

モデル理論における新たな構成法の構築

池田, 宏一郎 / IKEDA, Koichiro

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

科学研究費助成事業 研究成果報告書

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2014-06

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：32675

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540164

研究課題名(和文) モデル理論における新たな構成法の構築

研究課題名(英文) A study of a new method of construction in model theory

研究代表者

池田 宏一郎 (IKEDA, Koichiro)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：60332029

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円、(間接経費) 660,000円

研究成果の概要(和文)：真に超安定なジェネリック構造は存在しないという結果を得ることができた。この結果はBaldwinの予想の否定的解決となっている。また同時に、安定なジェネリック構造が飽和ならば真に安定かあるいは ω 安定になるという結果も得ることができた。さらに、Baldwin氏との共同研究により、飽和ジェネリック構造はSOP₄をもたないことを証明することができた。この結果はEvans-Wangの定理の真の拡張になっている。また、桔梗宏孝氏とともにジェネリック構造のモデル完全性について研究し、Hrushovskiの可算範疇的単純理論はモデル完全であることを証明することができた。

研究成果の概要(英文)：Baldwin's conjecture states that any stable generic structure is strictly stable or ω -stable. For this conjecture, I proved that there was no generic structure whose theory was strictly superstable. This result means that the conjecture is solved negatively. I also proved that if a stable generic structure was saturated, then it was strictly stable or ω -stable. Evans and Wang showed that an ω -categorical generic structure did not have SOP₄. To generalize their result, Baldwin and I proved that a saturated generic structure did not have SOP₄. We also gave an example of a generic structure which was saturated but not ω -categorical. I had studied the model completeness of generic structures in cooperation with Kikyo, and then we proved that Hrushovski's simple ω -categorical generic structure was model complete.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：モデル理論 数理論理学 数学基礎論

様式 C-19、F-19、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

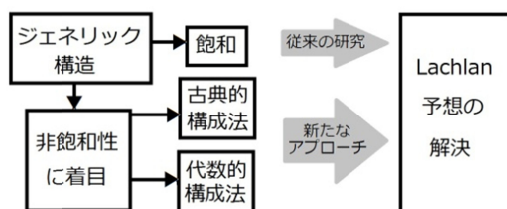
ジェネリック構成法は Hrushovski により約 20 年前に開発された無限構造を作る方法である。Hrushovski はこの構成法を用いて、モデル理論の 2 つの有名な予想を解決した。また、他のモデル理論研究者もジェネリック構成法を改良するなどして、多くの興味深い例を構成したが、有名な未解決予想である Lachlan 予想 (安定な理論の可算モデルの個数は 1 個か無限個になるという予想) を解決するには至っていない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ジェネリック構成法を用いて Lachlan 予想の解決に一步でも近づくことである。そして、非飽和ジェネリック構造はその解決のきっかけのひとつになると考える。しかしながら、研究代表者は研究期間内に Lachlan 予想の解決が困難であることも十分に認識している。そこで 2 つの中間目標を置いた。

- ・目標 1. 非飽和ジェネリック構造の例を集める。
- ・目標 2. 非飽和ジェネリック構造の新たな構成法を開発する。

いままで知られているジェネリック構造の多くは飽和性を満たしている。飽和性をもつことは多くの良い点をもつが、いままでにない特徴をもつ構造を作るためには、非飽和性をもつジェネリック構造を作る必要があると考えた。そして、本研究の最終目標である Lachlan 予想の解決に到達しなくても、2 つの中間目標を置くことで、別の結果を得られるのではないかと考えた。



