b_2} - x_p) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

ここで、以下の2つの条件

$$\left. \begin{array}{l} t_p \cdot t_m < 0 \\ t_{b_1} \cdot t_{b_2} < 0 \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

を満たす時は、接触状態にある。

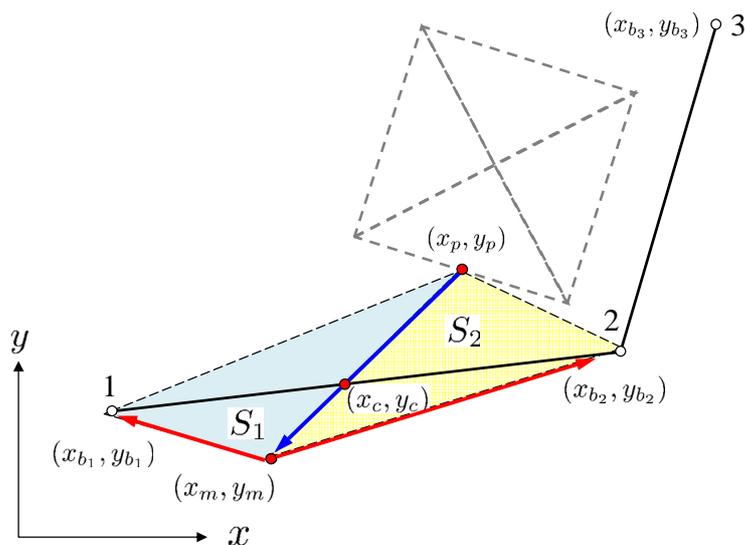


図 4-5 交点座標

交差座標 (x_c, y_c) は、各点から三角形 S_1 と S_2 をつくり、その面積比から、

$$\left. \begin{array}{l} x_c = x_{b_1} + (x_{b_2} - x_{b_1}) \cdot \frac{S_1}{S_1 + S_2} \\ y_c = y_{b_1} + (y_{b_2} - y_{b_1}) \cdot \frac{S_1}{S_1 + S_2} \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = 0.5 \times \{ (x_p - x_m)(y_{b_1} - y_m) - (y_p - y_m)(x_{b_1} - x_m) \} \\ S_2 = -0.5 \times \{ (x_p - x_m)(y_{b_2} - y_m) - (y_p - y_m)(x_{b_2} - x_m) \} \end{array} \right] \quad (4.18)$$

として、算定する。

RBSM の場合、単位辺長さ当たりの接触力は、式(4.6)で述べたように、交点座標からの貫入量に、ばね定数を乗じることで、以下のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} f_{bn} \\ f_{bt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

この表面力は、単位長さあたりの値であるから、要素重心に作用する外力は、式(4.12)右辺第2項のように周辺積分を行って求めることができる。

なお、相対変位は、

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \hat{\mathbf{u}}^{(a)} + \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \hat{\mathbf{u}}^{(b)} = \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \hat{\mathbf{u}}^{(l)} \quad (4.20)$$

となる。式(4.20)において、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ は、境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの要素から見た座標変換行列であり、

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = -\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad (4.21)$$

となる関係にある。2次元問題の場合、部分領域 $\Omega^{(l)}$ の境界 $\Gamma_{\langle s \rangle}$ に関して、これは以下のように表される。

$$\mathbf{R}_{\langle s \rangle}^{(l)} = \begin{bmatrix} l_{\langle s \rangle}^{(l)} & m_{\langle s \rangle}^{(l)} \\ -m_{\langle s \rangle}^{(l)} & l_{\langle s \rangle}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ただし、 $l_{\langle s \rangle}^{(l)}$ 、 $m_{\langle s \rangle}^{(l)}$ は、着目した境界に対する方向余弦を表している。

ブロック同士が衝突する場合も、考え方は境界壁の場合と何ら変わりはない。図4-6に示すように、ブロックAから見たブロックBの表面、ブロックBから見たブロックAの表面をそれぞれの境界壁とみなして、式(4.15)～(4.19)を適用する。

図4.4および図4.6に示す例では、要素境界辺の midpoint で接触を判定していた。ある程度要素を細分すれば、この接触判定でも精度は落ちるが利用可能である。しかし、要素の回転が伴う問題では、接触判定を1点で行うと精度が極端に低下することも考えられる。このような場合は、図4-7で示すように、接触面上に複数の積分点を配置することにより、対応することが可能である。RBSMでは、複数の分布ばねを配置することで、面に対する接触圧を力のつり合いを考慮して解析することができる[62]。

分布ばねを用いた解析例による評価については、第6章で示す。

(ブロック-ブロック)

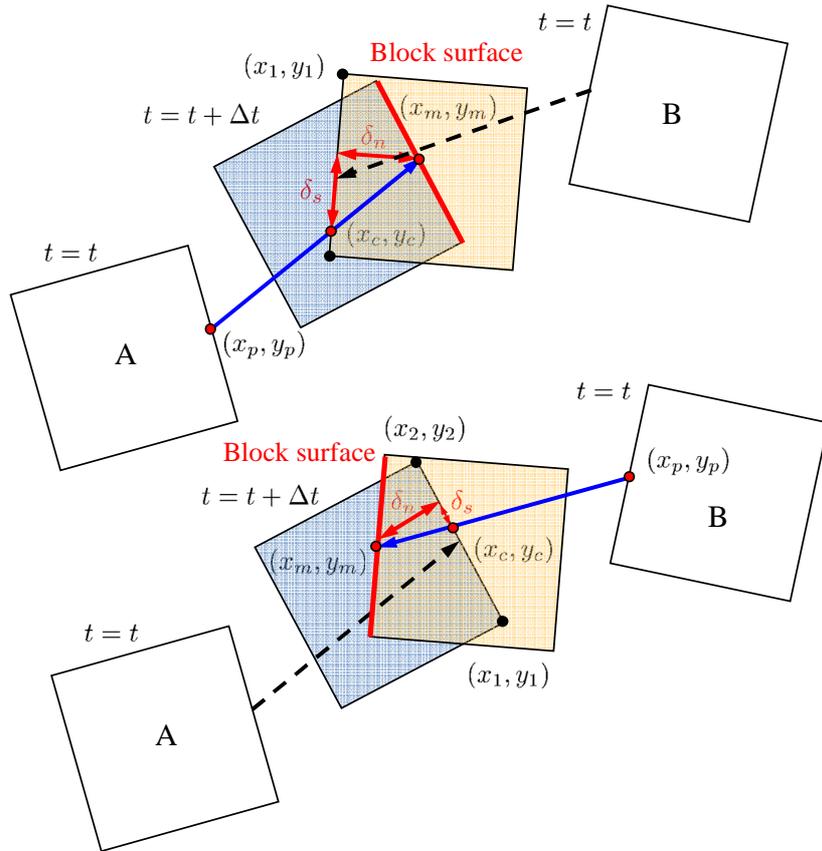


図 4-6 ブロックとブロックの面接触

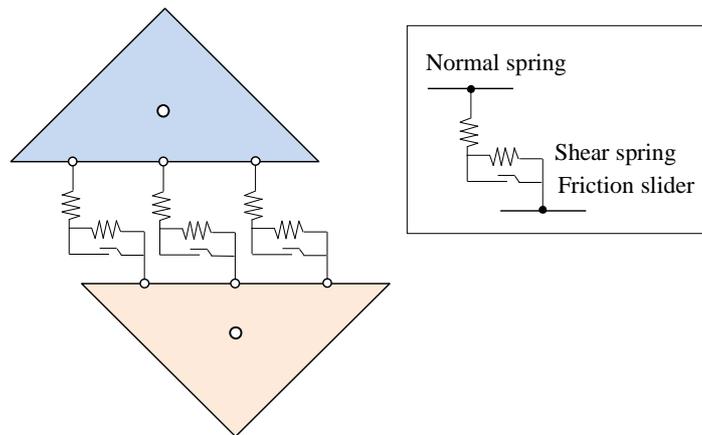


図 4-7 分布ばねの配置

4.4 破壊基準と摩擦条件

RBSM は要素境界の表面力の仕事を用いてエネルギー評価するため，摩擦力や粘着力を付加することは容易である．

摩擦条件としては，図 4-8 で示すように，モールクーロンの破壊基準を与える．

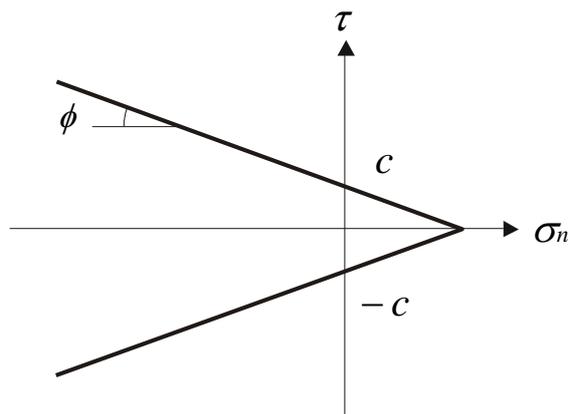


図 4-8 モールクーロンの破壊基準

モールクーロンの破壊基準を用いた場合の降伏関数 f は

$$f = \tau^2 - (c - \sigma_n \tan \phi)^2 = 0 \quad (4.23)$$

となる． c は粘着力， ϕ は内部摩擦角である．

摩擦によるエネルギー損失として，せん断方向にスライダを設定する．ブロック表面に作用するせん断力が降伏関数 f を超える場合，スライダが摩擦抵抗力として作用し，小さい場合はせん断ばねにより相対変位が固定される．すなわち，

$$\tau < \sigma_n \tan \phi + c \quad (\text{せん断ばね} = ks) \quad (4.24)$$

$$\tau \geq \sigma_n \tan \phi + c \quad (\text{せん断ばね} = 0) \quad (4.25)$$

となる．こうした計算による結果を，荷重に重ね合わせることで，すべりが表現されるようになる．

一方，引張破壊については，図 4-9 で示すように，引張表面力が引張強度 f_t を超えた時点で，その境界面に保持していた表面力を解放し，以後，ばね定数をゼロとして表面力の伝達が行われないようにする．

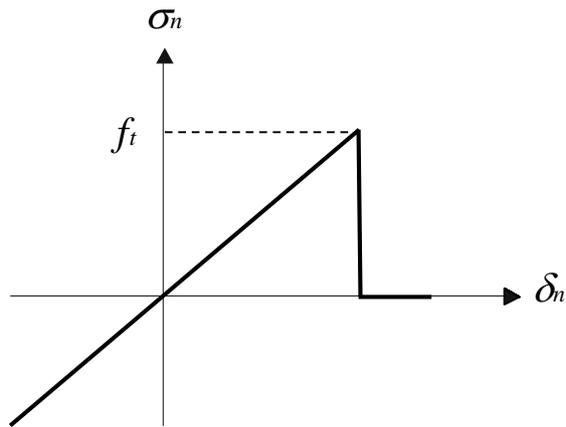


図 4-9 引張破壊基準

すなわち，次式に示す構成行列を用いる．

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

表面力の解放をひび割れ幅に応じて順次行うこともできるが，本研究では単純に全解放とした．本論文で示す斜面崩壊の例題ではこうした条件で，変位の不連続性を表現している．

4.5 まとめ

本章では、各要素の接触と破壊の条件について記述した。

4.2 節では、要素間作用力の定式化を示した。要素毎に独立した作用力を算出するにあたり、修正 RBSM の考え方を応用した。まず、HPM の離散化された運動方程式のひずみの影響を無視することで、RBSM と同じ剛体変位のみ運動方程式を誘導した。次に、着目要素と隣接要素の連立方程式の関係から、要素毎に独立した応力を表面力により求められることを示した。そして、隣接要素と接続状態にある場合は、それぞれの要素の表面力から求められる接点力の総和により要素間作用力を算出した。

4.3 節では、要素が運動により、境界や別の要素に衝突する場合の、接触判定と接触力の算出法を定式化した。RBSM は DEM や DDA など採用されている点接触とは異なり、面接触をベースとしているので、接触判定としては、線分交差判定による方法を適用した。貫入量を求めるための基準となる交点座標については、線分交差判定で用いた座標と三角形の面積比から算出する方法を示した。要素同士が衝突する場合も、それぞれの要素の表面を境界壁とみなして、計算すれば同じである。こうして得られた貫入量にばね定数を乗じて単位辺長さ当たりの接触力を算出した。

4.4 節では、すべりや破壊を表現するための破壊条件と摩擦特性について記述した。RBSM は要素境界の表面力の仕事を用いてエネルギー評価するため、摩擦力や粘着力を付加することが容易である。本論文では、モールクーロンの破壊基準を示し、摩擦によるエネルギー損失として、せん断方向にスライダを設定し、要素表面に作用するせん断力が降伏関数を超える場合、すべり出すがスライダが摩擦抵抗力として作用することを示した。一方、降伏関数より小さい場合はせん断ばねにより相対変位が固定されることを示した。引張破壊については、表面力が引張強度を超えた時に全解放することを示した。

第5章 動的問題の時間積分法

5.1 はじめに

FEMによる動的問題の時間積分法としては、Newmarkの β 法やWilsonの θ 法が広く用いられている。これらの方法は、連立方程式を解いて解を求める陰解法に基づいている。HPMも、不連続 Galerkin 法における IP 有限要素法[63]と同様、ペナルティ関数を用いているため、本来は動的問題の時間積分法として、陰解法が適していると思われる[64]。これは、DDAと同じ考えに基づくものである。

一方、中心差分に代表される時間積分法により、連立方程式を解かず解を逐次的に求める陽解法[65]がある。要素間の接触力の計算が占める割合の多い DEM では、蛙跳び法 (Leap-frog 法) を用いて要素運動を表現している。近年、陽解法として、FDEM[23]-[26]などの混合要素モデルが着目されており、需要が増加している。

そこで本章では、ハイブリッド型仮想仕事の原理に基づく離散化手法の動的問題に対する時間積分の特性を把握する。5.2 節では、Newmark の β 法による陰解法を定式化する。続いて、5.3 節では、中央差分法による陽解法を定式化し、5.4 節では、離散体としての取り扱いとして DEM 的アプローチを示す。

5.5 節では、陽解法で考慮すべき安定条件について整理する。5.6 節では、動的陽解法プログラムの全体構造を把握するため解析フローを示し、5.7 節において、数値計算例により、陰解法と陽解法を比較して、解の安定性や精度からその適用性を検証する。そして最後に、5.8 節において、本章全体を概括する。

5.2 陰解法の定式化

3章で述べた、空間に関して離散化された運動方程式を再掲する。

$$M\ddot{U} + KU = P \quad (5.1)$$

式(5.1)は、剛体変位とひずみに関する変位ベクトル U に関する2階の常微分方程式とみなすことができ、初期条件を与えることで初期値問題を構成する。このような初期値問題を解くために利用されている解析法として、直積積分法やモード解析法、周波数応答解析、応答スペクトル法などがあるが、非線形問題などには直接積分法が適している。

直接積分法は、時間に関する離散化に差分法を適用し、時間ステップごとに求めた解を逐次更新して計算を進める手法である。Newmark の β 法は直接積分法のひとつである。いま、現在の時刻 t の時間ステップを n とし、その時刻から Δt 時間後の時刻に対応する時間ステップを、 $n+1$ と表せば、現在の時刻における変位 U^{n+1} と速度 \dot{U}^{n+1} は次のように仮定できる。

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}^n + \Delta t^2 \beta \ddot{U}^{n+1} \quad (5.2)$$

$$\dot{U}^{n+1} = \dot{U}^n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{U}^n + \Delta t \gamma \ddot{U}^{n+1} \quad (5.3)$$

1次の変位場を

$$U = [d, \varepsilon]^t$$

とした際の変位と速度およびひずみは、それぞれ次式のように表せる。

(変位)

$$d^{n+1} = d^n + \Delta t \dot{d}^n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}^n + \Delta t^2 \beta \ddot{d}^{n+1} \quad (5.4)$$

(速度)

$$\dot{d}^{n+1} = \dot{d}^n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{d}^n + \Delta t \gamma \ddot{d}^{n+1} \quad (5.5)$$

(ひずみ)

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + \Delta t \dot{\varepsilon}^n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\varepsilon}^n + \Delta t^2 \beta \ddot{\varepsilon}^{n+1} \quad (5.6)$$

ここで、 γ と β はパラメータである。通常、 $\gamma = 1/2$ としており、式(5.3)は次のような差分式になる。

$$\dot{U}^{n+1} = \dot{U}^n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{U}^n + \ddot{U}^{n+1}) \quad (5.7)$$

この式は、数値積分における台形公式となっている。一方、 β の値には、

$$0 \leq \beta \leq \frac{1}{2} \quad (5.8)$$

なる制約があるが、その選び方には次のような考え方がある。

- $\beta = 0$ の場合： 式(5.2)は次のようになる。

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}^n \quad (5.9)$$

この式は無条件安定とはならず、一般にはあまり使われない。

- $\beta = 1/4$ の場合： 式(5.2)は次のようになる。

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\ddot{U}^n + \ddot{U}^{n+1}}{2} \right) \quad (5.10)$$

この式を用いる方法は平均加速度法と呼ばれており、加速度は Δt 時間の間は一定とみなしている。Newmarkの β 法は本来、無条件安定な積分法としてこの方法を提案している。

- $\beta = 1/6$ の場合： 式(5.2)は次のようになる。

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{U}^{n+1} \quad (5.11)$$

Newmarkの β 法において、 $\gamma = 1/2, \beta = 1/6$ は最も一般的な選択であり、この場合は線形化速度法と呼ばれている。しかし、平均加速度法と異なり、無条件安定とはならない。

(1) 加速度を未知数とする場合

式(5.2), (5.3)を式(5.1)に適用すれば, 次式を得る.

$$(M + \beta \Delta t^2 K) \ddot{U}^{n+1} = P^{n+1} - K \left((\gamma - \beta) \Delta t^2 \ddot{U}^n + \Delta t \dot{U}^n + U^n \right) \quad (5.12)$$

まず, この代数方程式を解いて時間ステップ $n+1$ における加速度を求め, 式(5.2), (5.3)により変位と速度を求める.

(2) 変位を未知数とする場合

変位を求める公式を導くために, 式(5.2)(5.3)を次のように変形する.

$$\ddot{U}^{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (U^{n+1} - U^n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}^n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{U}^n \quad (5.13)$$

$$\dot{U}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (U^{n+1} - U^n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{U}^n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{U}^n \quad (5.14)$$

これらを式(5.1)に用いれば, 以下のような時間ステップごとの離散化方程式が得られる. ここで, 上付の \cdot は1階微分, すなわち, 速度を表している. 上付の $\ddot{\cdot}$ は時間に関する2階の微分, すなわち加速度を示している. 次式を解くことによって, 変位を求めることができる. そして, 式(5.13)(5.14)の関係から, 加速度と速度を計算することができる.

$$\left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} M + K \right) U^{n+1} = P^{n+1} + M \left(\left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{U}^n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}^n + \frac{1}{\beta \Delta t^2} U^n \right) \quad (5.15)$$

5.3 陽解法の定式化

中心差分法に代表される陽解法を用いた動的問題解析について説明を行う。

陽解法は、時刻 t の運動方程式をもとに、時刻 $t + \Delta t$ の解を近似的に求める方法で、この方法では連立方程式を解く必要がない。

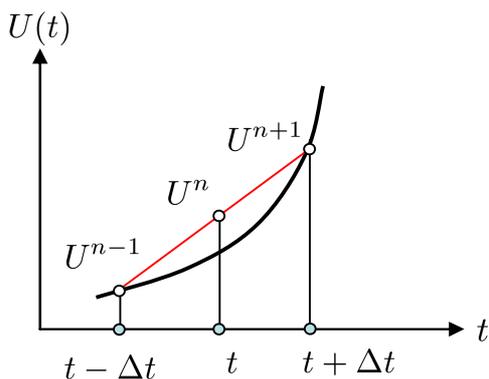


図 5-1 中央差分

図5-1のような中央差分にもとづく方法では、時刻 $t + \Delta t$ および $t - \Delta t$ での変位を時刻 t でのテイラー展開により次のように表すことができる。

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{U}^n \dots \quad (5.16)$$

$$U^{n-1} = U^n - \Delta t \dot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{U}^n \dots \quad (5.17)$$

Δt^2 の項までを考慮して、上式の差および和をとると次式が得られる。

$$\dot{U}^n = \frac{1}{2\Delta t} (U^{n+1} - U^{n-1}) \quad (5.18)$$

$$\ddot{U}^n = \frac{1}{\Delta t^2} (U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) \quad (5.19)$$

運動方程式(5.1)を時刻 n により次のように表す。

$$M\ddot{U}^n + KU^n = P^n \quad (5.20)$$

いま、式(5.20)を次のように書き換える.

$$M\ddot{U}^n = \tilde{P}^n \quad (5.21)$$

ここで、 F^n および \tilde{P}^n は以下の通りである.

$$F^n = KU^n \quad (5.22)$$

$$\tilde{P}^n = P^n - F^n \quad (5.23)$$

式(5.18)(5.19)を式(5.21)に代入して整理すると、最終的に次式を得ることができる.

$$U^{n+1} = \Delta t^2 M^{-1} \tilde{P}^n + 2U^n - U^{n-1} \quad (5.24)$$

式(5.24)を解くことによって、変位を求めることができる. そして、式(5.18)(5.19)の関係から、加速度と速度を計算することができる.

FEMなど通常の陽解法では、質量行列 M は集中質量行列が用いられるが、RBSMは、式(4.2)の関係から質量行列が対角成分のみとなるため、式(5.24)の計算は要素単位に行うことができ、完全に陽に計算を進められる.

5.4 離散体としての取り扱い

中央差分法と異なる加速度を未知数とした時間積分のアプローチを示す，図 5-2 に，4 章で述べた，表面力の総和，及びその加速度成分について再掲する．

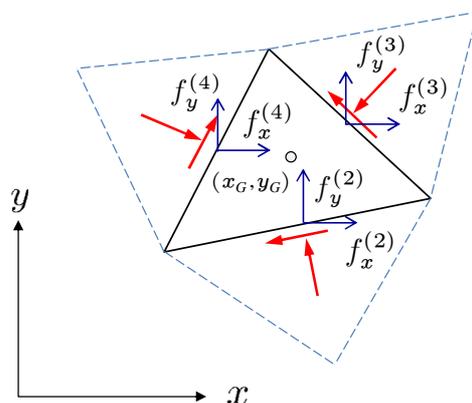


図 5-2 表面力の総和

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}^{(e)} &= \sum_{e=1}^3 f_x^{(e)} / m^{(e)} \\ \ddot{\mathbf{v}}^{(e)} &= \sum_{e=1}^3 f_y^{(e)} / m^{(e)} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}^{(e)} &= \sum_{e=1}^3 -(y - y_G) f_x^{(e)} + (x - x_G) f_y^{(e)} / I^{(e)}\end{aligned}\tag{5.25}$$

これを，

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^n\tag{5.26}$$

と整理し，時間増分 Δt で積分すると，

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \dot{\mathbf{U}}^n + \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \Delta t\tag{5.27}$$

と変位速度が求まる．さらに，時間増分 Δt で積分すると，

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \dot{\mathbf{U}}^{n+1} \Delta t\tag{5.28}$$

となり，変位量が求まる．ここで得られた変位量を，時刻 t から，時刻 $t + \Delta t$ の変位増分として，

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (5.29)$$

とし、式(5.25)～(5.28)を繰り返し行うことで、要素全体の運動を算出することができる。こうしたアプローチは、蛙跳び法とも呼ばれ、DEM で用いられている。

5.5 安定条件

陰解法における平均加速度法は，時間刻みの長さに関係なく有界な解に導くことができる無条件安定手法である．一方，中央差分法や線形加速度法は，増分時間 Δt を十分小さくしなければならない条件付安定手法である．

陽解法における式(5.24)は， $n-1$ と n の値から外そうによって $n+1$ の値を評価しているの
で， Δt を十分小さくとらなければならない，すなわち安定限界より小さな値としなければ解の
安定性が保証されない．

中心差分法の安定限界は，

$$\Delta t = \frac{T_n}{\pi} \tag{5.30}$$

とされる． T_n は構造力学での最小固有周期を表す．

一方，線形加速度法は，

$$\Delta t = \sqrt{3} \left(\frac{T_n}{\pi} \right) \tag{5.31}$$

とされる．つまりこのことは，中心差分法は線形加速度法に比べ $1/\sqrt{3}$ ほど Δt を小さく
する必要を示している．

また，衝撃荷重がかかる問題において陽解法を適用する場合，時間積分を安定に進めるため
には，時間増分は下式(5.32)の条件満たさなければならない．

$$\Delta t < \min \left(\frac{h}{c} \right) \tag{5.32}$$

ここに， h は要素長， c は次式に定義される弾性波速度である．

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{5.33}$$

ここに， ρ は密度， E は弾性係数を示す．

式(5.32)に式(5.33)を代入すると，次式のように表すことができる．

$$\Delta t < \min \left(h \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right) \quad (5.34)$$

このように、1ステップにおいて弾性波速度が最小サイズの要素を伝播する時間よりも短い時間増分を決定しなければ安定しないということは、弾性波が最小サイズの要素を伝播する時間よりも短い時間増分 Δt を使わなければならないことを意味している。こうした安定条件は、クーランの条件(Courant's condition)と呼ばれている。DDA や HPM は弾性係数にペナルティ関数を乗じるため、時間増分 Δt が極めて細かくなる。よって、陰解法が適しているとされている。一方、RBSM は DEM 同様、こうした時間刻みの影響を受けにくいいため、安定条件の面から考えて、陽解法が適している。