3. 研究の方法

(1) 在外研究中 (1 年目, 2 年目, アメリカ) は主にイリノイ大学シカゴ校の Baldwin 氏とともに毎週、研究打ち合わせを行い、その成果を UIC Logic Seminar で発表した。また、研究領域が近いメリーランド大学の Laskowski 氏とも研究打ち合わせを行い、得られた結果を Maryland Logic Seminar で発表した。神戸大学の桔梗宏孝氏 (連携研究者) とは主にメールで研究打ち合わせを行ったが、研究代表者が一時帰国した際には、RIMS 研究会で研究打ち合わせを行った。筑波大学の坪井明人氏 (連携研究者) と RIMS 研究会において打ち合わせを行った。また、筑波大の竹内耕太氏とは、Baldwin 氏とともに

にイリノイ大学シカゴ校にて研究打ち合わせを行った。

(2) 帰国後 (3 年目, 日本) は、本研究成果をまとめるために、多くの研究会に参加し、研究発表を行った。まず、夏に開催されるモデル理論の研究会に参加し、連携研究者の坪井氏および桔梗氏を含む、多くの国内研究者と討論し、得られた結果の修正を行った。そして、まとめた結果を日本数学会特別講演、アジア論理会議特別講演、RIMS 研究会で発表した。

4. 研究成果

(1) Shelah の結果により、非単純理論は強順序性 (SOP_n) と呼ばれる概念でさらに分類できることが知られていた。そして、ジェネリック構造が強順序性によってどのように分類されるかは興味深い問題である。Evans-Wang はジェネリック構造が可算範疇的であるとき、その理論は SOP₄ をもたないことを証明した。そこで研究代表者はイリノイ大学シカゴ校の Baldwin 氏とともにこの結果の一般化を試み、次の結果を得ることができた。

・定理 1. ジェネリック構造が飽和であるとき、その理論は SOP₄ をもたない。

一般に、無限構造が可算範疇的であるとき、その構造は飽和であるが、その逆は成り立たない。ジェネリック構造においても逆が成り立たない例が存在する。よって定理 1 は Evans-Wang の結果の真の拡張になっている。

この結果は、研究会④、⑤、⑦、⑨、⑩で発表され、論文④としてまとめられた。また、この結果のいくつかの部分で改良し、海外学術雑誌に投稿準備中である。

(2) これまでジェネリック構成法により多くの興味深い安定構造が作られてきたが、それらはすべて真に安定か ω 安定であった。そこで Baldwin は、ジェネリック安定構造で真に超安定なものは存在しないと予想した。研究代表者はこの予想に対して次の 2 つの結果を得ることができた。

・定理 2. 真に超安定なジェネリック構造が存在する。

・定理 3. ジェネリック安定構造が飽和ならば、その理論は真に安定か ω 安定になる。

定理 2 は Baldwin の予想が成り立たないことを示し、定理 3 は飽和という条件の下では Baldwin の予想は成り立つことを示している。この結果は研究会③、④で発表され、論文③、⑥としてまとめられた。

定理 2 で構成された例は、独立関係に関して自明であった。しかし、これまで作られたジェネリック構造の多くが非自明性を満たしており、Baldwin の予想の反例として非自明な例を作れるかどうかは自然な問題である。そこで、研究代表者は神戸大学の桔梗宏孝氏とともにこの問題について共同研究を行い、次の結果を得ることができた。

・定理 4. 真に超安定なジェネリック構造で、

独立関係に関して非自明なものが存在する。
この結果は研究集会④で発表され、論文②、⑤としてまとめられた。

(3) ジェネリック構造のモデル完全性について次のことが知られている。

- ・ジェネリック構造はほとんどモデル完全。
- ・Hrushovski の強極小構造はモデル完全。
- ・Baldwin-Shelah のランダムグラフはモデル完全でない。

よって、多くのジェネリック構造の例はモデル完全かどうかかわかっていない。そこで、神戸大学の桔梗宏孝氏といくつかの例について調べ、次の結果を得ることができた。

・定理 5. Hrushovski の可算範疇的単純理論はモデル完全である。

・定理 6. ジェネリック構造 M に対して次は同値。

(a) $\text{Th}(M)$ はモデル完全。

(b) 任意の $A, C \in K$ に対して、 $A \subset C$ かつ $\text{not}(A \leq C)$ ならば、 $A \leq B \in K$ で B と C が A 上融合可能でないものが存在。