5.6 解析全体のフロー

動的陽解法のプログラムは、時間ステップにより要素の位置を移動し、時間刻み Δt に対して、繰り返し計算を行う。図5-3は、プログラム全体構造を把握するための解析フローを示したものである。

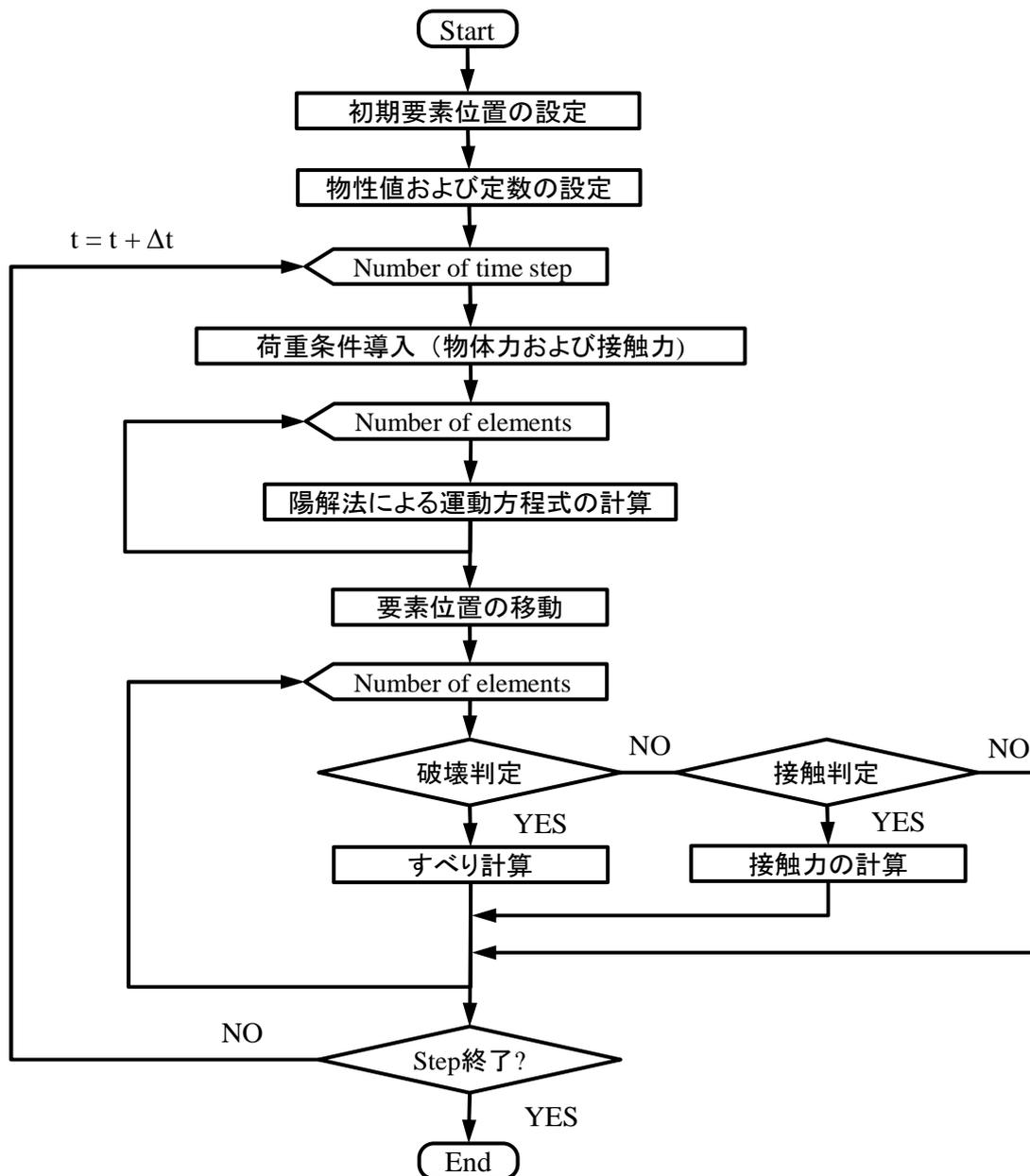


図5-3 解析のアルゴリズム

解析の流れとして、はじめに要素の形状や座標などの初期要素位置を設定し、要素の物性値や拘束条件、時間刻み、ばね定数、繰り返し計算回数などの計算条件を入力する。

次に、荷重条件として、物体力その他、衝撃荷重や一定荷重などの外力と要素作用力を組み込み、陽解法による運動方程式を要素単位に行い、要素位置を更新する。その際、まず要素の接触面に対して破壊判定を行い、破壊基準を上回っている場合は、すべり計算を行い、要素位置を更新する。また要素が接触（貫入）状態にあるかどうかについて、線分交差により判定し、接触状態にある場合は、貫入量にばね定数を乗じて接触力の計算を行い、要素位置を更新する。

こうした、一連の手続きを、繰り返し行い、設定した計算回数まで達したら終了する。

5.7 陰解法と陽解法の比較

ハイブリッド型仮想仕事の原理に基づく RBSM や HPM の時間積分の影響を理解するため、図 5-4 に示す幅 100mm、高さ 200mm の積層ブロックの 2 次元解析もとに比較を行う。材料定数として、弾性係数 5127N/mm^2 、ポアソン比 $\nu=0.112$ 、密度 1850kg/m^3 とする。荷重条件はブロックの左側上端に 1.0N の力がかかるものとする。本解析例では、陽解法と陰解法をそれぞれ適用し、解の精度と安定性を評価する。

陰解法による時間積分には、Newmark の β 法を用い、 $\gamma=1/2$ 、 $\beta=1/4$ とし、増分時間は $\Delta t=5.0 \times 10^{-5}$ sec とする。陽解法による時間積分には、中央差分を用い、クーラン条件を満たす増分時間として $\Delta t=5.0 \times 10^{-8}$ sec を設定する。荷重の作用状態は、図 5-5 に示すとおり一定荷重とする。

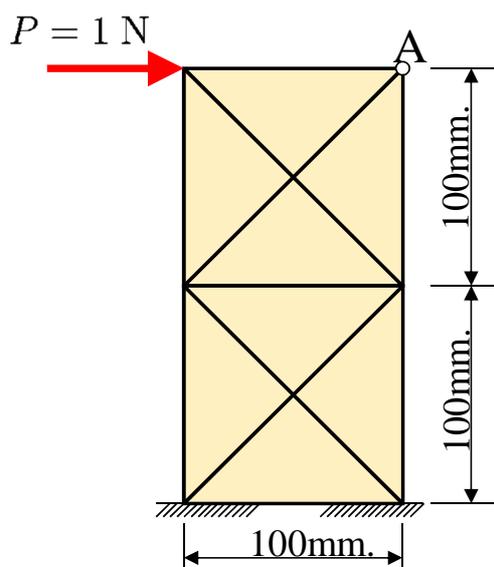


図5-4 解析モデル・積荷条件

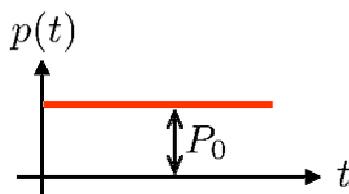


図5-5 荷重状態・一定荷重

図5-6は、一定荷重が作用するブロックの応答変位の図である。横軸は時間、縦軸は変位を表している。赤点線が陽解法（Explicit）による結果で、青実線が陰解法（Implicit）による結果である。陽解法、陰解法の変位解は、ほぼ一致する結果を示した。

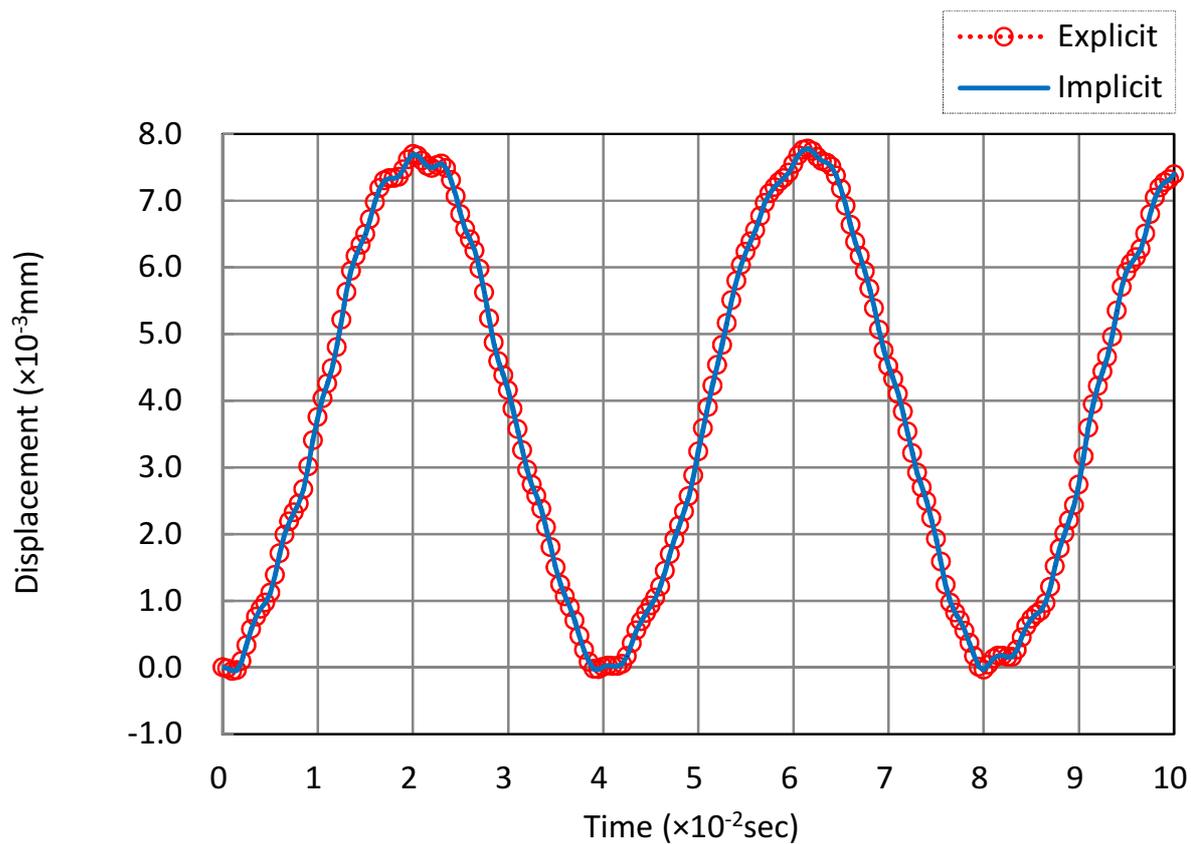


図5-6 一定荷重が作用するブロックの応答変位（A点）

図 5-7 は、一定荷重が作用するブロックの速度応答の図である。横軸は時間、縦軸は速度を表している。赤点線が陽解法による結果で、青実線が陰解法による結果である。陽解法、陰解法の速度解も変位同様、ほぼ一致する結果を示した。

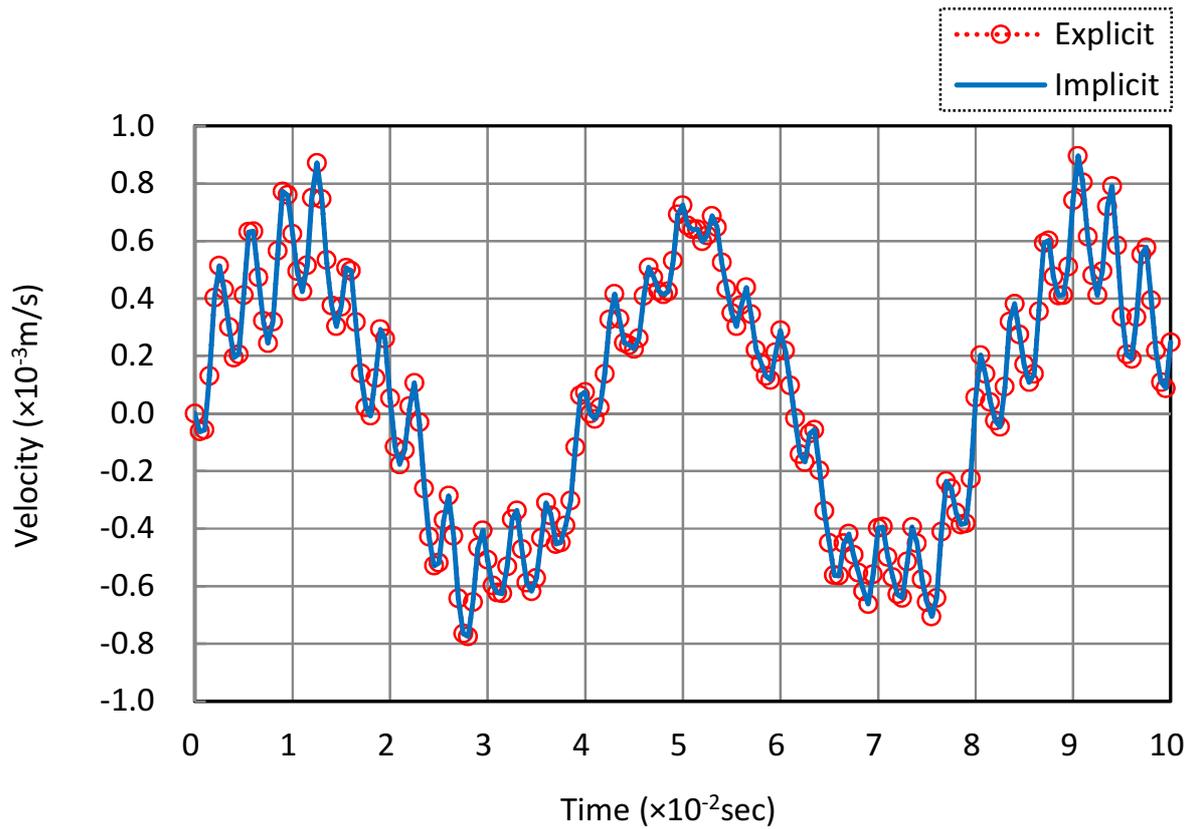


図5-7 一定荷重が作用するブロックの速度応答 (A点)

図 5-8 は、一定荷重が作用するブロックの加速度応答の図である。横軸は時間、縦軸は加速度を表している。赤点線が陽解法による結果で、青実線が陰解法による結果である。陽解法、陰解法の加速度は変位、速度とは異なり、誤差が生じる結果となった。

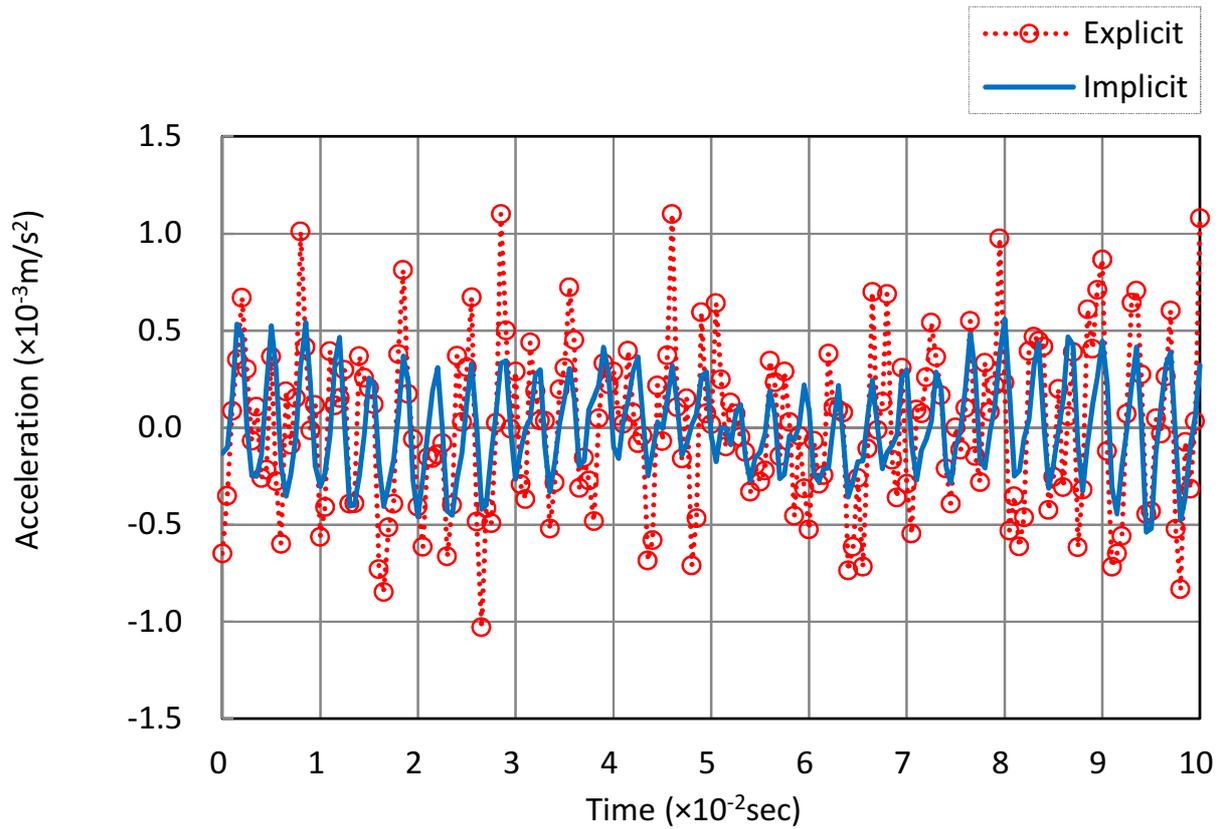


図5-8 一定荷重が作用するブロックの加速度応答 (A点)

加速度応答に関して陽解法と陰解法の解に誤差が生じたことを受け、その要因を分析した。図 5-8 を眺めると、陽解法の振幅に対して陰解法の振幅は小さい値を示していることに気づく。陽解法の増分時間は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8} \text{ sec}$ とクーラン条件の関係から陰解法の増分時間 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5} \text{ sec}$ と比べ、かなり小さな値で設定されていることが影響したと考えられる。よって、陰解法の時間増分を (1) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5} \text{ sec}$ から (4) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8} \text{ sec}$ へと徐々に小さな値を設定してその影響を確認ことにした。

図 5-9 はその結果を示しているが、(1) から (4) へと増分時間 Δt が小さくなるごとに振幅に影響が見られ、陽解法と同じ (4) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8}$ では、大きな振幅がみられるようになった。

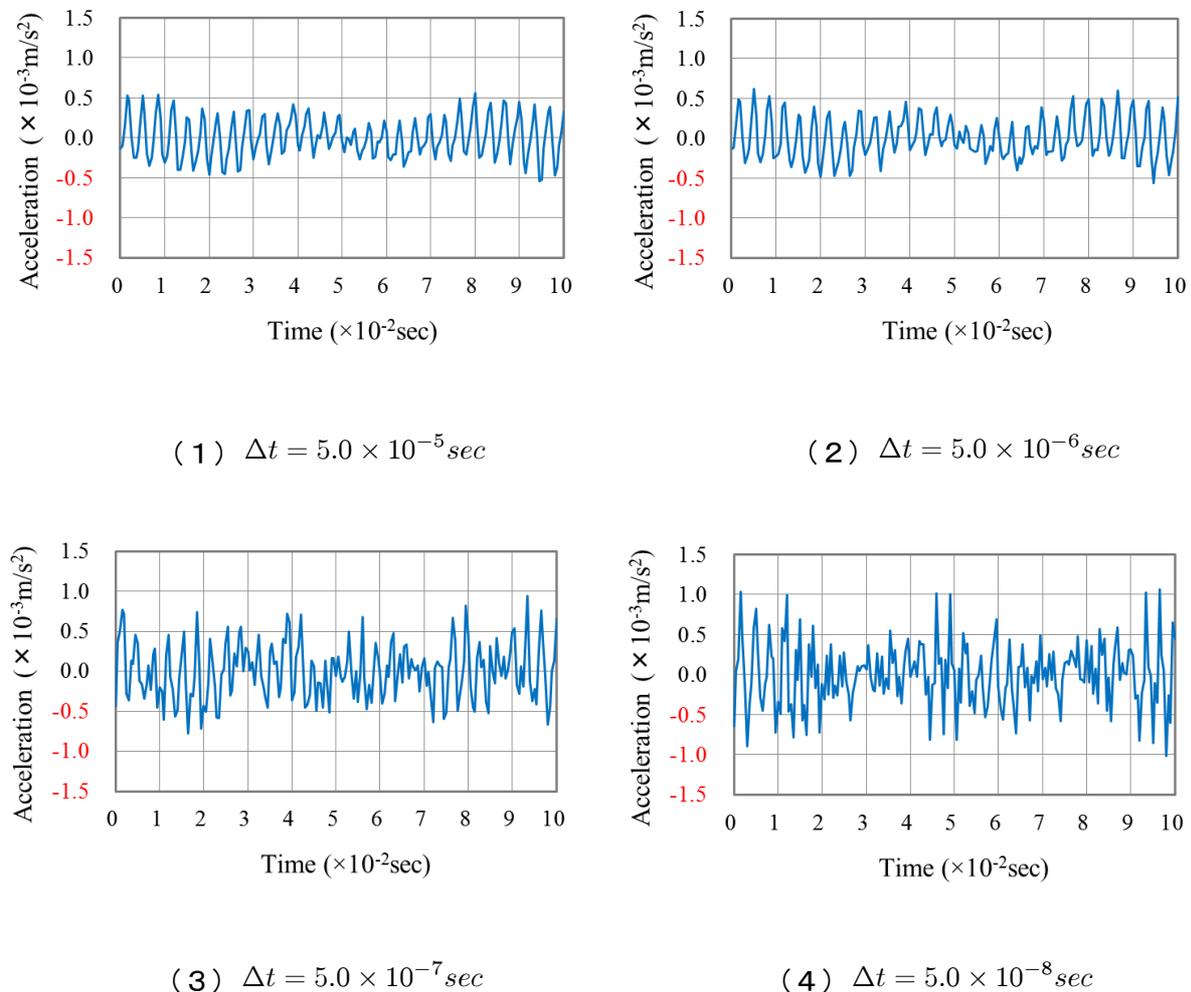


図5-9 陰解法による増分時間 Δt の振幅へ影響

図 5-10 に、(4) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8}$ で求めた陰解法の解を、一定荷重が作用するブロックの加速度応答の図に挿入する. その結果、位相にずれが生じているが、陽解法、陰解法の加速度の振幅はほぼ類似の結果となっていることが確認された.

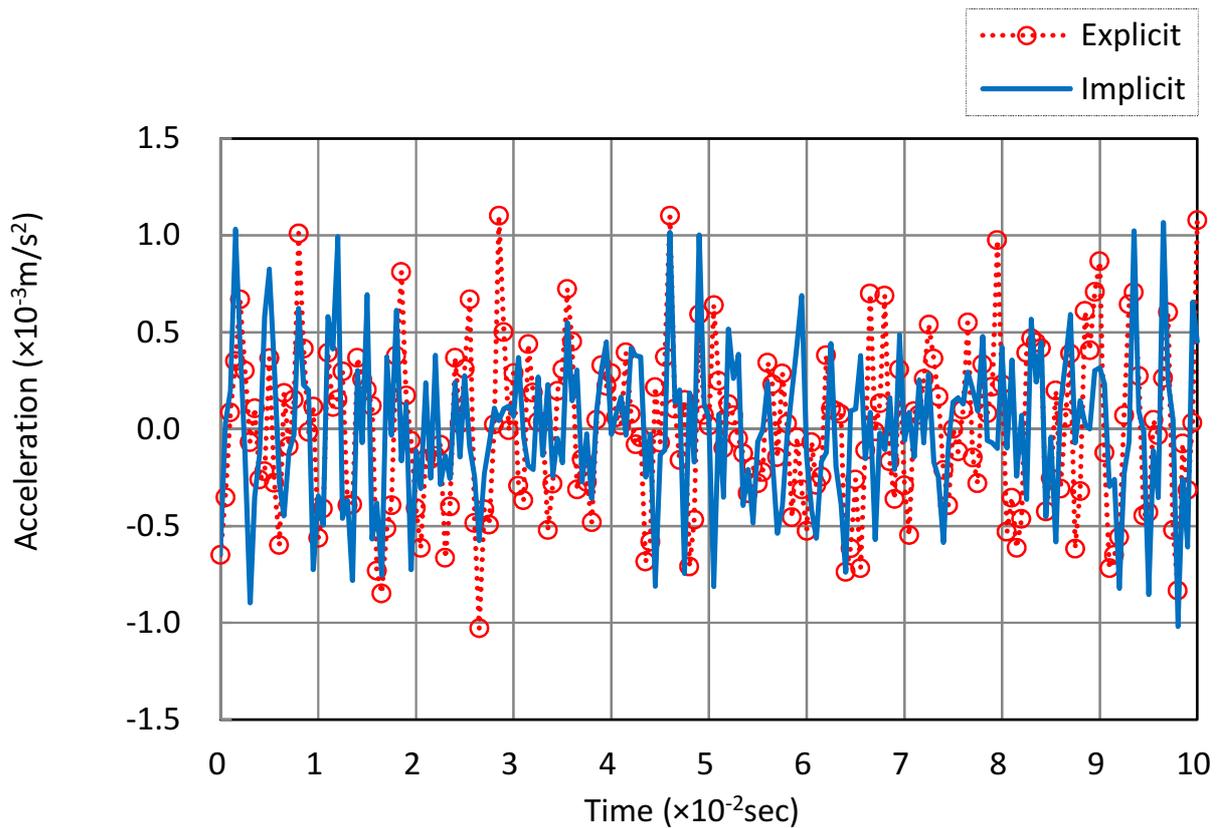
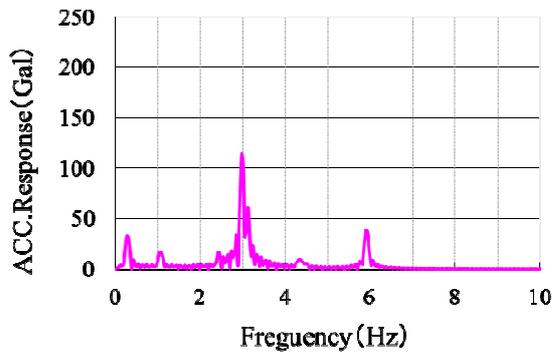


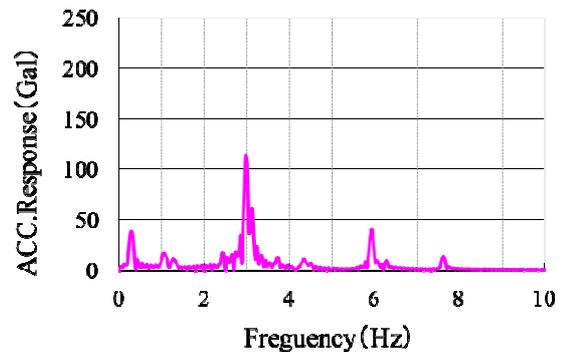
図5-10 陰解法の時間増分を補正した加速度応答 (A点)

しかし、これら解析解の振幅だけ見ても、その要因を特定することは難しい。そこで地震解析などで通常行われると同様、解析結果をフーリエ変換し、周波数 (Hz) ごとの成分を振り分けて解析解の特徴を確認することにした。その結果を図 5-11 にまとめる。フーリエ変換後の (1) から (4) を見ると、3Hz 付近が主要成分となっているが、(1) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5} \text{sec}$ の場合、その他低周波、高周波の成分がほとんど見受けられない、一方、(2) から (3)、(4) と増分時間 Δt が小さくなるごとに様々な周波数、高周波が顕著ではあるが低周波にも影響が見られるようになっている。このことから、陰解法における平均加速度法にて増分時間 Δt の値が大きいと、広域の周波数成分の影響を無視してしまうが理解できる。

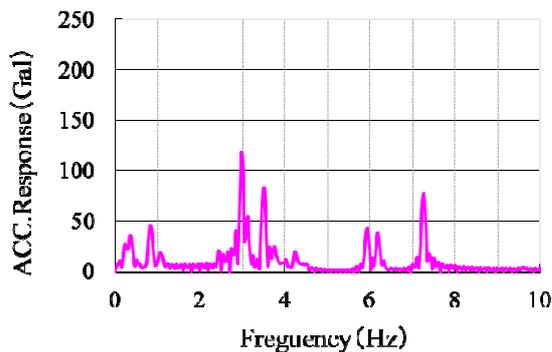
なお、本解析解においては、増分時間 Δt をさらに細かく設定して行くと桁数処理の丸め誤差が生じるようになることから、(4) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8} \text{sec}$ の値が最も近い値となった。



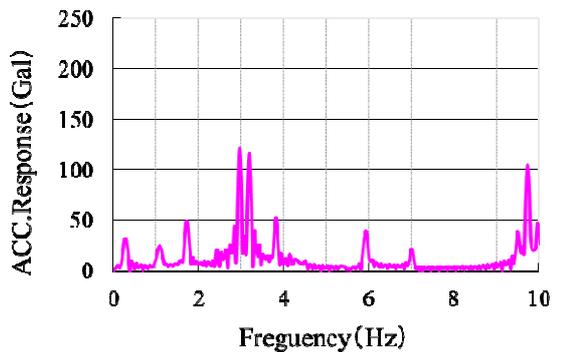
(1) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5} \text{sec}$



(2) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-6} \text{sec}$



(3) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-7} \text{sec}$



(4) $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8} \text{sec}$

図5-11 陰解法による増分時間 Δt の周波数成分

最後に、全力積と最大振幅から増分時間 Δt が解に与える影響を分析した。ケーススタディした結果を一覧にし、表 5-1 にまとめる。陽解法 (Explicit) の $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8} \text{sec}$ 時の値を基準とした場合、力積で考えると増分時間 Δt が大きくなる毎に多くの周波数成分が除外され、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5} \text{sec}$ の全力積は、基準値の半分以下の値になった。最大振幅で考慮すると、影響は軽微であると考えられるが、衝突応答など加速度が直接影響する動解析においては、平均加速度法を用いた陰解法においても、陽解法と同程度の時間増分 Δt に対する安定条件を満たす方がよい場合もあると理解される。

表5-1 時間増分が解に与えた影響

Name	Δt	全力積(N・sec)	比率	最大振幅(Gal・sec)	比率
Implicit(1)	5.00E-05	1,544.4	47%	114.3	97%
Implicit(2)	5.00E-06	1,699.7	51%	113.7	96%
Implicit(3)	5.00E-07	2,769.3	84%	117.5	100%
Implicit(4)	5.00E-08	3,189.3	97%	121.3	103%
Explicit	5.00E-08	3,301.4	100%	118.0	100%

5.8 まとめ

本章では、動的問題の時間積分法について記述した。

5. 1節では、動的時間積分の定式化をするにあたり、考慮すべき点を明らかにした。

5. 2節では、まず、陰解法の定式化を示した。空間に離散化されている運動方程式は、節点変位ベクトルに関する2階の常微分方程式とみなされ、初期条件を与えれば初期値問題を構成する。このような初期値問題を解く解析法として、新しい時刻 $t + \Delta t$ で微分方程式を満たすような近似解を求めてゆく直接積分法があるが、その中で代表的な手法である Newmark の β 法を用いて、離散化方程式を導出した。

5. 3節では、陽解法について説明した。陽解法は、時刻 t の運動方程式をもとに、時刻 $t + \Delta t$ の解を近似的に求める方法で、この方法では連立方程式を解く必要がないため計算効率上は陰解法よりも有利である。本節では、中央差分法を用いて離散化方程式を導出した。

尚、RBSM は、質量行列が対角成分のみとなるため、時間積分を要素単位に行うことができ、完全に陽に計算を進めることができる。

5. 4節では、離散体としての取り扱いとして、加速度を未知数として、隣接要素からの接触力の総和をもとに、時間増分 Δt で積分していき、最終的に時刻 $t + \Delta t$ の変位増分から要素位置を更新していく DEM 的アプローチを説明した。

5. 5節では、時間積分の安定条件を記述した。陰解法における平均加速度法は、時間刻みの長さに関係なく有界な解に導くことができる無条件安定手法であるが、中央差分法や線形加速度法は、増分時間 Δt を十分小さくしなければならない条件付安定手法である。また陽解法は、弾性波速度が最小サイズの要素を伝播する時間よりも短い時間増分を必要とするクーラン条件を満たさなければならないため、ペナルティ関数を用いている DDA や HPM は適用が難しい。一方、RBSM や DEM はばね定数を用いるので時間刻みの影響を受けにくく、こうした安定条件の面から考えて、陽解法が適している。

5. 6節では、動的陽解法プログラムにおける解析全体のフローを示した。要素位置や物性値その他定数等を設定し、第3章で示した運動方程式や、接触力の計算、すべりの計算を要素単位で行い、要素の位置を更新する手続きを、時間刻み に対して、繰り返し行う解析アルゴリズムを示した。尚、このプログラムを用いた数値解析例については、第6章で示す。

5. 7節では、ハイブリッド型仮想仕事の原理に基づく離散化手法における動的問題の時間積分の特性を考慮するため、8要素8節点の簡易なブロックモデルにおける一定荷重状態の弾性問題の数値解析例により検討を行った。この解析例では陽解法と陰解法をそれぞれ適用し、

解の精度と安定性を評価した。その結果、変位、速度の解の精度は、ほぼ完全に一致した。しかし、加速度においては誤差が生じた。

そこで、加速度における解への影響に関して詳しい分析を行った。加速度の振幅が陽解法の振幅と比べ小さくなっているのは増分時間 Δt の差によるものと考え、陰解法の増分時間 Δt を陽解法の増分時間 Δt に徐々に近づけ、その影響を考察した。すると、増分時間 Δt が小さくなるごとに波形に影響がみられ、同じ増分時間 Δt ではほぼ一致した。この結果をフーリエ変換して分析すると、 Δt が大きな値の平均加速度法では周波成分が丸められ、解に影響があることが分かった。よって、衝突応答など加速度が直接影響する動解析においては、平均加速度法を用いた陰解法においても、陽解法と同等のクーラン条件を満たす方がよい場合もあることが確認された。

本章のまとめとして、不連続体解析において、弾塑性解析の場合は、陰解法や中央差分による陽解法で特に問題はないが、衝突問題が生じる流動側の解析においては、加速度を未知数とした蛙跳び法による時間積分が必要となるため、離散体としての取り扱いを適用することになる。その際、僅かな接触でクラックが発生する問題などにおいては、安定条件を無視することはできないため、本研究では、動的陽解法を統一的に適用することにした。

第6章 動的陽解法 RBSM による不連続体解析

6.1 はじめに

第5章では動的陽解法を用いて、積層ブロックモデルにおける一定荷重状態の弾性問題の数値解析例により、連続性が保たれた状態においては FEM 同等の解析精度で安定的に解くことができることを確認した。しかし、ブロックが破壊され、バラバラとなるような不連続体においても同様な結果が得られるか、検証する必要がある。

RBSM の不連続体における位置づけとして、元来は静的な取り扱いを主とする解析手法であったため、破壊のメカニズムが形成され流動状態となる動的挙動に関しては対応する事が出来なかった。解析実務の社会では、そうした問題について接触機構を点接触ベースにて取扱う DEM や DDA などの実績が多い。しかし破壊には、急激な運動を起因とし接触力が卓越する問題と、大規模かつ緩慢に滑動力が卓越する問題あり、少なくとも後者に関しては、要素間の表面力の仕事を用いてエネルギー評価が容易に行える面接触ベースの方が、単純な解法である。

そこで本章では、動的な取り扱いが可能となった動的陽解法 RBSM を用い、まずは単純ブロックモデルによる解析例を通して、第3章および第4章で示した理論の裏づけを確認する。6.2節では、自由落下運動による衝突モデルにより、6.3節では、斜面における滑動モデルにより、解の精度や安定性について検証する。

次に、6.4節では、複数ブロックによる実際の斜面形状に近いモデルにより、崩壊挙動を再現性や、斜面安解析への適用性を検証する。そして、6.5節では、初生すべり後に斜面が不安定化し、再びすべり破壊を起こすような複合すべり問題への応用の可能性を示す。

最後に、6.6節において、本章全体を概括する。

6.2 衝突モデルにおける検証

衝突問題における動的陽解法 RBSM の適用性を確認するため、単純ブロックモデルのケーススタディにより、解の精度や安定性についての検証を行う。

(1) ケース 1 : 境界と要素の衝突モデル

図 6-1 のように、要素数 4、節点数 5 の 100mm 角の固いブロックを任意高さから、自由落下運動させ、地面に衝突させる。このときの物体力として、重力加速度 9.80665m/s^2 をあたえ、跳躍運動の解析結果と質点の運動方程式から導き出される理論解とを比較する。なお、ブロックが地面衝突した際のエネルギー損失がなく、衝撃ひずみの影響も考慮しないものと仮定した。この解析で用いられる物性値を表 6-1 に示す。

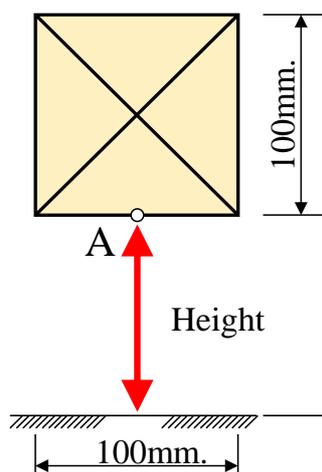


図 6-1 ケース 1 の解析モデル

表 6-1 ケース 1 の物性値

Parameter	Value
Young's modulus (MPa)	5,127
Poisson's ratio	0.112
Density (kg/m^3)	1,850
Time increment (s)	0.000005

まず、はじめに初期高さ 100mm からブロックを自由落下運動させた。点 A における解析結果を図 6-2 に示す。その結果、解析解と理論解は完全に一致することを確認した。

(ケース 1-1)

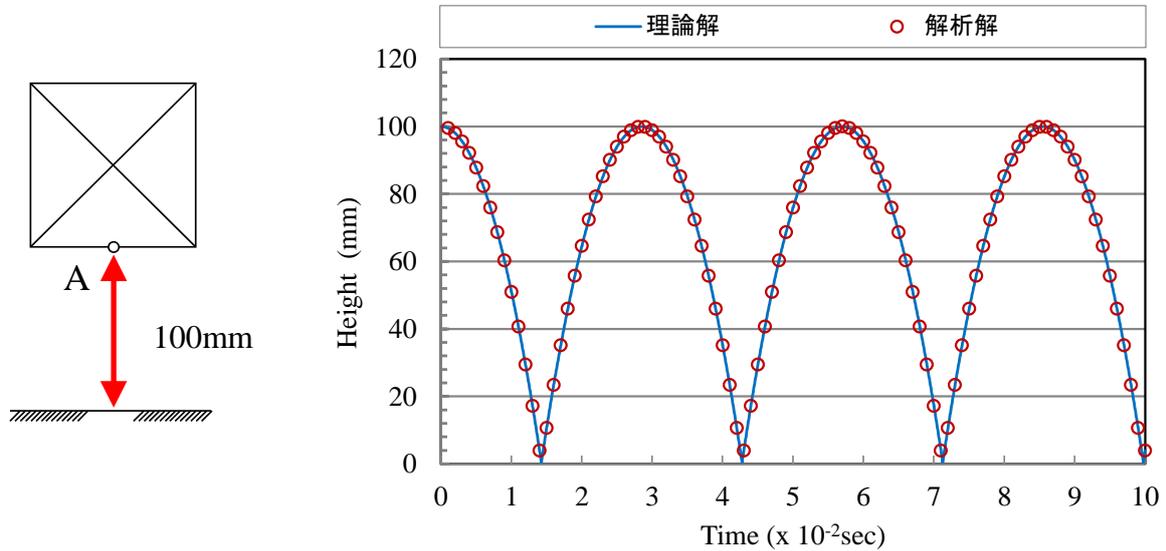


図 6-2 初期高さ 100mm 時の解析結果

続いて、初期高さ 200mm から同じようにブロックを自由落下運動させた。図 6-3 に解析結果を示す。この場合の結果も、100mm と同様、解析解と理論解は完全に一致した。

(ケース 1-2)

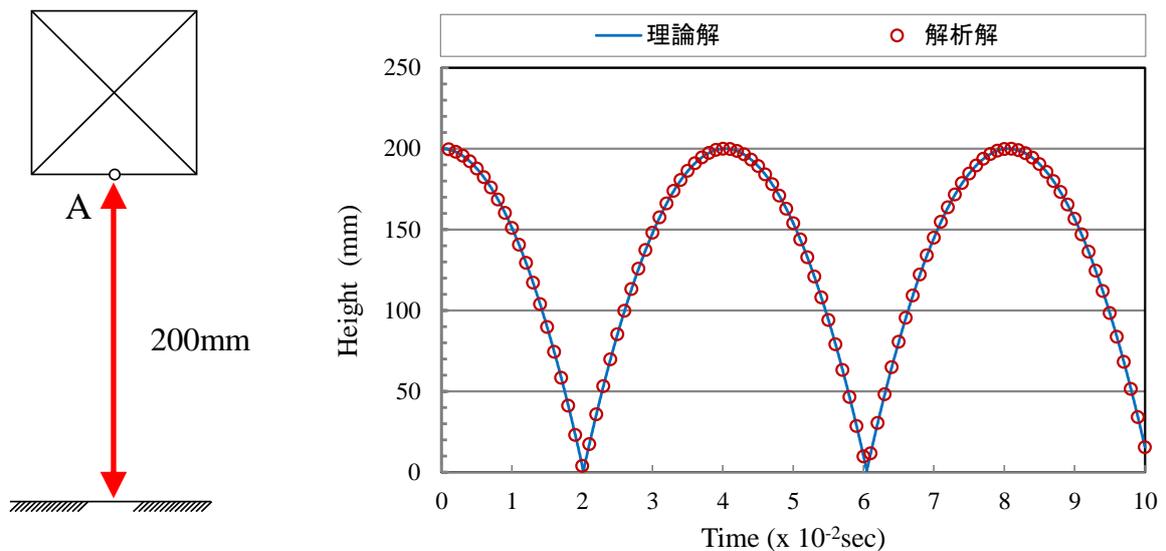


図 6-3 初期高さ 200mm 時の解析結果

最後に、初期高さ 300mm からブロックを自由落下運動させた。図 6-4 に解析結果を示す。この場合の結果も、初期高さ 100mm、及び 200mm から落下させた場合と同様、解析解と理論解は完全に一致した。

(ケース 1-3)

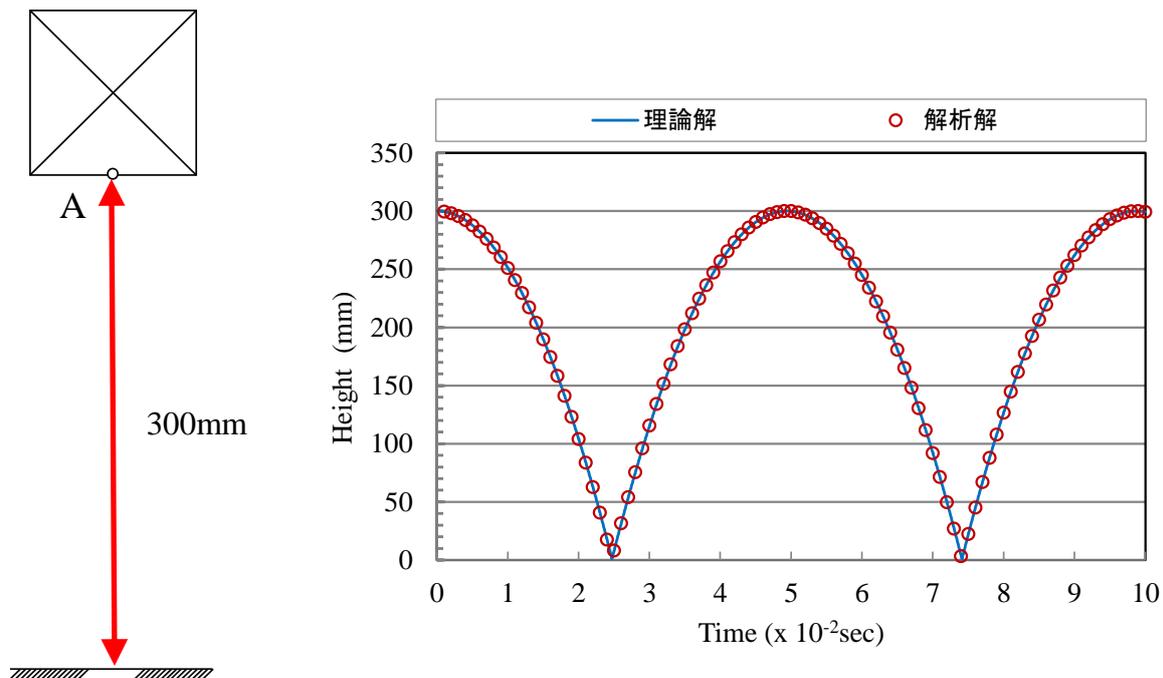


図 6-4 初期高さ 300mm 時の解析結果

本解析の目的は、ブロックの衝突運動に対する高さの違いによる、貫入量と接触ばねの関係で、エネルギーの収支がうまく取れているかを確認することである。もしも、バランスが取れていなければ、要素は安定した挙動を示さない。特に固い材料の場合は発散し易いが、本解析例での結果では、いずれの高さから落下させても理論解と合致し、解も安定していた。このことから、境界と要素の衝突モデルにおける動的陽解法 RBSM の力学モデルの有効性が示されたものとする。

(2) ケース 2：要素と要素の衝突モデル

次に、第 4 章で説明した要素と要素が衝突するモデルにおける接触力の計算が、理論どおりの挙動を示すか、図 6-5 の解析モデルで検証する。ケース 1 で用いた要素数 4、節点数 5 の 100mm 角ブロックを、一方は地面に置き、他方は任意高さから自由落下させ、衝突させる。なお、物性値や物体力の条件は、ケース 1 で示したものと同様とした。

本解析例では、図 6-5 (a) に示すように、ブロック表面の辺と辺が接触するモデルを Aモデルとし、図 6-5 (b) のように、落下するブロックを 45° 回転させて、頂点と辺が接触するモデルを Bモデルとして解析を行い、その挙動を追跡した。

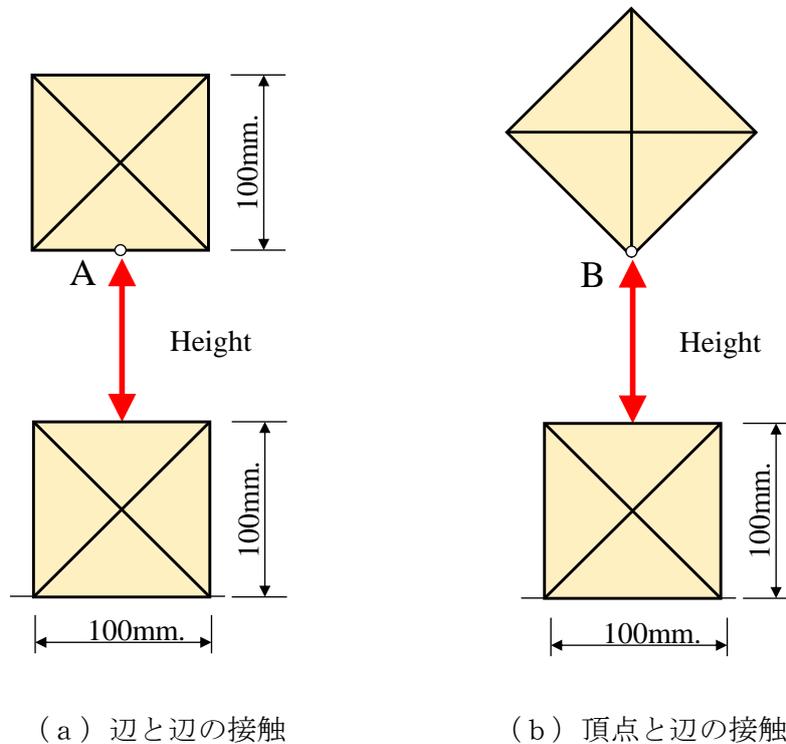


図 6-5 ケース 2 の解析モデル

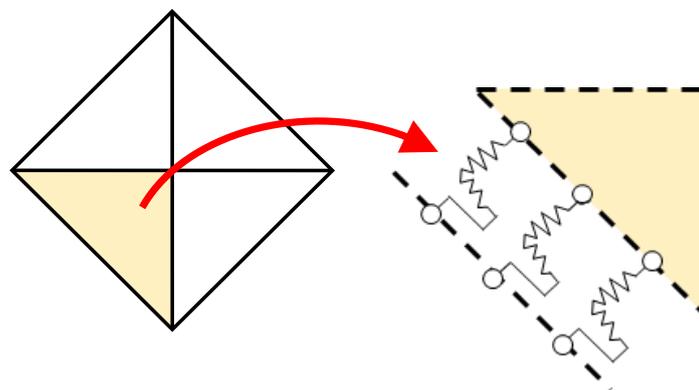


図 6-6 ケース 2 の分布ばね

頂点と辺が接触する場合の接触ばねは、図 6-6 に示すような分布ばねとし、一つの面に対して 3 点の積分点を配置した。これは、表面力に対して複数の積分点で評価できる RBSM の特性を活かしたものである。

初期高さ 300mm から落下させた場合の解析結果を図 6-7 に示す。まず A の辺-辺接触モデ

ルについては、ケース1の場合と同様、解析解と理論解と一致しているため、接触力の計算としては問題ないと考えることができる。一方、Bの頂点-辺接触モデルについては、エネルギーの損失は発生していないが、位相に若干のずれが生じている。