本来の目標はどのジェネリック構造がモデル完全かを分類することにあるが、定理 5 はその第一歩になる結果である。また、定理 6 の特徴付け定理により、まだ分類されていない例に関してもモデル完全性が判定できる可能性がある。以上の結果は研究集会①、③で発表され、2つの論文

- ・ Koichiro Ikeda, Some questions concerning ab initio generic structures
 - ・ Koichiro Ikeda and Hirotaka Kikyo, Model complete generic structures
- にまとめられ、現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Koichiro Ikeda, Generic structures and model completeness, 京都大学数理解析研究所講究録 1888(2014) 28-34, 査読無
- ② Koichiro Ikeda and Hirotaka Kikyo, On superstable generic structures, Archive for Mathematical Logic 51, no. 5 (2012), 591-600, 査読有
- ③ Koichiro Ikeda, Ab initio generic structures which are superstable but not omega-stable, Archive for Mathematical Logic 51, no. 1 (2012), 203-211, 査読有
- ④ Koichiro Ikeda, Generic structures and NSOP₄, 京都大学数理解析研究所講究録 1794 (2012) 28-42, 査読無
- ⑤ Koichiro Ikeda and Hirotaka Kikyo, An unsaturated generic structure, 京都大学数理解析研究所講究録 1741(2011), 9-12, 査読無
- ⑥ 池田宏一郎, A note on strictly

superstable generic structures, 京都大学数理解析研究所講究録 1741(2011), 1-8, 査読無

[学会発表] (計 11 件)

- ① 池田宏一郎, モデル完全なジェネリック構造 I (桔梗宏孝氏と共同研究), 日本数学会年会, 学習院大学, 2014 年 3 月 16 日
- ② 桔梗宏孝, モデル完全なジェネリック構造 II (桔梗宏孝氏と共同研究), 日本数学会年会, 学習院大学, 2014 年 3 月 16 日
- ③ Koichiro Ikeda, Some Remark on generic structures, RIMS 研究集会「モデル理論における独立概念と次元の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 11 月 19 日
- ④ 池田宏一郎, ジェネリック構造について, 特別講演, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013 年 9 月 27 日
- ⑤ Koichiro Ikeda, NSOP₄ and the Hrushovski construction, 13th Asian Logic Conference, 招待講演, Sun Yat-Sen University, Guangzhou (China), September 17, 2013
- ⑥ 池田宏一郎, ジェネリック構造と可算モデルの数, モデル理論夏の学校, 東海大学高輪台キャンパス, 2013 年 8 月 27 日
- ⑦ Koichiro Ikeda, Generic structures and NSOP₄, Maryland Logic Seminar, University of Maryland, December 11, 2012
- ⑧ Koichiro Ikeda, The rational approximations and generic structures, UIC Logic seminar, University of Illinois at Chicago, April 20, 2012
- ⑨ Koichiro Ikeda, On strong order properties, RIMS 研究集会「体のモデル理論とその応用」, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 11 月 29 日
- ⑩ 桔梗宏孝, 超安定なジェネリック構造 (桔梗宏孝氏との共同研究), 日本数学会秋季総合分科会, 信州大学松本キャンパス, 2011 年 9 月 28 日
- ⑪ Koichiro Ikeda, NSOP₄ and the Hrushovski construction, UIC Logic seminar, University of Illinois at Chicago, 2011 年 6 月 24 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 宏一郎 (IKEDA, Koichiro)
法政大学・経営学部・教授
研究者番号: 60332029

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

坪井 明人 (TSUBOI, Akito)
筑波大学・数理物質科学研究科・教授

研究者番号：30180045

桔梗 宏孝 (KIKYO, Hirotaka)
神戸大学・システム情報学研究科・教授
研究者番号：80204824