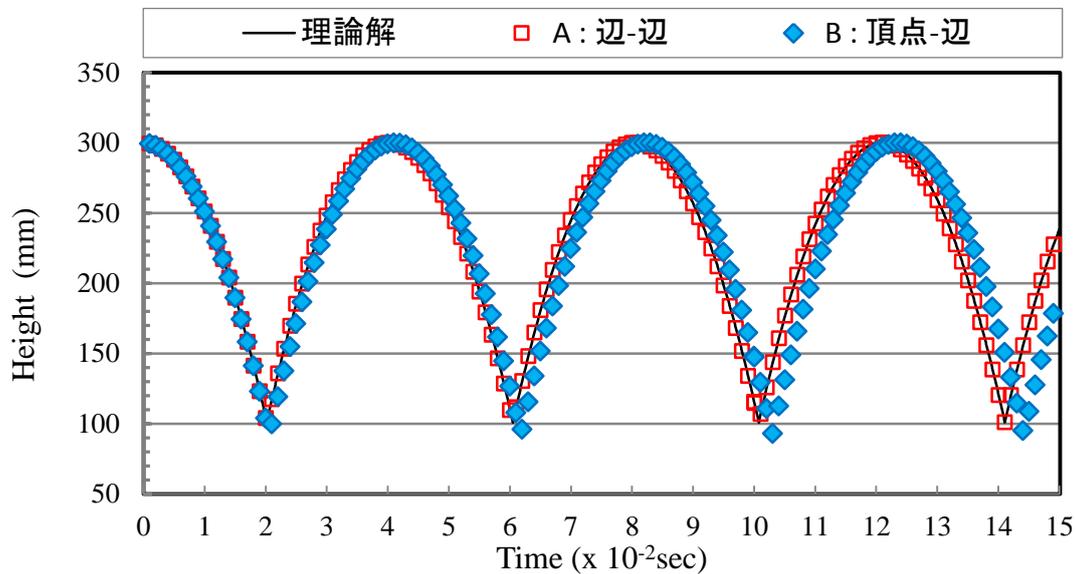


図 6-7 辺-辺接触モデルと頂点-辺接触モデルの比較

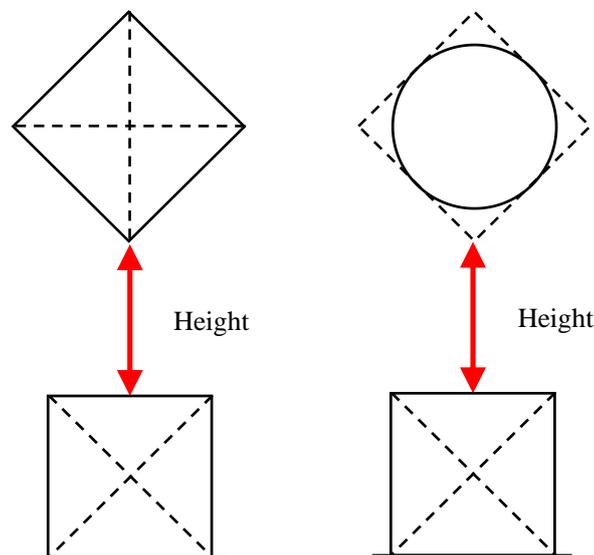


図 6-8 円要素モデルの考え方

こうした挙動が、実用上問題となるものを判断するため、円要素モデルと比較することにした。円要素モデルは、DEMによる不連続体解析の実務でよく用いられている。いま、図6-8のように頂点-辺接触モデルを円要素モデルに置き換える。尚、円要素モデルは、質点の運動方程式から導き出される解とした。

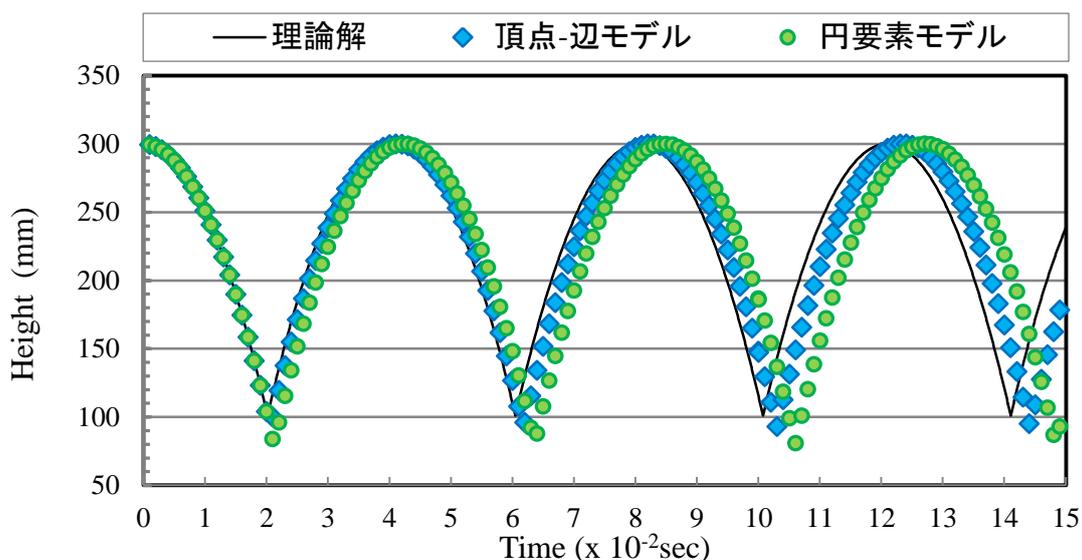


図 6-9 円要素モデルとの比較

その結果、3点の積分点を配置した提案モデルと円要素モデルを比較すると、提案モデルの方が、辺-辺接触モデルの挙動に近く、また安定していた。これは、衝突付近の挙動に着目すると、円要素モデルの場合、ブロックの角部への接触判定が難しいため、貫入量が大きくなっているためと思われる。DEMでは、こうした問題への対処法として、要素サイズを小さくする、ランダムサイズにするなどの対策が取られている。また、ばね定数と並列に粘性力を発揮するダッシュポットが設定されるが、これはオーバーラップ量の局所的な増大による発散を防止するため、ダンパーの役割も果たしている。

一方、動的陽解法 RBSM は、積分点上で接触判定を行うため、積分点を増やして行くことで、理論解に近づけることは可能であるが、あまり多くなると、計算効率が悪くなる。また、頂点が辺に衝突する時の現実を考えると、そのまま跳躍運動するとは考えられず、実際は頂部が一部損傷したり、変形して反発することになる。分布ばねの考え方もこうした点で、DEMのダンパーと同様の役割を果たす。よって、実用上問題はないと考えることができる。

6.3 滑動モデルにおける検証

すべり問題における動的陽解法 RBSM の適用性を確認するため、単純ブロックモデルのケーススタディにより、解の精度や安定性についての検証を行う。

(1) ケース 3：斜面における滑動ブロックモデル

図 6-10 のとおり、衝突問題と同じ 100mm 角ブロックを任意傾斜角 θ の斜面に置き、物体力として重力加速度 9.80665m/s^2 をあたえ、ブロックを滑らせた。この解析で用いられる物性値を表 6-2 に示す。

滑動ブロックモデルでは、ブロックが滑り始めてからの時間 t における滑動量 δ を、質点の運動方程式から導き出される理論解と比較し、解の精度を評価する。また、内部摩擦角 ϕ の影響についてもその有無による滑動量の違いから評価を行い、摩擦特性を考慮したすべり解析への適用性を検証する。

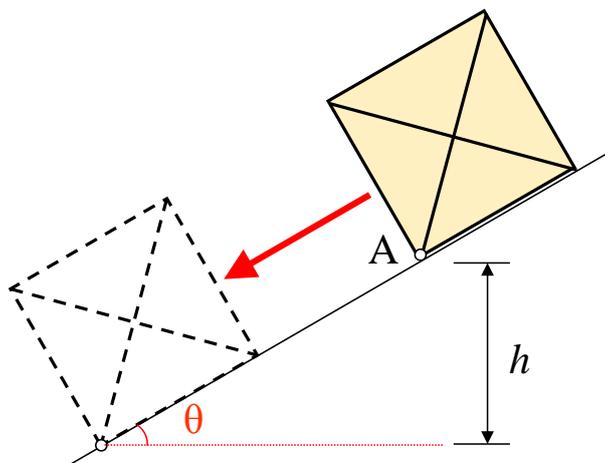


図 6-10 ケース 3 の解析モデル

表 6-2 ケース 3 の物性値

Parameter	Value
Young's modulus (MPa)	5,127
Poisson's ratio	0.112
Density (kg/m^3)	1,850
Time increment (s)	0.000005
Friction angle	$0^\circ, 20^\circ$

傾斜角は、ケース 3-1 が $\theta = 5^\circ$ ，ケース 3-2 が $\theta = 15^\circ$ ，そしてケース 3-3 が $\theta = 30^\circ$ と設定し、それぞれの点 A における滑動量を求めた。その解析結果を図 6-11，図 6-12，図 6-13 に示す。

(ケース 3-1)

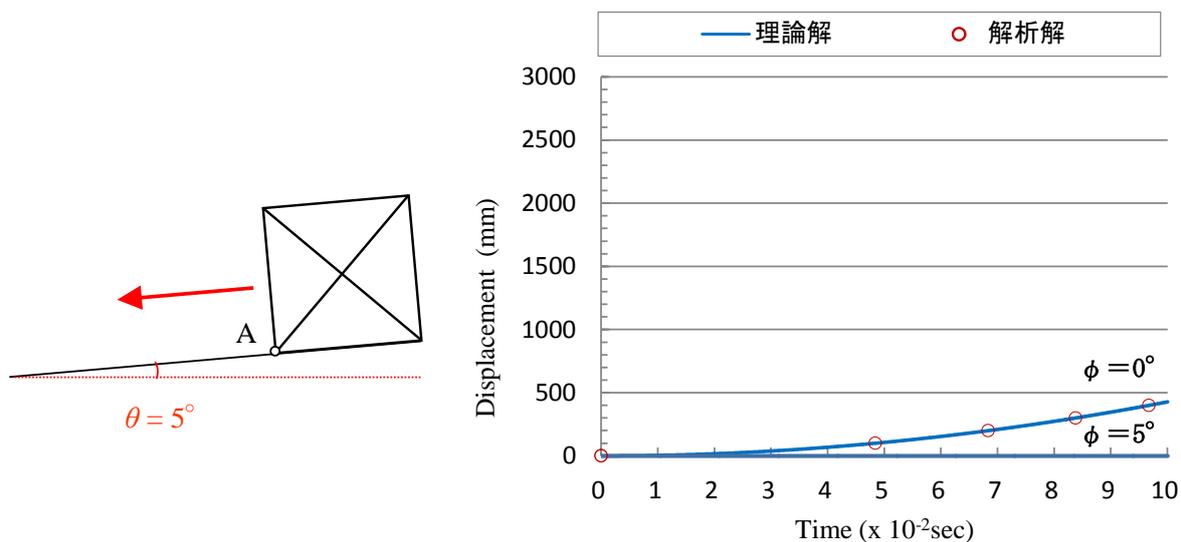


図 6-11 $\theta = 5^\circ$ 時の解析結果

(ケース 3-2)

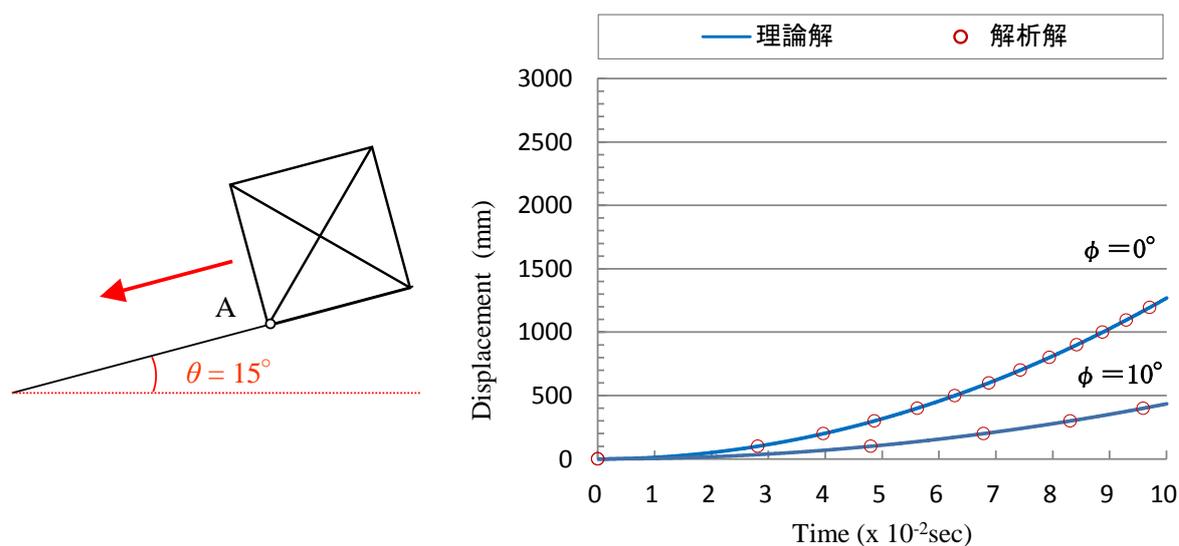


図 6-12 $\theta = 15^\circ$ 時の解析結果

(ケース 3-3)

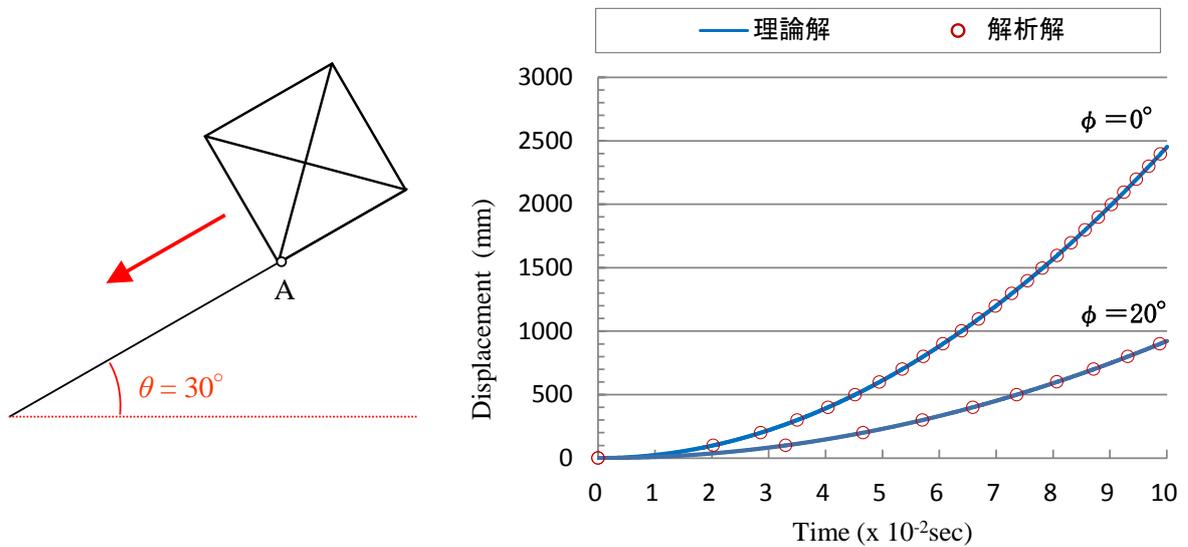


図 6-13 $\theta = 30^\circ$ 時の解析結果

本解析の結果、まず、摩擦角 $\phi = 0^\circ$ によるエネルギー損失の無い状態における滑動量は、いずれの傾斜角の解析解においても、運動方程式による理論解と一致した。また、摩擦角 ϕ を斜面とブロック間に設定しているモデルにおいても、ケース 3-1 の時は、ほぼ停止状態になること、ケース 3-2、3-3 においては滑動量が半分以下となることが忠実に再現された。ブロックの挙動については、代表例として、傾斜角 $\theta = 30^\circ$ 、 $\phi = 0^\circ$ 時の解析モデルを図 6-14 に図示する。初期位置で斜面に停止していたブロックが、物体力によってすべり出し、徐々に加速して滑落してゆく様子が再現されている。

これまでの数値解析例を総括すると、基本的に同じ物性値を用いた単純ブロックモデルの衝突問題および滑動問題を動的陽解法 RBSM で解き、その挙動から解の精度を検証してきた。その結果、いずれのケーススタディにおいても、運動方程式に基づく理論解と合致することが明らかになった。また、接触ばねやスライダーなどの物理モデルを構成する機能が、いずれのケーススタディにおいても安定的に機能している。このような結果から、第 3 章から第 4 章で示した理論が裏づけられ、動的問題の破壊問題への適用性を示すことができたものとする。

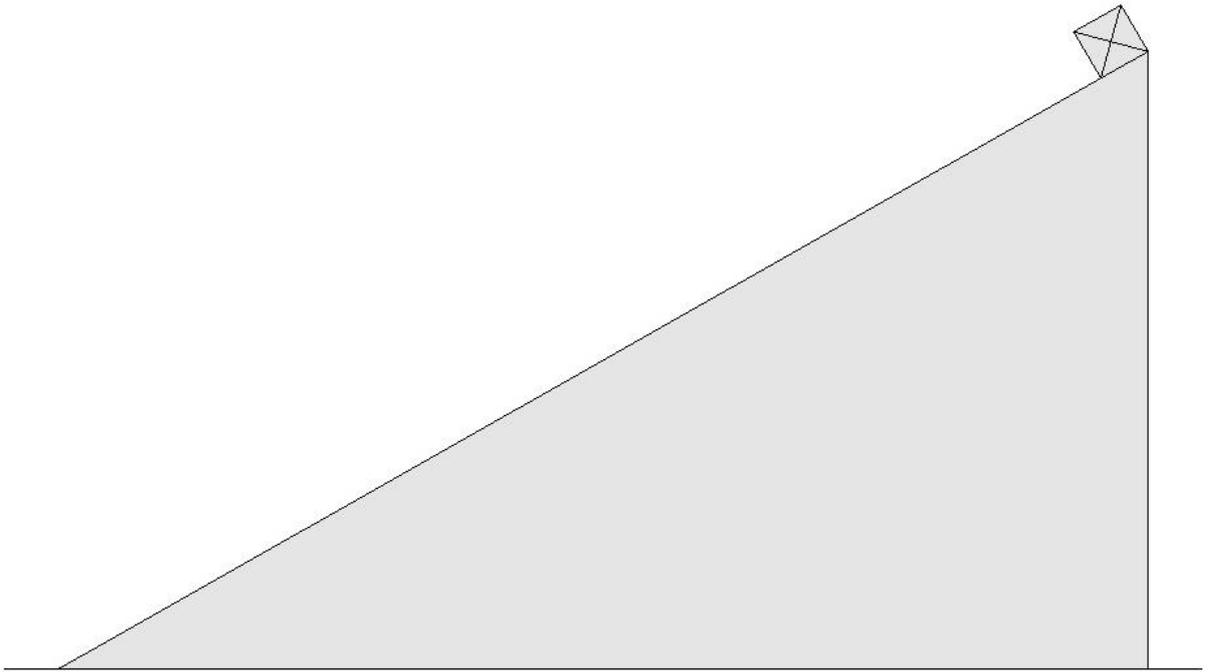


図 6-14 (a) 初期位置

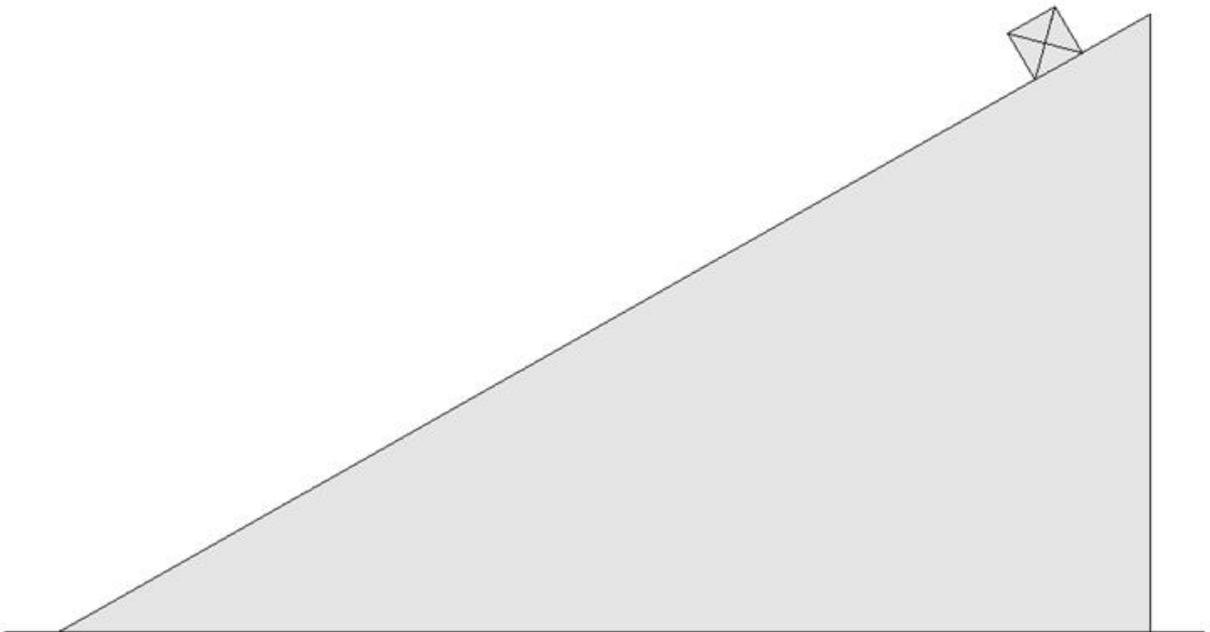


図 6-14 (b) Time ($\times 10^{-2}\text{s}$) = 2.0s 時の位置

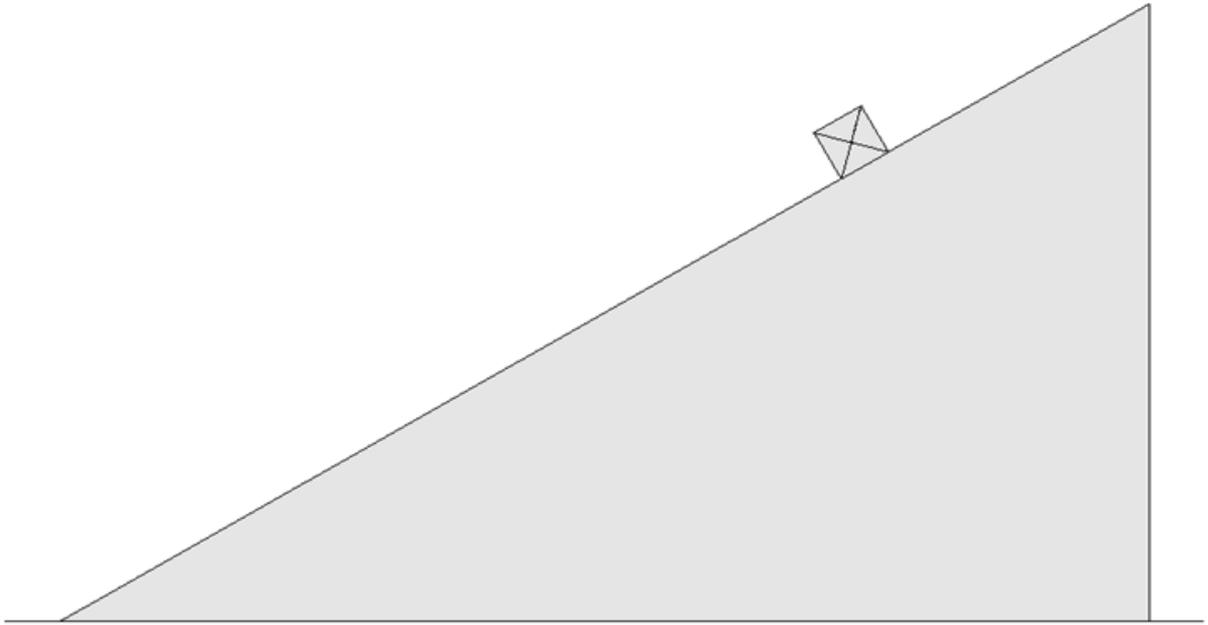


図 6-14 (c) Time ($\times 10^{-2}$ s) = 4.0s 時の位置

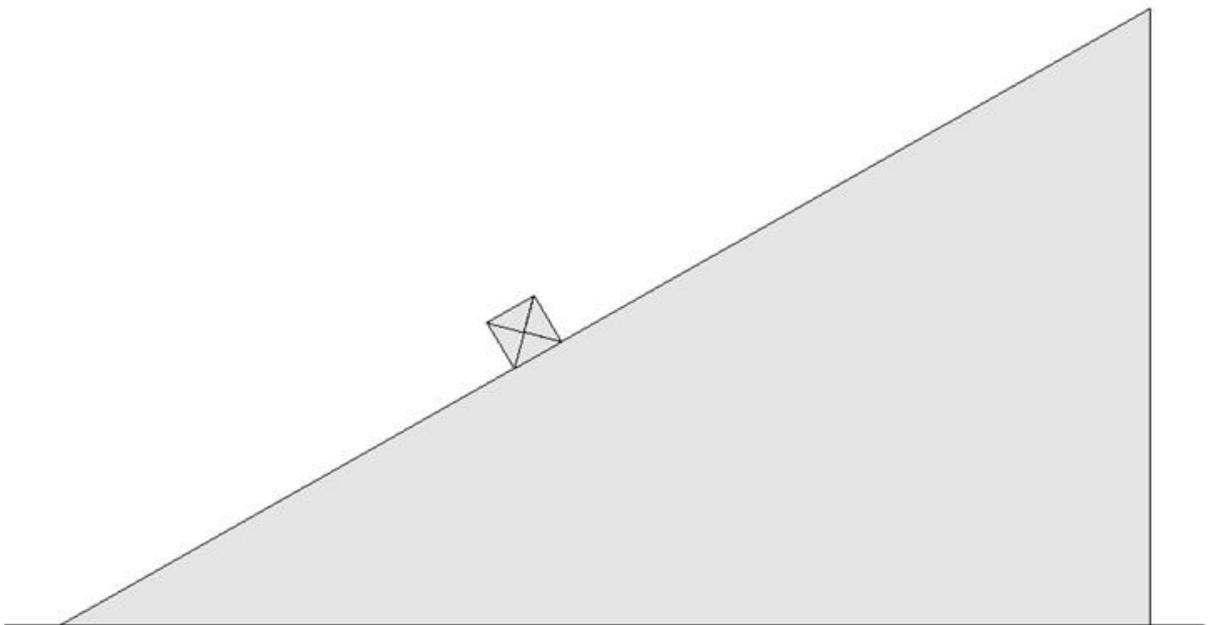


図 6-14 (d) Time ($\times 10^{-2}$ s) = 6.0s 時の位置

6.4 斜面安定解析への適用

これまでは提案手法のアルゴリズムを確認するため、単純ブロックによる数値解析例が中心だったが、本解析では図 6-15 に示すように、実際の斜面形状に近いモデルを想定し、傾斜角 θ が刻々と変化する場合の複数ブロックによるすべり破壊を考察する。この問題では、岩盤崩壊による地すべりを想定し、岩盤の風化に伴う粘着力 C の低減を考慮して、 $C = 0.0\text{MPa}$ とした。また、引張強度 δt は岩盤の割目が卓越するケースを想定して、 $\delta t = 0.0\text{MPa}$ とした。その他、この解析で用いられた物性値を表 6-3 に示す。こうした斜面安定解析では、すべりと同時に要素間の接触などを伴うため、理論解を示すことは難しい。

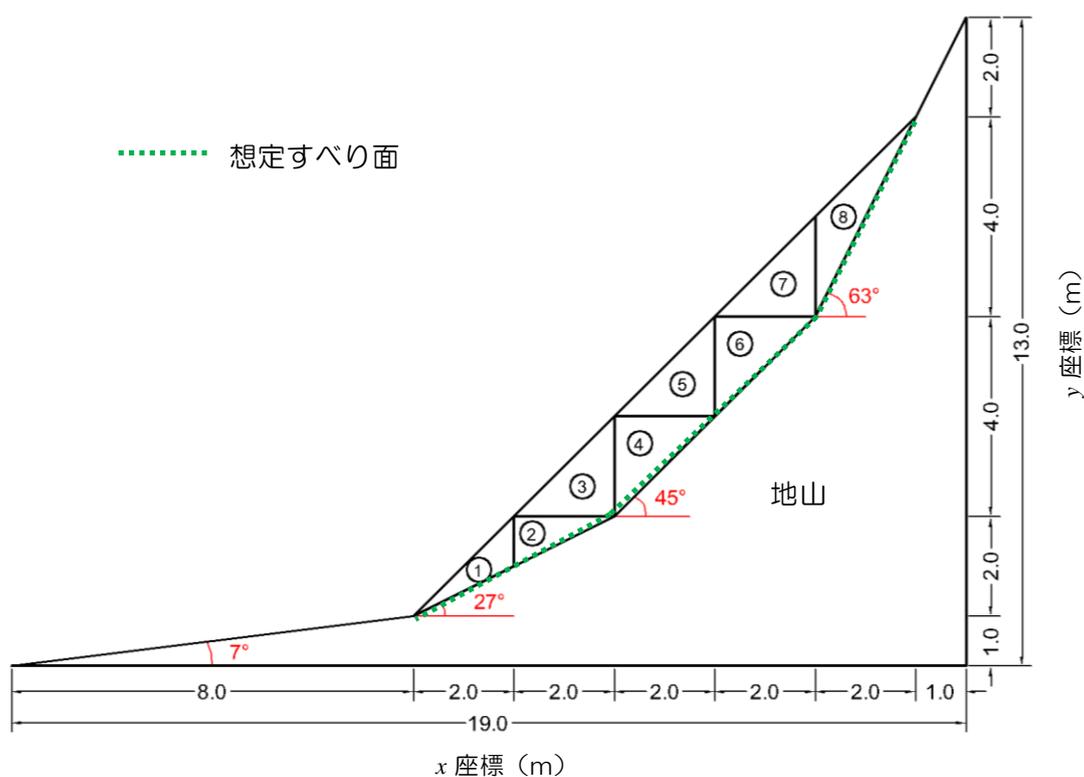


図 6-15 複数ブロックによる解析モデル

表 6-3 複数ブロックモデルの物性値

Parameter	Value
Young's modulus (MPa)	200
Poisson's ratio	0.2
Unit weight (kN/m^3)	25
Time increment (s)	0.003
Friction angle	30°

そこで解の精度では、第2章で説明した簡便法により算出される全体安全率と、動的陽解法 RBSM の想定すべり面に接する要素の表面力から算出される安全率を比較し、検証する。

簡便法における、安全率算出方法の手順は以下のとおりである。まずは、斜面の滑り面を図6-16のようにスライス分割する。

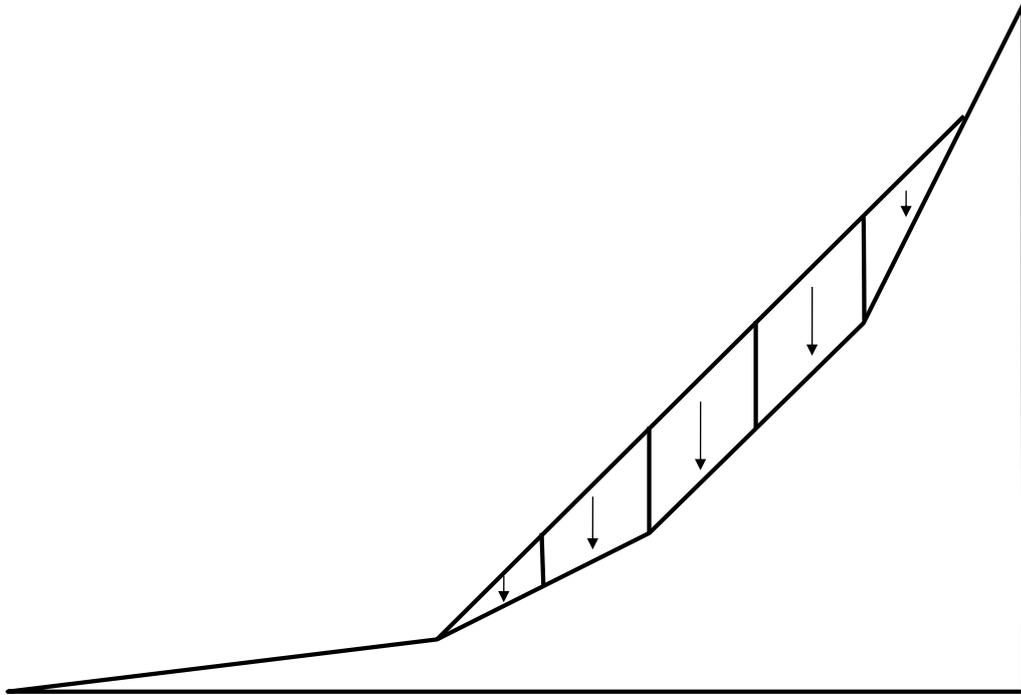


図 6-16 スライス分割

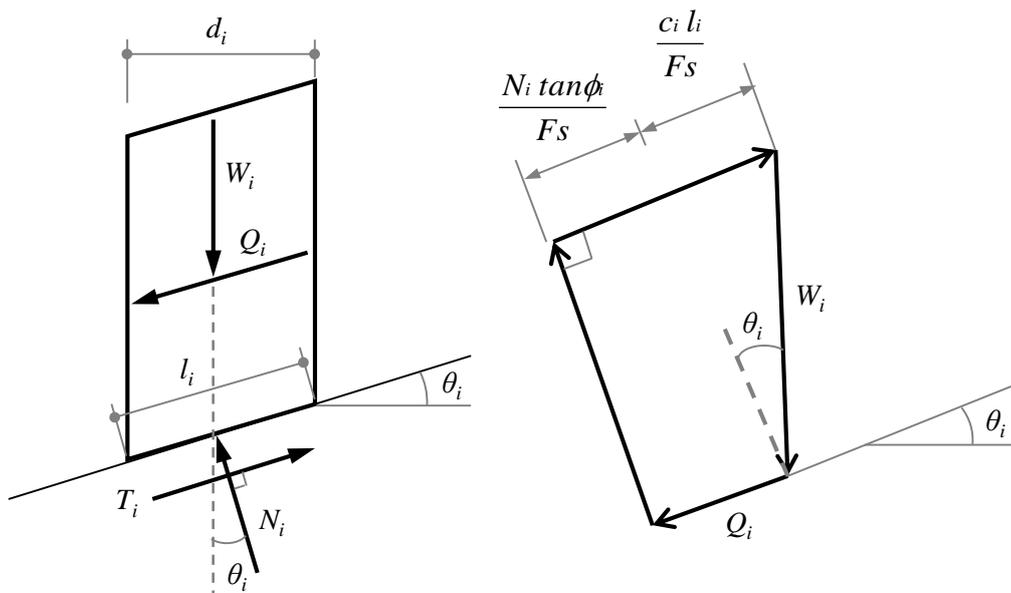


図 6-17 スライスに作用する力

スライスに作用する力は、図 6-17 ようになる。これらの力から次式により安全率 F_s 算出する。

$$F_s = \frac{1}{\sum W_i \sin \theta} \sum \{ c_i l_i + W_i \cos \theta \tan \phi \} \quad (6.1)$$

W_i : 重量

T_i : すべり面に作用するせん断力 ($= W_i \sin \theta_i$)

N_i : すべり面に作用する垂直力 ($= W_i \cos \theta_i$)

d_i : スライスの幅

l_i : すべり面の長さ

θ_i : すべり面の傾き

C_i : 粘着力

ϕ_i : 内部摩擦角

F_s : 安全率

一方、動的陽解法 **RBSM** における安全率算出方法の手順は、基本的には通常 **RBSM** と同様に、**RBSM** のよる離散化極限解析を行い、想定すべり面に接する要素の積分点における単位面積あたりの表面力を計算する。各積分点の表面力から、次式により安全率 F_s を算出する。

$$F_s = \frac{\sum (C + \tan \phi) l}{\sum d} \quad (6.2)$$

この手法にて安全率を算出するための、まず図 6-15 に示す想定すべり面上に位置する要素①～⑧の表面力の総和を算出した。

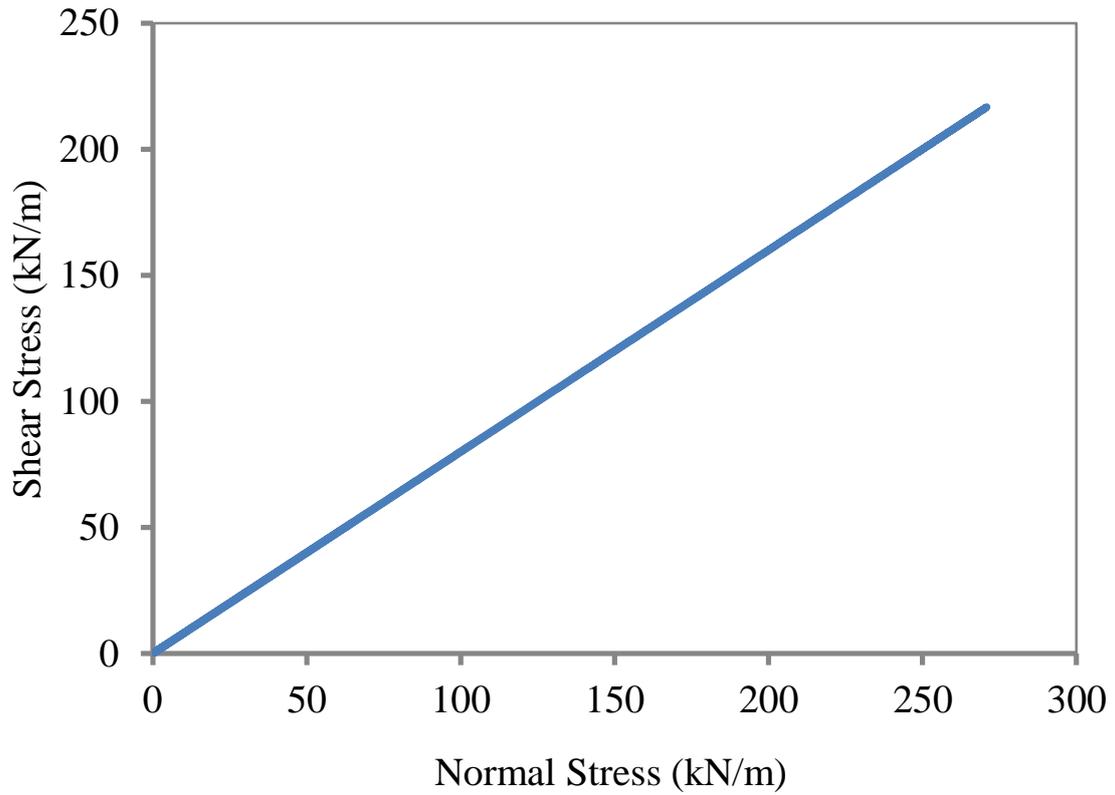


図 6-18 $\tau - \sigma$ の応力状態

その結果を、想定すべり面上におけるせん断応力と垂直応力の関係に整理し図 6-18 に図示する。粘着力のない土が破壊される応力状態においては、0 からモールクーロンの破壊基準線に沿って直線上にあがることが知られているが、本解析でもそうした関係が得られた。

こうした関係に対して、式(6.2)を適用し、せん断応力に基づく安全率を算出した。動的陽解法 RBSM と簡便法による安全率の比較を、表 6-4 に示す。その結果、動的陽解法 RBSM に比べ、簡便法によって算出された安全率は低い結果となった。これは、簡便法がすべり面に鉛直に作用する力に対してのつり合い式のみを考慮するのに対して、動的陽解法 RBSM は、鉛直力に加え、隣接要素間に作用する応力も計算するので、自重によるすべり破壊の場合は、簡便法の安全率は相対的に低くなるためである。

表 6-4 解析結果（全体安全率）

	Shear Stress (kN/m)	Normal Stress (kN/m)	Factor of Safety
Present method (RBSM)	217	271	0.72
Limit equilibrium analysis (FELLENIOUS)	231	253	0.63

動的陽解法 RBSM による斜面安定解析のメリットは、こうした極限解析が行えるだけでなく、どのように破壊されるかその進行過程を視覚的に把握できることがある。図 6-20 に、すべりはじめから、破壊が進展してゆく様子を図示する。ここでは、まず斜面上部の末端にクラックが生じ、その後滑動しはじめ、傾斜角が緩い勾配となる斜面下部ではブロックが水平に押し出される様子が、再現されている。

こうして、表面力から算出されるエネルギーから安全率が算出できること、また逐次的に進展してゆく崩壊挙動を再現することにより、斜面安定解析としての適用性とマルチステージの対応性を示すことができた。

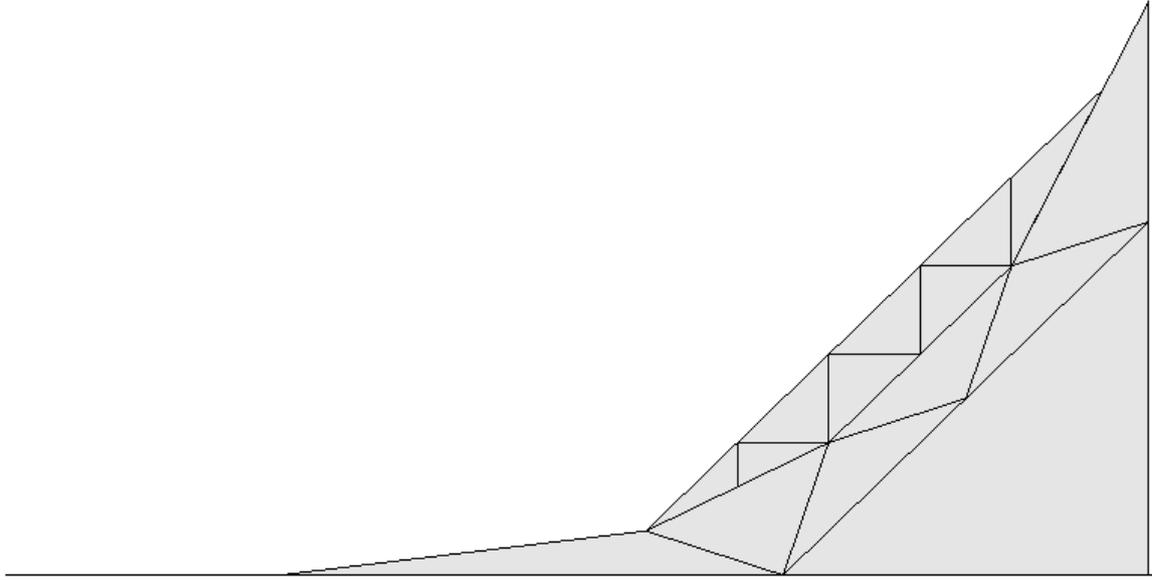


図 6-19 (a) 初期状態

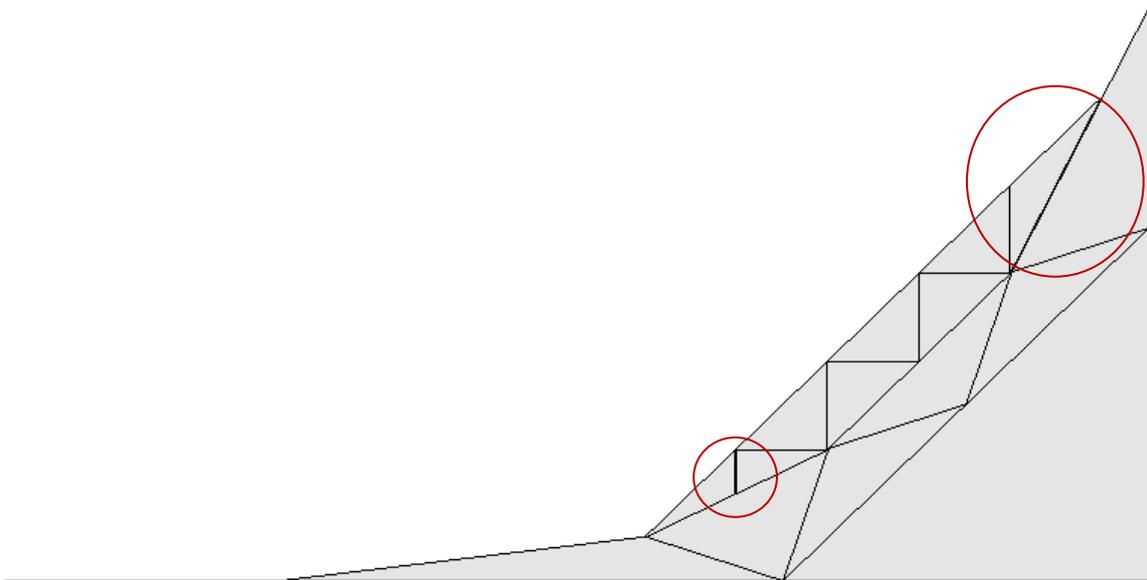


図 6-19 (b) クラック発生

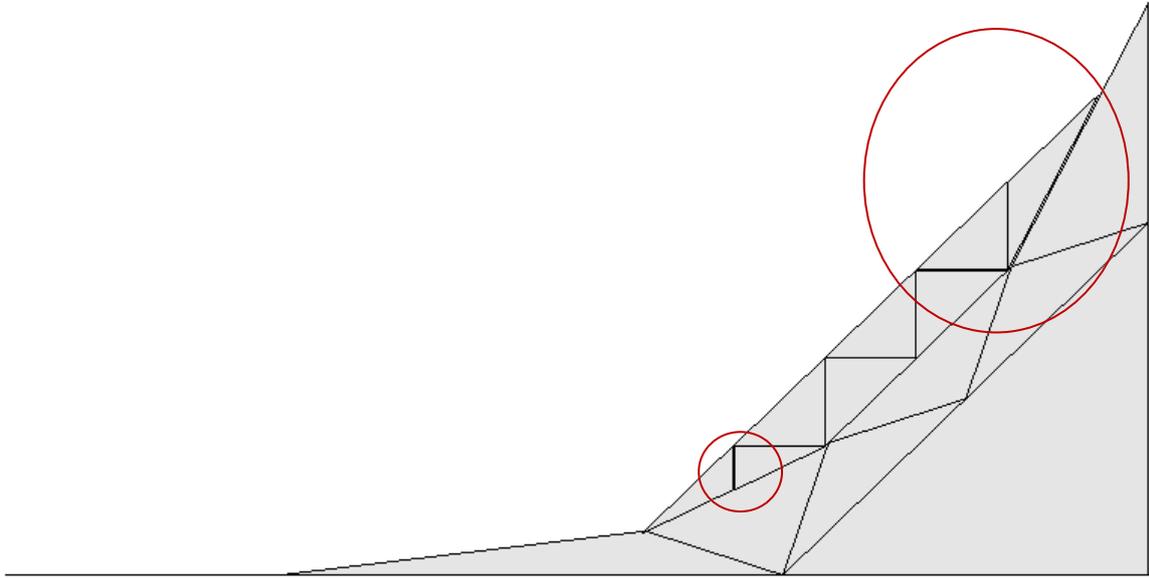


図 6-19 (c) クラックの進展

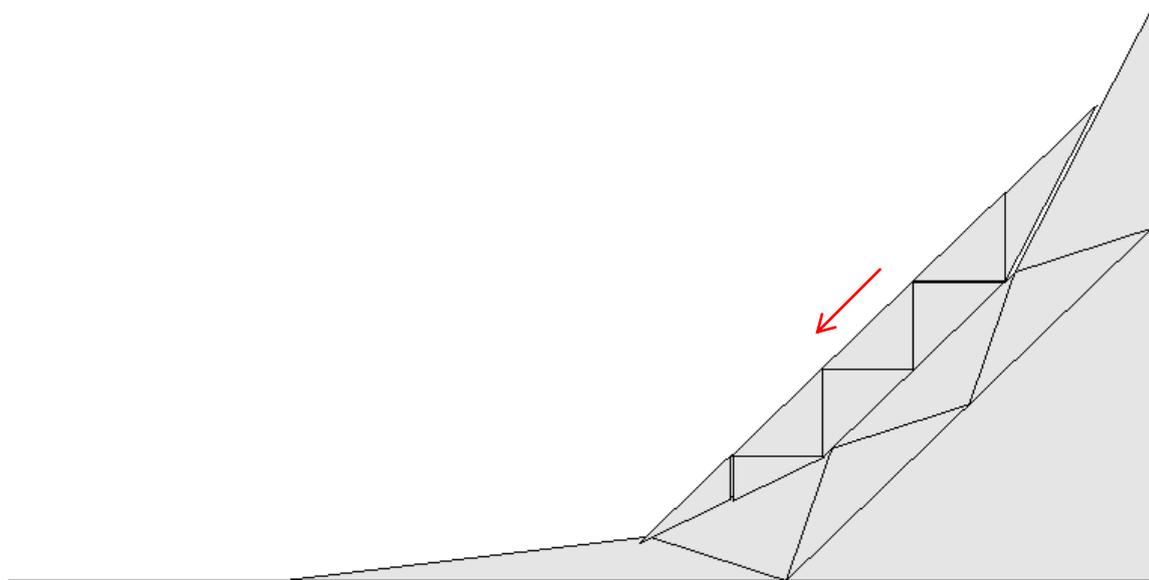


図 6-19 (d) ブロック滑動の開始

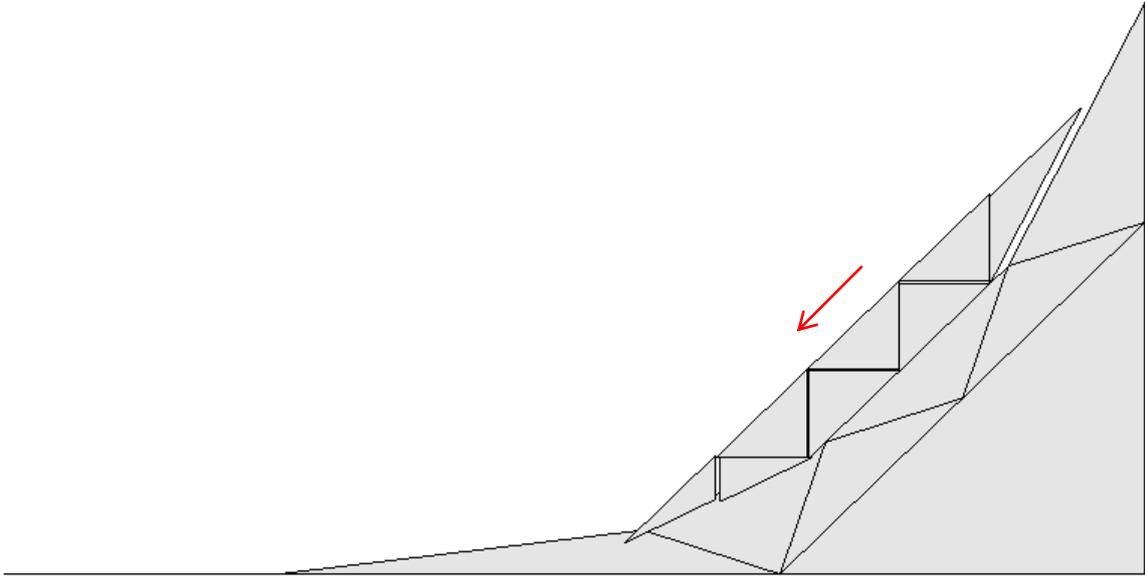


図 6-19 (e) ブロック滑動の進展 1

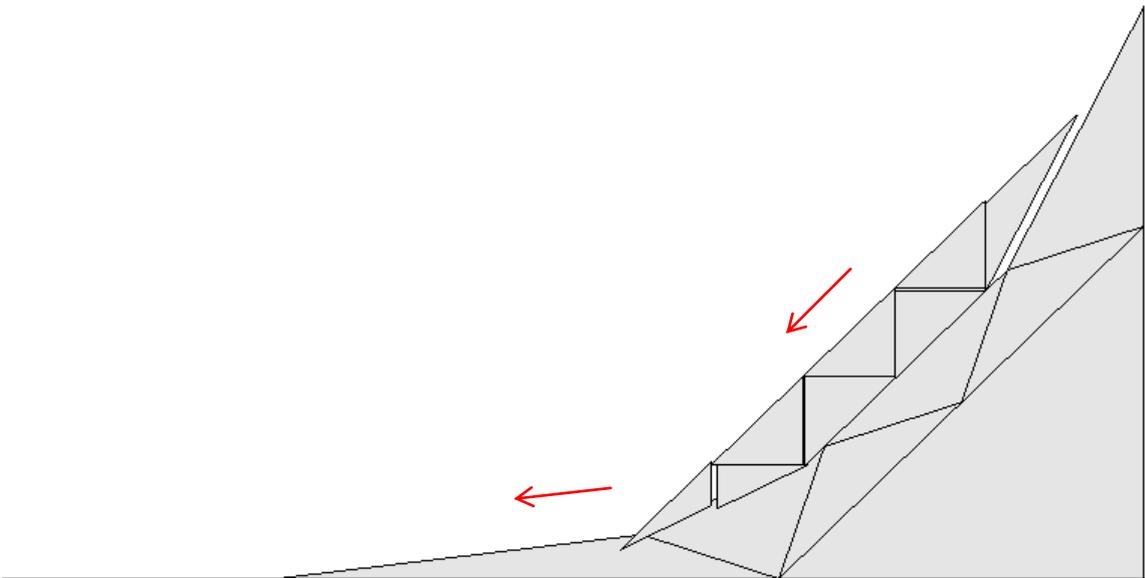


図 6-19 (f) ブロック滑動の進展 2

6.5 複合すべり問題への応用

最後に、複数ブロックモデルを発展させ、初生すべり後に斜面が不安定化し、再びすべり破壊を起こす複合すべりを想定した解析モデルによる安定解析を行う。複合すべりは、最初に弱層が破壊されることで、さらにその周辺の斜面が不安定化し破壊の連鎖が生じるため、すべり面を想定することが極めて難しく、簡便法の適用が難しい。現状では、複数のすべり面を仮定し、最小安全率を検索する手法などが提案されているが、実際のところどのようにすべるか不明な点が多く、有効な計算手法が無いのが実情である。

そこで、逐次的なすべり挙動を追跡でき、さらに離散化極限解析により安全率を求めることができる本提案手法を用いて、複合すべり解析への応用を試みる。解析モデルは、図6-20に示すように、末端付近ですべり面勾配が変化している地山形状とした。地山の上部には、風化花崗岩が堆積している。解析で用いた物性値を表6-4に示す。こうしたモデルでは、斜面全体だけでなく複数のすべりパターンが想定される。

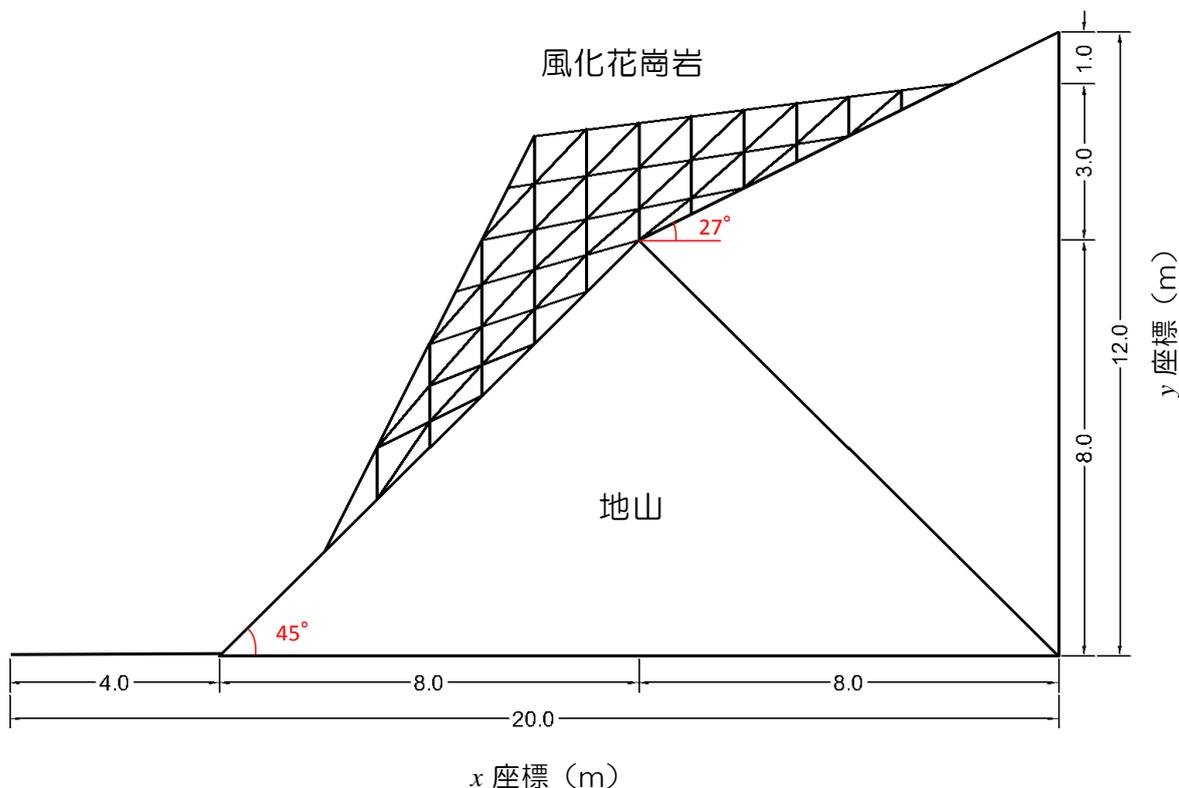


図 6-20 複合すべりの解析モデル

表 6-4 複合すべりモデルの物性値

Parameter	Value
Young's modulus (MPa)	250
Poisson's ratio	0.3
Unit weight (kN/m ³)	20
Time increment (s)	0.002
Friction angle	30° , 25°
Cohesion of joint (MPa)	0.005
Tensile strength of joint (MPa)	0.005

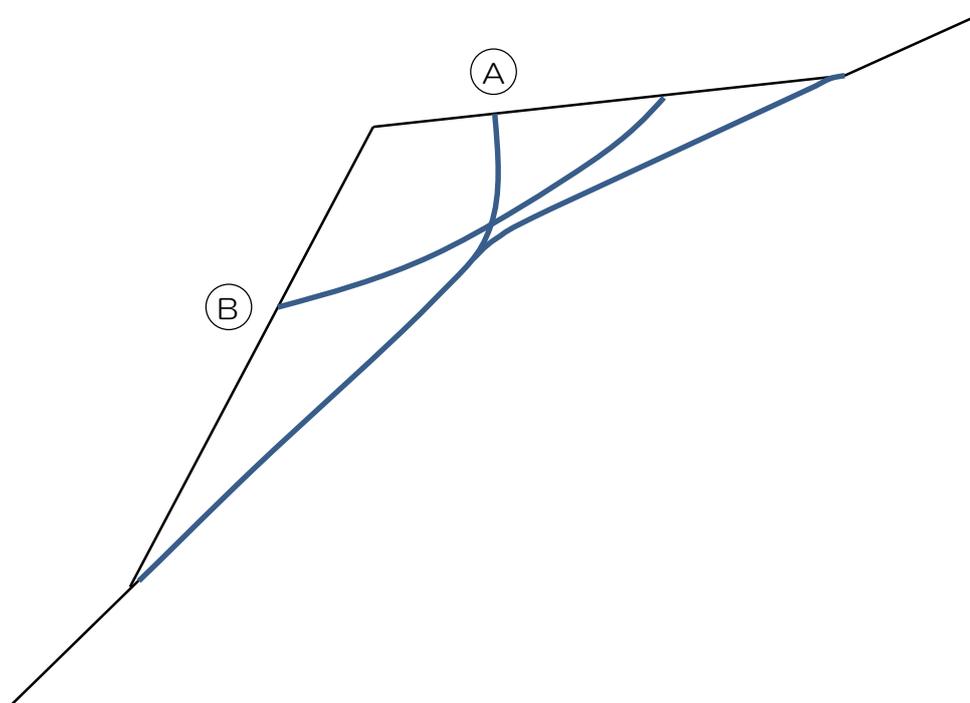


図 6-21 想定されるすべり面

例えば，図 6-21 に示す A のパターンのように，急に勾配が変化している部分周辺を境に末端すべり崩壊をおこす場合や，B のパターンのように斜面に対して構造的に弱い脆弱層や地質的に不連続面で形成された地層がおこす平面すべり崩壊などが考えられる。

そこで，図 6-20 で示した解析モデルをベースに，すべりパターンを細分化し，簡便法にて，すべり面毎の最小安全率を推計した。

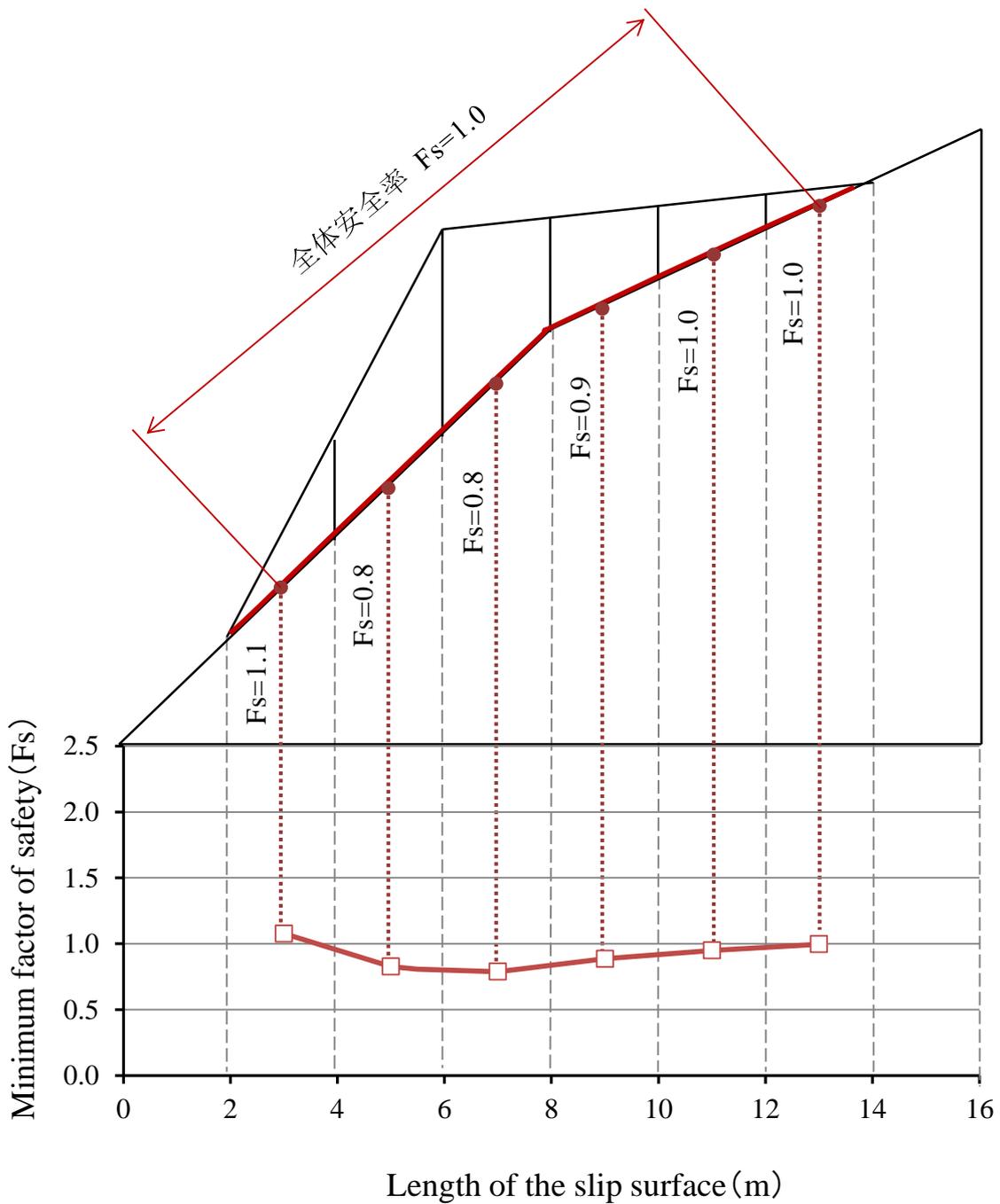


図 6-22 斜面全体の安全率

まず、崩壊前の斜面全体を考える。図 6-22 に示すようにスライス分割し、各スライス底面に作用する力（赤実線部分）を下部から順に最小局所安全率を算出する。斜面中腹の地山面の勾配が変わる付近では、見かけ上安全率が $F_s=1.0$ を下回り、局所破壊のリスクがあるが、斜面全体の安全率は $F_s=1.0$ 以上となるため、斜面は安定している結果になる。

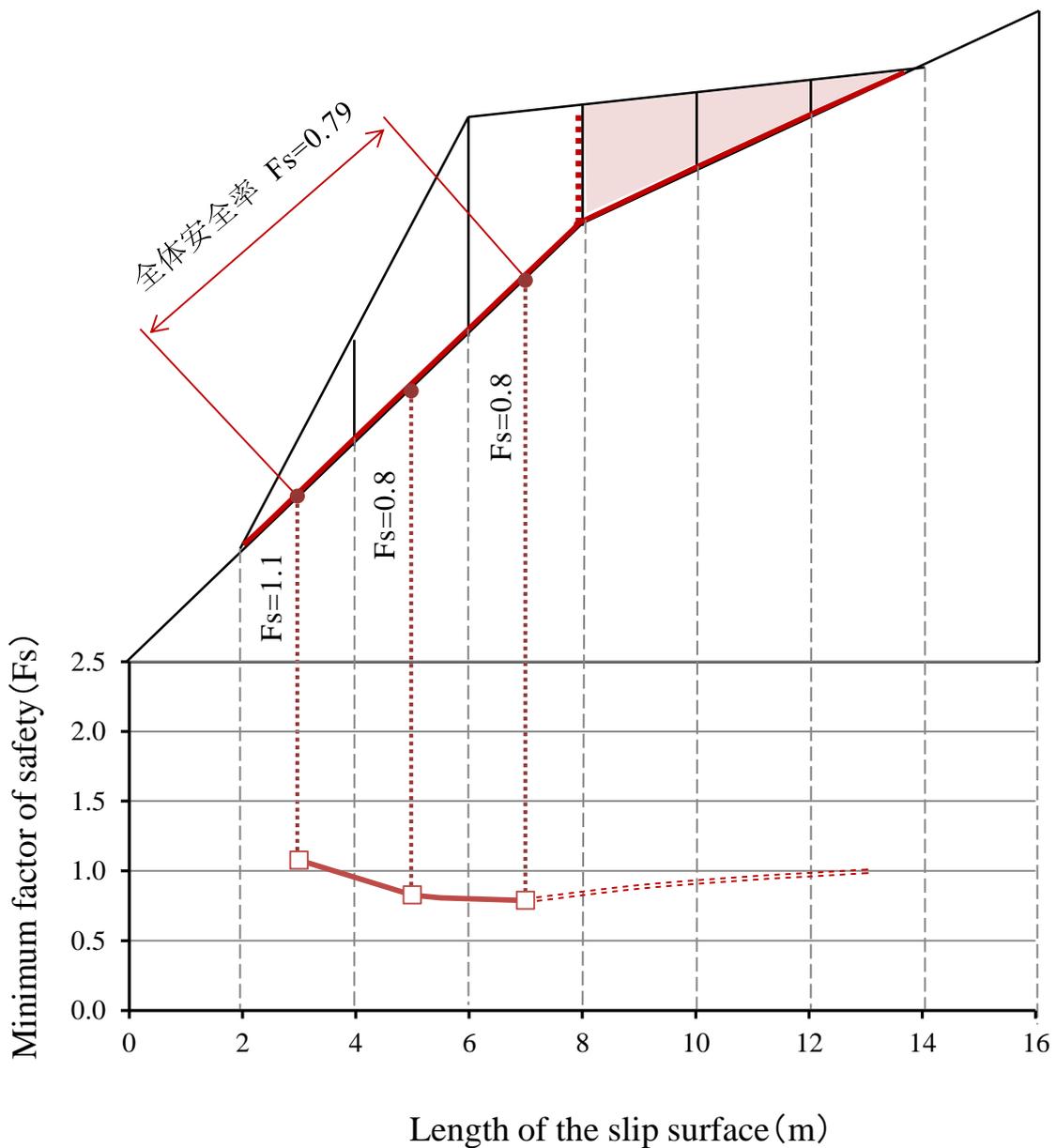


図 6-23 末端すべりが生じた場合の下層部の安全率

しかし、前述したような A パターンの崩壊、すなわち図 6-23 に示す、赤点線部分に末端破壊が生じ、スライスが上層と下層に分断されてしまうと、下層部の全体安全率は $F_s=0.79$ となり、すべりが生じる結果になる。

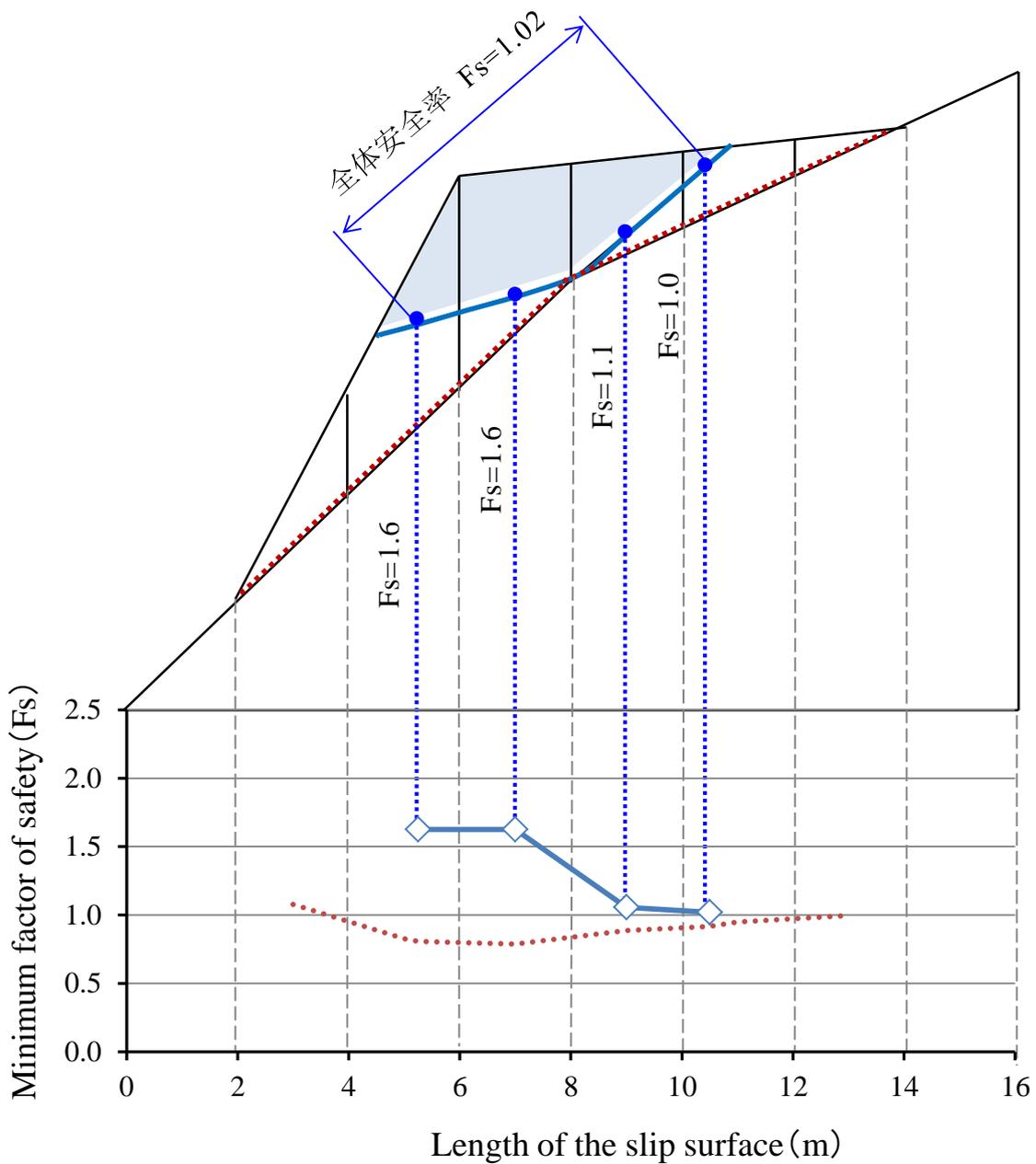


図 6-24 異なる地層面における安全率

次に、図 6-24 に示すように B のパターンの平面すべりについて検討する。青実線部分に不連続面な地層面があり、内部摩擦角が $\phi = 25^\circ$ になっているとする。地層面における安全率は $F_s = 1.0$ 以上となるため、図 6-22 の斜面全体の場合と同様、斜面は安定している結果になる。

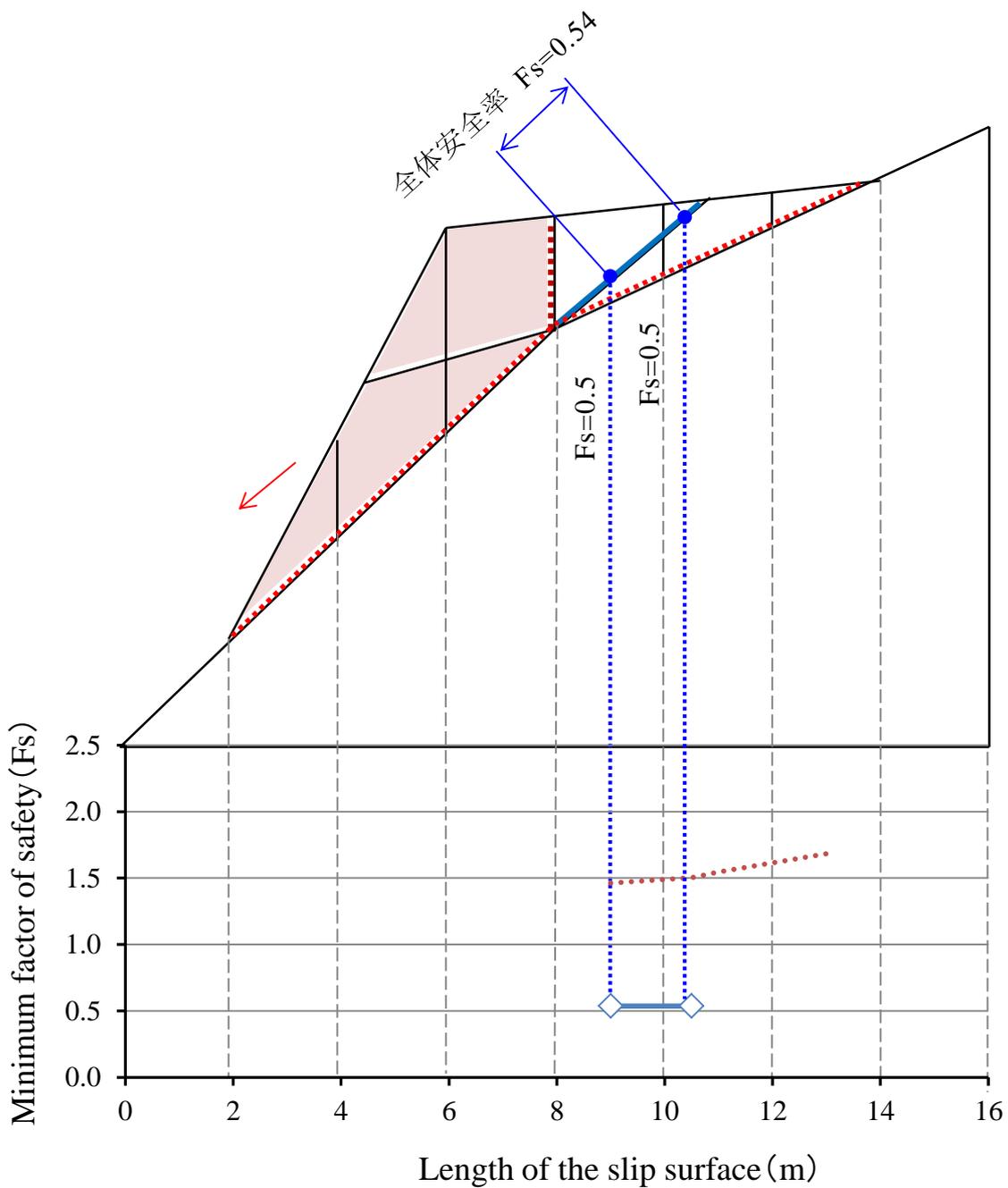


図 6-25 末端すべりが生じた後の上層部の安全率

しかし、図 6-23 で示したような末端破壊が発生し、下層部がすべり落ちてしまうと、図 6-25 に示す青実線部分の安全率が著しく低下し、 $F_s=1.0$ 以下になってしまうので、平面すべりが、同時発生してしまう結果となる。

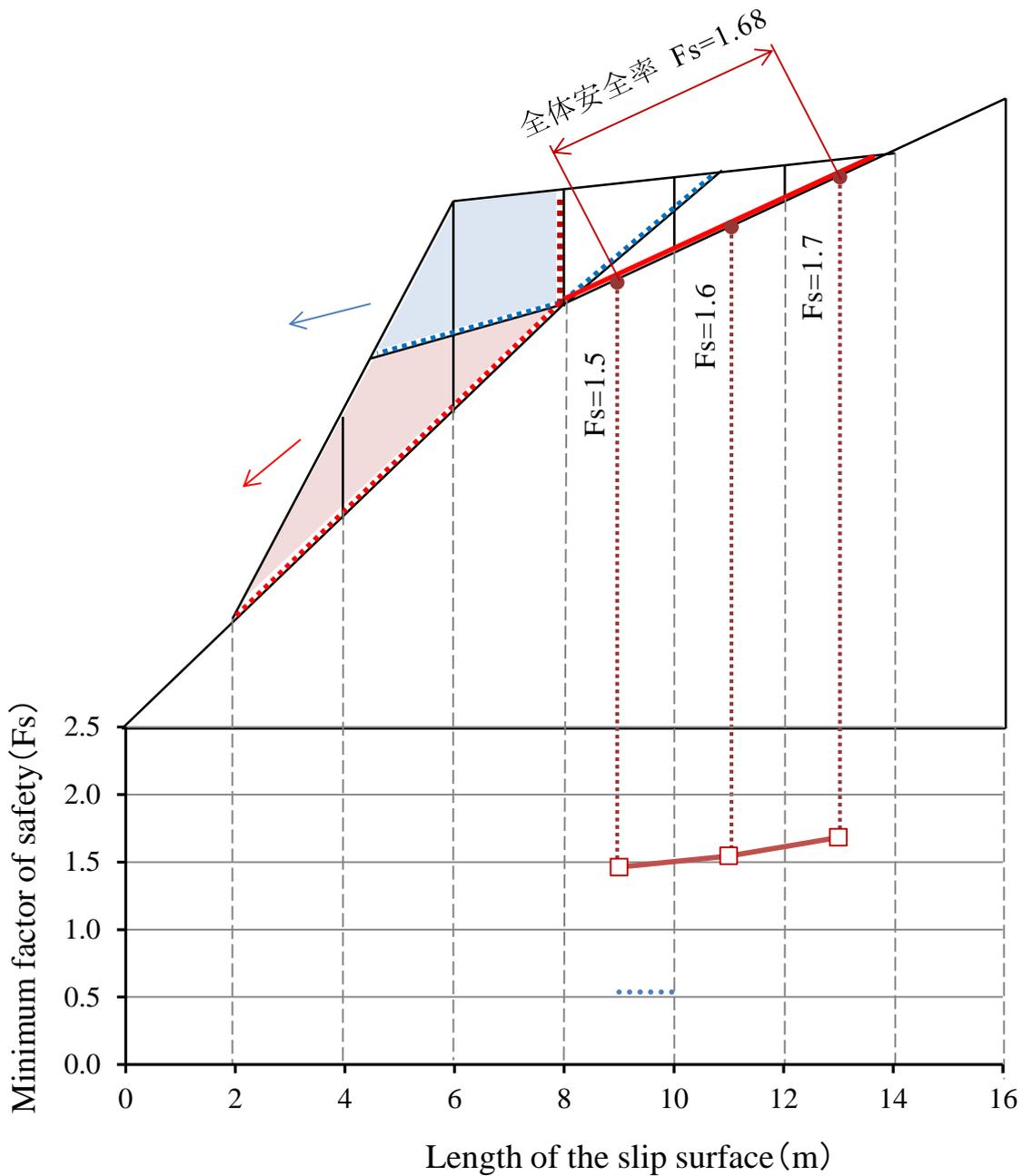


図 6-26 複合すべりが生じた後の上層部の安全率

こうして、A の末端すべりと B の平面すべりが連鎖的に発生すると、最終的には、図 6-26 に示す部分が $F_s=1.0$ 以上になり、斜面に残る結果となる。

ここまでは、すべり面を想定した簡便法による計算結果だが、実際には上部から下部に至るまで様々な崩壊が起きるパターンがあり、その全てを予想しすべり面を想定することは至難の業である。またすべりの発生要因が複合的なものとなる場合は、簡便法などの極限平衡法による手法では限界がある。

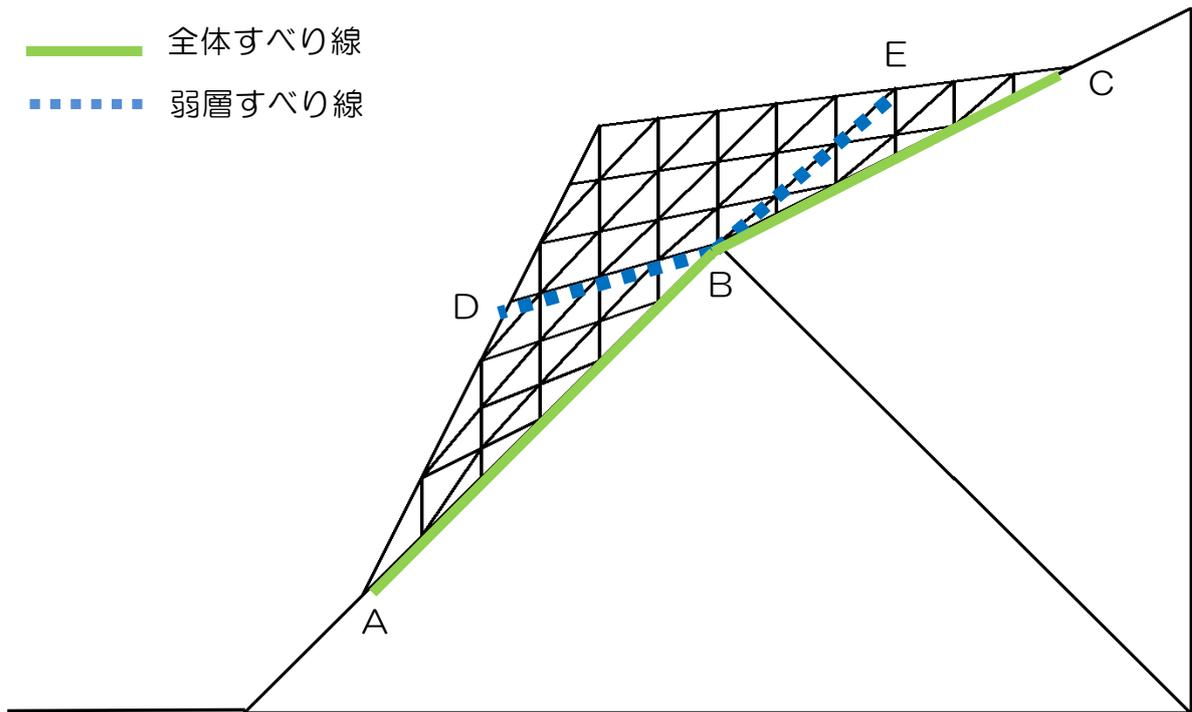


図 6-27 不連続面の設定と摩擦角

そこで、今回のモデルに対して、動的陽解法 RBSM による数値解析を行った。本解析では、図 6-27 のような不連続面に対して、摩擦角をそれぞれ設定し、A-B 間、B-C 間の地山との境界については $\phi = 30^\circ$ 、B-D 間、及び B-E 間の弱層については、 $\phi = 25^\circ$ として計算した。

解析結果から安全率を算出する方法は、基本的に、前例題と同じように、すべり線上に位置する各要素の表面力の総和から求められるが、どのように破壊されるか分からないので、まず崩壊過程を視覚的に把握することにした。その動的挙動を図 6-28 に示す。

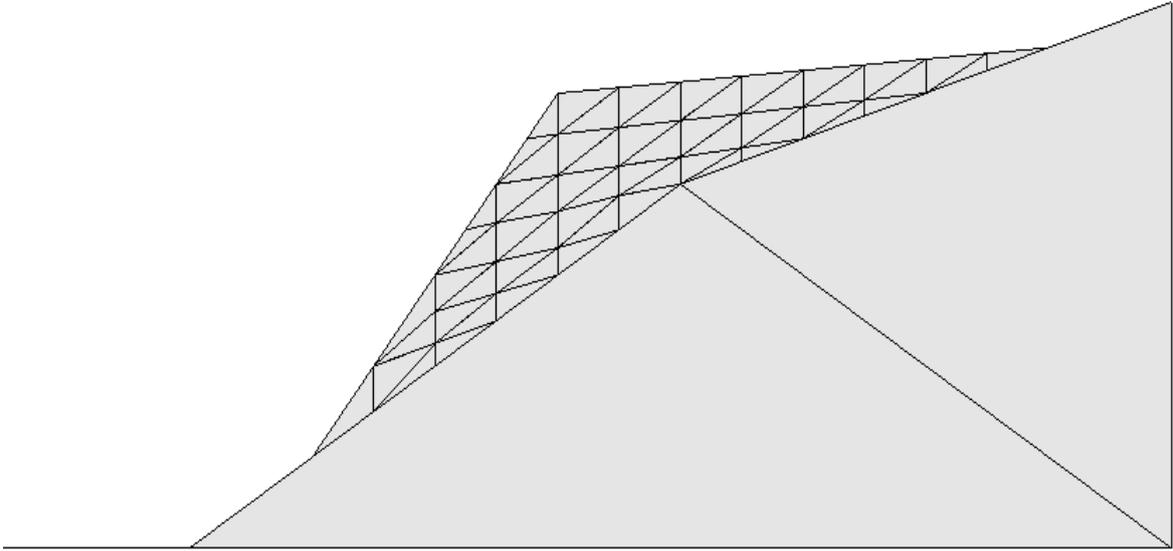


図 6-28 (a) 初期状態

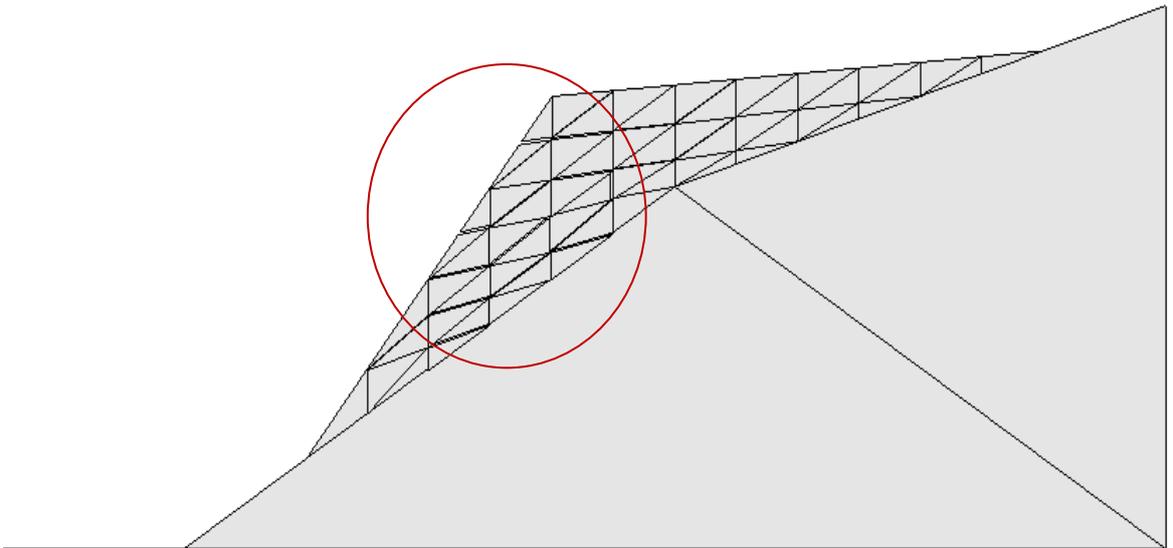


図 6-28 (b) 下層部の破壊発生

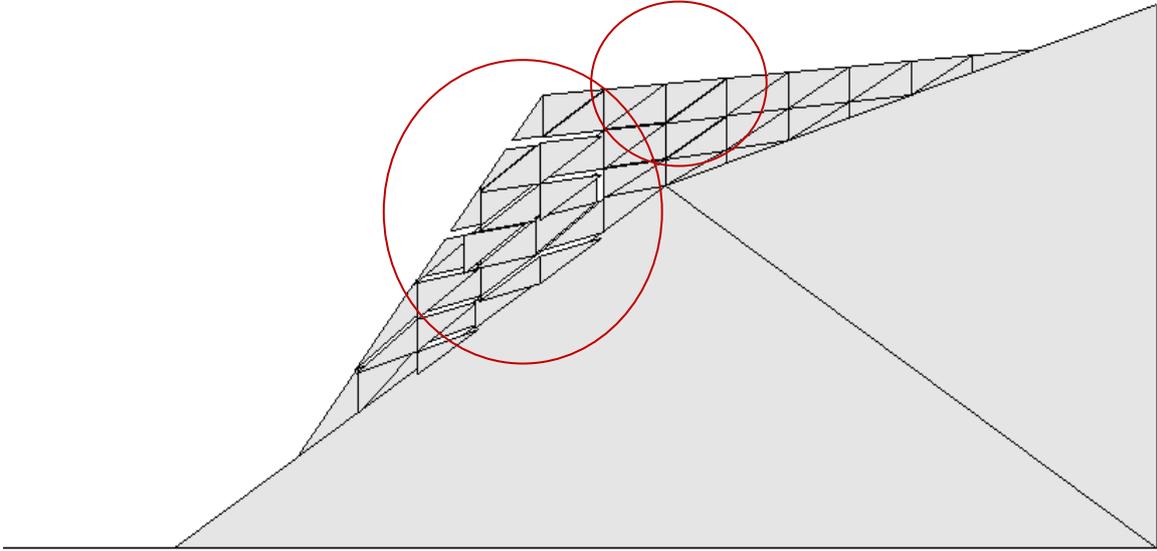


図 6-28 (c) 上層部へのクラック進行

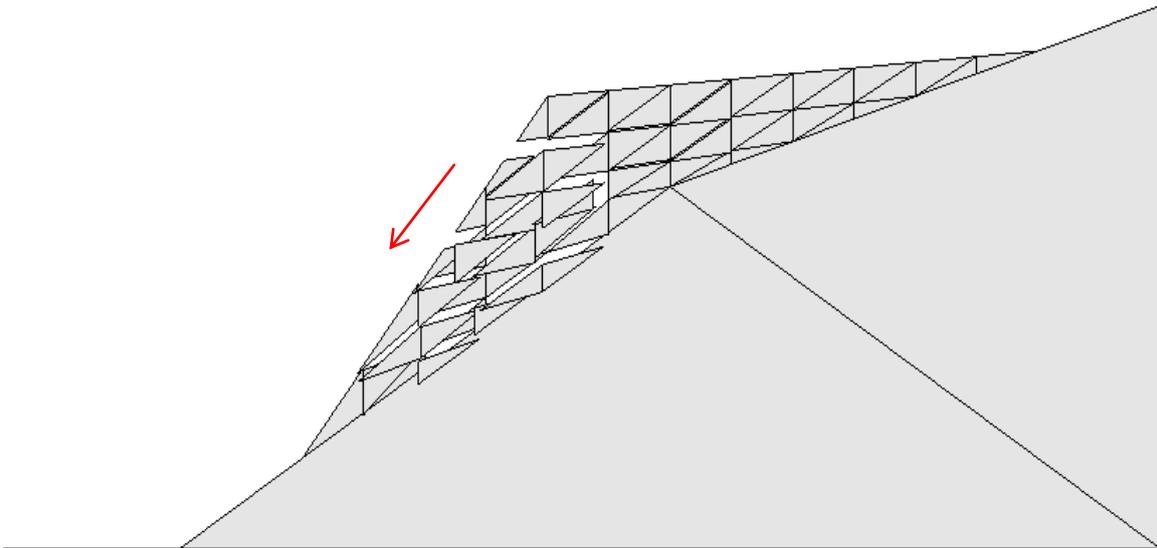


図 6-28 (d) 下層部の流動

ここでは、図 6-28 (b) で示すように、まず斜面下層部の弱層部分で最初の引張破壊が生じるが、これは図 6-22 の最小局所安全率が、最も低くなる場所と概ね同じ位置である。その後、図 6-28 (c) で示すようにクラックが広がり、上層部も徐々に崩壊して行く。そして、図 6-28 (d) のように下層部が流動状態となった様子が描かれている。

こうして、滑る位置が把握できたので、解析結果から得られるすべり線を図 6-29 に示す。一番最初に動く初期すべり線を①、続いて連鎖的に破壊される複合すべり線を②、③とする。初期すべりの要素境界面上におけるせん断応力と垂直応力の関係について図示すると、図 6-30 のようになる。

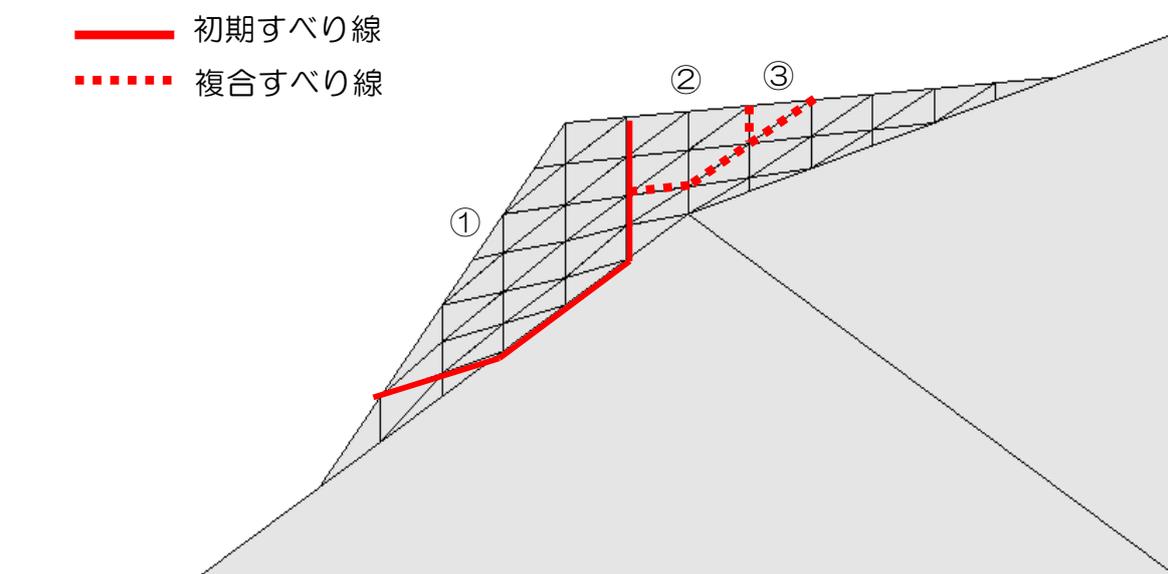


図 6-29 解析結果から得られるすべり線

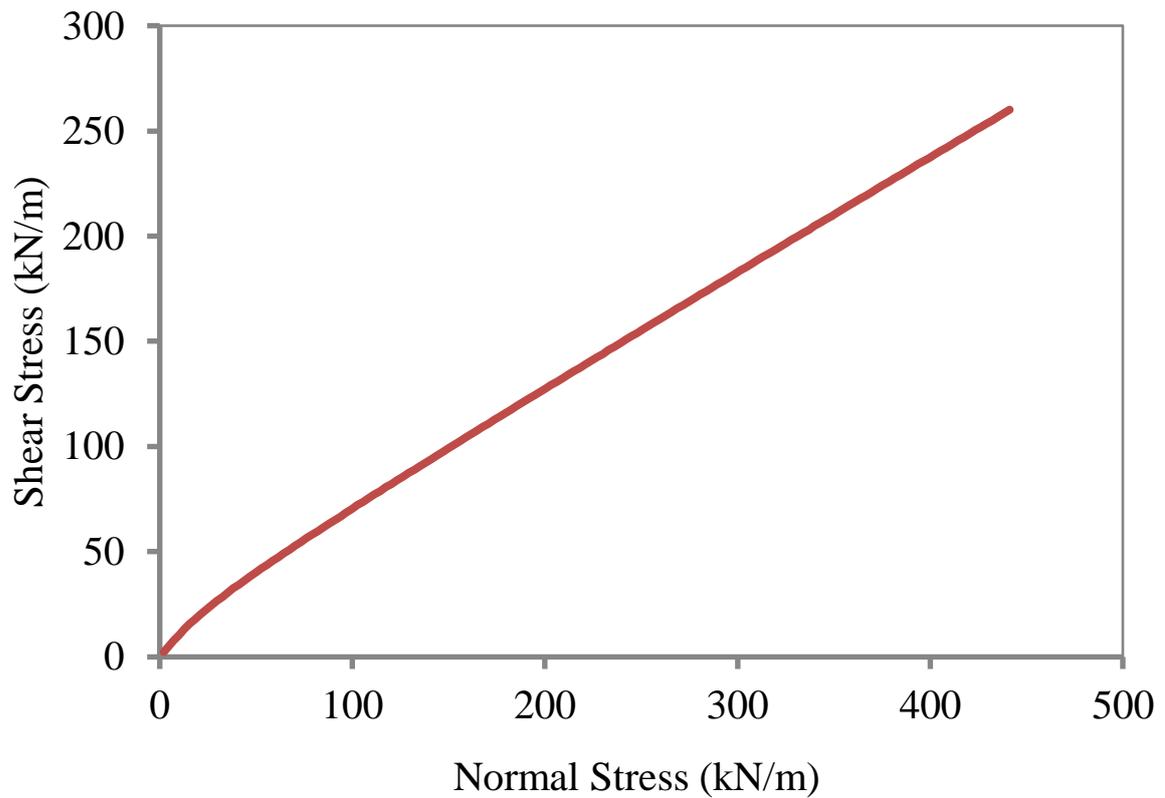


図 6-30 $\tau - \sigma$ の応力状態

その結果, 本解析は図 6-19 の結果と異なり, 僅かではあるものの粘着力を与えているので, 0 から直線上にあがる形にはならないが, おおむねモールクーロンの破壊基準線に沿ったラインで描かれた.

最後に、式(6.2)を適用し、せん断応力に基づく安全率を算出した。動的陽解法 RBSM とこれまで算出した簡便法による安全率の比較を、表 6-5 に示す。今回の結果は、簡便法による斜面全体の解析では $F_s=1.0$ 以上で、安定していると判定される斜面において、動的陽解法 RBSM の解析結果は $F_s=0.98$ となった。もちろん、簡便法においてもさまざまな破壊を想定した解析ケースにおいては、より安全率は低い結果となったが、こうした手法は、実務者の経験値によっては、時に想定外を起こすこともあり得る。そうした面でこうした提案手法のように現象の挙動を確認しつつ、安全率を算出できることのメリットは大きいと考える。

表 6-5 解析結果一覧 (全体安全率)

解析ケース	安全率
提案法 (動的陽解法RBSM)	0.98
簡便法(1) 斜面全体 (図6-22)	1.00
簡便法(2) 末端すべり想定 (図6-23)	0.79
簡便法(3) 異なる地層 (図6-24)	1.02
簡便法(4) 複合すべり上部 (図6-25)	0.54
簡便法(5) 複合すべり下部 (図6-26)	1.68

今回の解析結果では以上のようになったが、複合すべりの解析は、摩擦角や粘着力、引張強度の微妙なバランスによって、大きく解析結果が変わることが考えられる。よって、今後さまざまなケースステディをとおして、今後検証して行くことが大切だが、本研究によって定性的ではあるが、現象を説明できる結果が得られたことから、こうした問題への応用として期待できる。

6.6 まとめ

本章では、動的陽解法 **RBSM** による不連続体解析の評価を行った。

6.2 節では、衝突問題における動的陽解法 **RBSM** の適用性を確認するため、単純ブロックモデルにより、解の精度や安定性を検証した。まず、固いブロックを、自由落下により地面に衝突させ、その時の跳躍運動と運動方程式から導き出される理論解と比較した。その結果、高さを変えて落下させたいずれの場合も、解析解と理論解は一致することが明らかになった。次に、要素と要素が衝突するモデルにおける接触力の計算が、理論どおりの挙動を示すか、ブロック表面の辺と辺が接触するモデルと 45° 回転させて、頂点と辺が接触するモデルを比較し、その挙動を追跡した。その結果、エネルギーは損失していないが、位相に若干のずれが生じることが明らかになった。こうした挙動が、実用上問題となるものかを判断するため、**DEM** でも用いられている円要素モデルによる点接触との比較を行った。その結果 **RBSM** の分布ばねの考え方が、**DEM** のダンパーと同様な役割を果たすため、実用上問題はないレベルに調整可能である。

6.3 節では、衝突問題と同じ物性値の単純ブロックを、任意傾斜角の斜面から、物体力によって滑らせ、滑り始めてからの滑動量を、運動方程式から導き出される理論解と比較した。その結果、いずれの傾斜角から滑らせた場合も、解析解と理論解は一致することが明らかになった。また、斜面とブロック間に摩擦角を設定しても同様の結果が導き出される。このように、本節の結果と 6.1 節と 6.2 節の結果から、第 4 章や第 5 章で示した、計算アルゴリズムの有効性を示すことができた。

6.4 節では、実際の斜面形状に近い複数ブロックモデルにより、傾斜角の異なるすべり面を設定し、動的問題における斜面安定解析への適用性を考察した。この場合の解の精度は、動的挙動から判断することは難しいため、斜面安定解析において一般化されている簡便法により算出される全体安全率と、動的陽解法 **RBSM** の想定すべり面に接する要素の表面力から算出される安全率を比較し、検証を行った。その結果、動的陽解法 **RBSM** に比べ、簡便法によって算出された安全率は低い結果となった。これは、簡便法がすべり面に鉛直に作用する力に対してのつり合いのみを考慮するのに対して、動的陽解法 **RBSM** が、鉛直力に加え、隣接要素間に作用する応力も計算できたことを表している。さらに、計算結果を画像化し、末端の引張クラックや、水平押し出しなど斜面崩壊の過程を再現した。こうして、本提案手法の斜面安定解析への適用性、および破壊問題におけるマルチステージ対応の可能性を示すことができた。

6.5 節では、複数ブロックモデルを発展させ、初生すべり後に斜面が不安定化し、再びす

べり破壊を起こす，複合すべりを想定した解析モデルによる安定解析を行った．複合すべりは，最初に弱層が破壊されることで，その周辺の斜面が不安定化し破壊の連鎖が生じる現象のため，すべり面の想定が必要な簡便法の適用が難しい．現状では，複数のすべり面を仮定し，最小安全率を検索する手法などが提案されているが，実際のところ不明な点が多く，有効な計算手法が確立していない．そこで，逐次的なすべり挙動を追跡でき，さらに離散化極限解析により安全率を求めることができる本提案手法を用いて，複合すべり解析への応用を試みたところ，定性的ではあるが，現象を説明できる結果が得られた．複雑な斜面の崩壊挙動に対しても，本手法は有効に利用できるものと考える．

第7章 結言

自然災害からの防災・減災を考える上で、破壊問題における陽解法の需要が高まっている。破壊が進展して行く過程は、連続体力学では解くことができず、不連続体解析手法である DEM や DDA がよく用いられる。しかし、これらの手法は点接触をベースとしているため、接触や衝突運動が主体となる破壊問題には適しているが、弾性解を得ることが難しく、連続体から不連続体に至る破壊の過程を十分に解明することができない。一方、HPM は面接触をベースとしているため、すべりやせん断破壊が主体となる場合は、効率よく離散化極限解析を行える点で理に適っている。また、弾性解を得ることができるため、その後の塑性・クラックに至る破壊の進展を考慮することができる。しかし、従来の HPM は静的な取り扱いを主とする解析手法であったため、破壊のメカニズムが形成された後の流動状態における動的挙動に対しては対応する事が出来なかった。そこで、RBSM はハイブリッド型仮想仕事の原理を用いた HPM の特殊のケースであるとした修正 RBSM の考え方をさらに拡張し、動的陽解法 RBSM を開発した。統一された定式化によって構造物の崩壊過程を横断的に明らかにするマルチステージ対応の破壊シミュレーションを可能とするための提案である。以下に本研究で得られた成果を総括する。

第2章では、破壊問題における提案手法の位置づけを明確にするため、不連続体を取り扱う手法を整理した。不連続体には、連続体だった固体に破壊が生じ破壊の進行に伴ってメカニズムが形成され、最終的には流動状態となるものと、もともと不連続な固体の集合体のものがあるが、本研究で取り扱う不連続体解析は、前者の連続体・不連続体を横断する手法である。不連続体解析における固体のモデルには、連続体の一部に不連続要素を導入する離散ひびわれモデルと、要素すべてを直接不連続体として取り扱う離散要素モデルとに大別され、さらに離散要素モデルは、DEM や DDA, RBSM, HPM などの代表的な手法に分類される。

DEM, DDA は運動方程式により動的に取り扱っているのに対し、RBSM, HPM は表面力をもとに離散化極限解析を行うモデルであり、剛性方程式により静的に取り扱っている。RBSM は、DEM 同様要素内を剛体と仮定し、要素間をばねで接続しているのに対し、HPM は、DDA と同様要素毎の接続にペナルティ関数を導入することで、要素内を弾性体として取り扱うことを可能にしたモデルである。これら4つのモデルの比較を行うと DEM と DDA, RBSM と HPM はそれぞれよく似た過程で発展を遂げており、DEM と RBSM, DDA と HPM は相関関係にあることが理解される。

近年、そうした離散要素モデルと連続体モデルを組み合わせる混合要素的展開が着目されている。弾塑性解析において汎用的な FEM と DEM と組み合わせた FDEM や、粒子法と組み合わせた PFEM, DDA との特徴を組み合わせた MM などが提案されているが、提案手法は統一された定式化にもとづいて解こうとする点で異なっている。破壊の進展順で考えた時、弾性解から極限值を得るところまでは既に可能となっているが、その先の崩壊挙動を HPM で解くことができない。よって極限解析に重きを置きつつ、その前後の動的挙動を明らかにすることを本研究では重要なテーマとしている。

提案手法の破壊問題への適用性については、斜面安定解析により評価を行う。斜面崩壊は、弾性、塑性そして極限值を超えた後の流動など、各ステージでの挙動が明らかになっているため、マルチステージ対応の検討を行うのに適している。現況、安全率による静的安定計算と崩壊後の動的挙動を予測する解析は別々に行われているが、提案手法では極限解析と動的解析を統一的行うことで、斜面安定解析への適用性を検証している。

第 3 章では、動的問題における運動方程式の定式化を示した。まず、弾性問題の支配方程式を示し、動的問題は加速度による慣性力を物体力として導入することで静力学的に扱うことができるというダランベールの原理に基づき、運動中の釣合い方程式を求める。釣合い方程式に仮想変位を乗じて領域について積分し、その式の左辺第 1 項にガウスの発散定理を適用し、仮想仕事式を導く。次に、変位の連続性に関する付帯条件を Lagrange の未定乗数を用いて仮想仕事式に導入し、ハイブリッド型仮想仕事式を誘導した。ただし、全体座標系から局所座標系への座標変換した相対変位を求め、全体座標系で表されていた付帯条件を、要素境界面に沿った局所座標系の成分に変換したハイブリッド型仮想仕事式とする。

HPM では、部分領域毎に独立な変位場を仮定する。1 次の線形変位場を仮定すると、自由度は、要素毎に独立な剛体変位と剛体回転、ひずみで表される。一方、ひずみの影響を無視し、剛体変位場を仮定すると RBSM になることを示した。Lagrange の未定乗数の導入については、DDA と HPM は、同じペナルティ関数を用いるが、DDA は点で接続しているのに対して、HPM は面で接続している点で異なっていることを示した。最後に、仮定した変位場をハイブリッド型の仮想仕事式に提供することで離散化方程式を誘導し、各要素剛性と要素境界辺に関する付帯条件の関係を組み合わせた剛性行列に質量行列加えることで、空間に関して離散化された運動方程式を導出した。

第 4 章では、接触と破壊の条件を示した。まず、修正 RBSM の考え方を応用し、離散化された運動方程式のひずみの影響を無視することで、RBSM と同じ剛体変位のための運動方程式を誘導した。また、着目要素と隣接要素の連立方程式の関係から、要素毎に独立した応力を表面力により求められることを示した。そして、隣接要素と接続状態にある場合は、それぞれの要素

の表面力から求められる接触力の総和により要素間作用力を算出した。次に、要素が運動により、境界や別の要素に衝突する場合の、接触判定と接触力の算出法を定式化した。RBSM は DEM や DDA など採用されている点接触とは異なり、面接触をベースとしているので接触判定としては、線分交差判定による方法を適用した。貫入量を求めるための基準となる交点座標については、線分交差判定で用いた座標と三角形の面積比から算出する方法を示した。こうして得られた貫入量に、ばね定数を乗じれば接触力が得られる。

最後に、すべりや破壊を表現するための破壊条件と摩擦特性を示した。すなわち、破壊基準としては、モールクーロンの条件を示し、摩擦については、せん断方向にスライダを設定し、要素表面に作用するせん断力が降伏関数を超える場合はスライダが摩擦抵抗力として抵抗、降伏関数より小さい場合はせん断ばねにより相対変位が固定されることを示した。また、引張破壊については、表面力が引張強度を超えた時に全解放することを示した。

第5章では、動的問題の時間積分法を示した。まず、陰解法について、その代表的な手法である Newmark の β 法を用いて、離散化方程式を導出した。陽解法については、中央差分法による離散化方程式を示した。この方法は連立方程式を解く必要がないため計算効率上有利であり、RBSM は質量行列が対角成分のみとなるため、完全に陽に計算を進めることができる。中央差分法は別に、加速度を未知数として、隣接要素からの接触力の総和をもとに、時間増分 Δt で積分し、要素位置を更新していく DEM 的アプローチもある。ただし、これら陽解法には、弾性波速度が最小サイズの要素を伝播する時間よりも短い時間増分を設定しなければならない安定条件の制約があるため、ペナルティ関数を用いる HPM や DDA では必ずしも計算効率上有利とならない。

こうして、運動方程式、接触力の計算、すべりの計算を要素単位で行い、要素の位置を更新する手続きを、時間刻み に対して、繰り返し行う動的問題の計算アルゴリズムができた。しかし時間積分法に関しては陰解法がよいか陽解法がよいかの課題が残る。そこで、簡易な積層ブロックモデルにおける一定荷重状態の弾性問題に、陽解法・陰解法をそれぞれ適用し、解の精度と安定性を比較した。その結果、変位、速度の解の精度は、完全に一致したが、加速度においては誤差が生じた。そこで加速度における解への影響に関して詳しい分析を行った結果、陰解法も、陽解法と同等のクーラン条件を満たす方がよい場合もあることが確認された。不連続体解析において、弾塑性解析の場合は、陰解法や中央差分による陽解法で特に問題はないが、衝突問題が生じる流動側の解析においては、加速度を未知数とした蛙跳び法による時間積分が必要となるため、離散体としての取り扱いを適用することになる。その際、僅かな接触でクラックが発生する問題などにおいては、安定条件を無視することはできないため、本研究では、動的陽解法を統一的に適用することにした。

第 6 章では、動的陽解法 RBSM による不連続体解析の適用性について検証した。まず、単純ブロックを自由落下させ、地面や他のブロックに衝突させた時の跳躍運動を運動方程式から導き出される理論解と比較した。その結果、高さを変えて落下させたいずれのケースでも、解析解と理論解は一致した。このモデルではさらに面接触の特性を調べるため、頂点と辺が接触する場合の動的挙動を、DEM でよく用いられる円要素モデルによる点接触と比較した。その結果 RBSM の分布ばねの考えが、DEM のダンパーと同様な役割を果たすため、実用上問題はないレベルに調整可能であることが明らかになった。

次に、同じ物性値の単純ブロックを、任意傾斜角の斜面から、物体力によって滑らせ、滑り始めてからの滑動量を、運動方程式から導き出される理論解と比較した。その結果、異なる傾斜角から滑らせたいずれのケースでも、解析解と理論解は一致し、斜面とブロック間に摩擦角を設定した場合も同様の結果が導き出される。こうして、衝突・滑動いずれのケーススタディにおいても動的陽解法 RBSM の有効性を確認する基礎的な裏付けを得た。

基礎的な裏付けを得たところで、実際の斜面形状に近い複数ブロックモデルにより、傾斜角の異なるすべり面を設定し、動的問題における斜面安定解析への適用性を考察した。この場合の解の精度は、簡便法により算出される全体安全率と、動的陽解法 RBSM の想定すべり面に接する要素の表面力から算出される安全率を比較し、検証を行った。その結果、動的陽解法 RBSM に比べ、簡便法によって算出された安全率は低い結果となった。これは、動的陽解法 RBSM が、鉛直力に加え、隣接要素間に作用する応力も計算できたことを示唆している。さらに、計算結果を画像化し、末端の引張クラックや、水平押し出しなど斜面崩壊の過程を再現した。こうして斜面安定解析としての適用性とマルチステージの対応性を示すことができた。この複数ブロックモデルを発展させ、複合すべりを想定した解析モデルによる安定解析を行った。複合すべりは、最初に弱層が破壊されることで、その周辺の斜面が不安定化し破壊の連鎖が生じる現象のため、すべり面の想定が必要な簡便法の適用が難しく、現在、有効な計算手法が確立していない。そこで、逐次的なすべり挙動を追跡でき、さらに離散化極限解析により安全率を求めることができる本提案手法を用いて、複合すべり解析への応用を試みたところ、定性的ではあるが、現象を説明できる結果が得られた。複雑な斜面の崩壊挙動に対しても、本手法は有効に利用できるものと考えられる。

総括として、本研究では、統一された定式化にもとづいて連続体から不連続体に至る構造物の崩壊過程を横断的に解析する手法として、動的陽解法による不連続体解析手法の計算アルゴリズムを示し、単純ブロックモデルや複層ブロックモデルによる解析例から、崩壊挙動の再現し、また同時に極限荷重による安全評価を行う方法を提案した。その結果、基礎的問題を通して、提案手法のアルゴリズムの有効性を確認するとともに、実例に近いモデルから、これまで

評価することが難しかった複合すべりなど、複雑な崩壊挙動に対してもその適用性を明らかにすることができた。RBSMは極限解析として長年実用化されており、数々の解析実績によってその信頼性が裏付けされているが、今回示した提案手法は、それらRBSMの考え方を発展させたものであることから、実務化への発展を強く期待させるものである。

参考文献

- 1) 内閣府：平成 26 年度の防災に関する計画，平成 26 年度版防災白書，2014
- 2) Martin, H.C. : Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. *McGraw Hill*, 1966
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. : The Finite Element Method in Continuum and. Structural Mechanics. *McGraw Hill*, 1967
- 4) Goodman, R.E., Taylor, R.L. and Brekke, T.L. : A model for the mechanics of jointed rock, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Proceedings of the ASCE, Vol.94, No.SM3. pp.637-659, 1968
- 5) Cundall, P.A. : A Computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of International Society of Rock Mechanics*, Vol.1, Paper No.II-1, pp.129-136, 1971
- 6) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol.29, No.1, pp.47-65, 1979
- 7) Cundall, P.A. : BALL - A program to model granular media using the distinct element method, *Technical Note, Advanced Technology Group, Dames & Moore*, London
- 8) 大西有三, 谷本親伯, 吉岡淳, 刈谷敬三 : 個別要素法(Distinct Element Method) とその岩盤工学への応用について, 土木学会第 14 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.51-55, 1982
- 9) 伯野元彦 : 破壊のシミュレーション, 森北出版, P230, 1997
- 10) 岸野佑次 : 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的解析, 土木学会論文報告集, No.406/III-9, pp.97-106, 1989
- 11) Shi, G.H. and Goodman, R.E. : Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989
- 12) 佐々木猛, 大西有三, 吉中龍之進 : 不連続変形法(DDA)とその岩盤工学への適用に関する研究, 土木学会論文集, No.493/III-27, pp.11-20, 1994
- 13) 大西有三, 佐々木猛, Shi, G.H. : 不連続変形法(DDA), 丸善, 2005
- 14) Kawai, T. : New element models in discrete structural analysis , *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, No.141, pp.187-193, 1977
- 15) 都井裕 : 鋼構造の離散化極限解析, 培風館, 1990

- 16) 川井忠彦, 竹内則雄 : 離散化極限解析プログラミング, 培風館, 1990
- 17) 竹内則雄 : 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991
- 18) 竹内則雄他 : 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析, 丸善, 2005
- 19) 八木唯夫, 竹内則雄 : RBSM と DEM の混合要素について, 計算工学講演会論文集, Vol.18, 2013
- 20) Yagi, T., Takeuchi, N. and Yamamura, K. : Development of combined RBSM-DEM, *Frontiers of Discontinuous Numerical Methods and Practical Simulations in Engineering and Disaster Prevention*, pp.419-425, 2013
- 21) 八木唯夫, 山村和人, 竹内則雄 : ハイブリッド型仮想仕事の原理による動的陽解法 RBSM, 応用力学シンポジウム講演概要集, Vol.17, 2014
- 22) Yagi, T., Takeuchi, N., Yamamura, K., and Kusabuka, M. : An explicit dynamic method for a discrete element model using the principle of hybrid-type virtual work, *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics*, Barcelona, Spain, 2014
- 23) Munjiza, A., Owen, D.R.J. and Bicanic, N. : A combined finite/discrete element method in transient dynamics of fracturing solids, *Engineering Computations*, Vol.12, pp145-174, 1995
- 24) Munjiza, A. : The Combined Finite-Discrete Element Method, *John Wiley and Sons*, 2004
- 25) Munjiza, A., Knight, E.E. and Rougier, E. : Computational Mechanics of Discontinua, *John Wiley and Sons*, 2011
- 26) Munjiza, A., Lei, Z., Divic, V., and Peros, B. : Fracture and fragmentation of thin shells using the combined finite-discrete element method, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 95, No.6, pp.478-498, 2013
- 27) Ngo, D. and Scordelis, A.C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, *Journal of the American Concrete Institute*, Vol.64, No.3, pp152-163, 1967
- 28) Chen, W. F. : Plasticity in Reinforced Concrete, *McGraw-Hill*, pp.498, 1982
- 29) Lemos, J.V. : Recent Developments and Future Trends in Distinct Element Methods - UDEC/3DEC and PFC Codes. *Advances in Discontinuous Numerical Methods and Applications in Geomechanics and Geoengineering*, pp.17-29, 2011
- 30) Matsushima, T., Katagiri, J., Uesugi, K., Tsuchiyama, A. and Nakano, T. : 3-D Shape Characterization and Image-based DEM simulation of Lunar soil simulant FJS-1. *Journal of Aerospace Engineering*, ASCE 22(1), pp.15-23, 2009
- 31) 清野純史, 三浦房紀, 八木宏晃 : 個別要素法を用いた被災時の避難行動シミュレーション, 土木学会論文集, 第 591 号, pp.365-378, 1998

- 32) 瀧本浩一：個別要素法を用いたシミュレーションによる避難時の車椅子使用者と他の避難者との影響に関する一考察，日本建築学会環境系論文集，第 566 号，pp.9-15，2003
- 33) 後藤仁志，原田英治，久保有希，酒井哲郎：個別要素法型群衆行動モデルによる津波時の避難シミュレーション，土木学会海岸工学論文集，Vol.51，pp.1261-1265，2004
- 34) 小山倫史，布川哲也，西山哲，大西有三：不連続変形法（DDA）における数値減衰特性に関する研究，土木学会論文集 C，Vol.66，No.2，pp.299-311，2010
- 35) 小山倫史，赤尾悟史，大西有三，西山哲：岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法（DDA）の適用に関する研究，土木学会論文集 C，Vol.65，No.3，pp.644-662，2009
- 36) 竹内則雄，草深守人，武田洋，佐藤一雄，川井忠彦：ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析，土木学会構造工学論文集，Vol.46A，pp.261-270，2000
- 37) 竹内則雄，矢田敬，草深守人，武田洋：ペナルティ関数を用いた浸透流問題の解析手法の開発，日本計算工学会論文集（Transactions of JSCES Paper No.20000023），Vol.2000，pp.163-170，2000
- 38) 竹内則雄，大木裕久，上林厚志，草深守人：ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析，日本計算工学会論文集，Paper No.20010002，2001
- 39) 大木裕久，竹内則雄：ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析，日本計算工学会論文集(Transactions of JSCES Paper No.20060020)，pp.1-10，2006
- 40) 見原理一，竹内則雄，草深守人：2 次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発，土木学会構造工学論文集，Vol.51A，pp.249-257，2005
- 41) 竹内則雄，田尻康之，山村和人：剛体ばねモデルにおける要素内応力の評価法について，法政大学情報メディア教育研究センター研究報告，Vol.22，pp.7-14，2009
- 42) 田尻康之，山村和人，竹内則雄：ハイブリッド型仮想仕事の原理を用いた RBSM の要素内応力の評価，計算工学講演会論文集，Vol.14，No.2，pp.691-694，2009
- 43) 田尻康之，山村和人，竹内則雄：ハイブリッド型仮想仕事の原理による修正 RBSM の開発，構造工学論文集，Vol.56A，pp.169-178，2010
- 44) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，Vol.1989，No.406，pp.97-106，1989
- 45) 八木唯夫，山村和人，竹内則雄：動的陰解法と陽解法による HPM の解の精度について，計算工学講演会論文集，Vol.16，2011
- 46) Yagi, T., Takeuchi, N. and Yamamura, K. : On accuracy of solution for explicit and implicit dynamic formulation with hybrid-type penalty method, *Advances in Discontinuous Numerical Methods and*

- Applications in Geomechanics and Geoengineering*, pp.419-425, 2011
- 47) Yagi, T. and Takeuchi, N. : On accuracy of solution for dynamic explicit method using semi-explicit algorithm with Hybrid-type Penalty Method, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Design in Engineering*, Jeju, Korea, pp.240, 2012
- 48) Yagi, T., Takeuchi, N. Yamamura, K. and Hamasaki, E. : Discrete Element Model Using Dynamic Explicit Scheme with RBSPM, *Proc. of Computational Engineering and Science for Safety and Environmental Problems*, Sendai, Japan, 2014
- 49) Monaghan, J. J. : An Introduction to SPH, *Computer Physics Communications*, Vol.48, pp.89-96, 1988
- 50) 越塚誠一 : 粒子法, 丸善, 2005
- 51) Onate, E., Idelsohn, S.R., Del Pin, F. and Aubry, R. : The particle finite element method. An overview, *International Journal of Computational Methods*, Vol. 1, No. 2, pp. 267-307, 2004
- 52) Onate, E., Idelsohn, S.R., Celigueta, M.A., Rossi, R., Marti, J., Carbonell, J.M., Ryzakov, P. and Suárez, B. : Advanced in the particle finite element method (PFEM) for solving coupled problems in engineering, *Particle-Based Methods*, Springer, pp. 1-49, 2011
- 53) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing*, Report, No. 92-1, U.S. Army Research Office, 1991
- 54) Miki, S., Sasaki, T., Koyama, T., Nishiyama, S., Ohnishi, Y. : Development of Coupled Discontinuous Deformation analysis and Numerical Manifold Method (NMM-DDA), *International Journal of Computational Methods*, Vol.7, Issue 1, pp.131-150, 2010
- 55) 大西有三, 佐々木猛 : Manifold 法による岩盤問題への適用性検討, 計算工学講演会論文集, Vol.1, No.2, pp.901-904, 1996
- 56) 竹内則雄, 濱崎英作 : 斜面災害とシミュレーション, 計算工学講演会論文集, Vol.6, No.3, pp.8-11, 2001
- 57) Fellenius, W. : Calculation of the Stability of Earth Dams, *Proceedings of the Second Congress of Large Dams*, Vol.4, pp.445-463, 1936
- 58) Bishop, A.W. : The use of slip circles in stability analysis of slope, *Geotechnique*, Vol.5, No.1, pp.7-17, 1955
- 59) 濱崎英作, 竹内則雄, 大西有三 : 三次元斜面安定問題に対する簡易離散化極限解析法の開発, 地すべり, Vol.42, No.5, pp.9-17, 2006
- 60) 鷺津久一郎 : 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会, 培風館, 1972
- 61) Arnold, D.N.: An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal*

on numerical analysis, Vol.19, No.4: pp.742-1760, 1982

- 62) 竹内則雄：顎関節の接触圧解析システムの開発，法政大学計算科学研究センター研究報告，Vol.13, pp.207-212, 2000
- 63) Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D.: Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002.
- 64) 宍戸悠人，柴田朝子，竹内則雄：ハイブリッド型ペナルティ法による動的応答解析，法政大学情報メディア教育研究センター研究報告，23, pp.9-15, 2010
- 65) Belytschko, T., Lin, J.I. and Tsay, C.S. : Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42, pp.225-251, 1984

謝 辞

本研究を行うにあたり，指導教員である法政大学大学院 デザイン工学研究科 竹内則雄 教授には，御自身が御多忙にも関わらず終始懇切丁寧な御指導，御助言を賜りました．薄学である著者が本論文を提出することができたのは，全て竹内則雄 教授による御指導の賜物であると感謝し，深く御礼申し上げます．

本論文の審査にあたり，法政大学大学院 デザイン工学研究科 吉田長行 教授，酒井久和 教授，東北大学大学院 工学研究科 寺田賢二郎 教授には，終始懇切な御指導，御助言，そして論文作成に際して温かな激励の御言葉を頂きました．

また，博士課程で3年間共に学び励まし合ってきた藤原良博氏，共同研究者として活動を支えてくださった法政大学名誉教授 草深守人 教授，新日本製鐵 山村和人氏，竹中工務店技術研究所 上林厚志氏，他の皆様の御協力に心から感謝いたします．

さらに，法政大学大学院での研究生活に際して，石本建築事務所 執行役員 木村博則氏をはじめ，関係者の皆様には，業務と学業を両立させるため，多くの御支援，御助言を賜りました．ここに深く感謝いたします．

最後に，本論文を作成するにあたり，引用・参考文献に挙げた数多くの研究を参考にさせて頂きました．引用および転載させて頂いた著者の方々には心より厚く御礼申し上げます．