

### Minimal Market Modelにおける二項近似を用いたアメリカ型オプション評価

TAKAHASHI, Akiyuki / 高橋, 明之

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

56

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2015-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00011349>

# Minimal Market Model における 二項近似を用いたアメリカ型オプション評価

EVALUATIONS OF AMERICAN OPTION UNDER MINIMAL MARKET MODEL USING A BINOMIAL APPROXIMATION

高橋 明之

Akiyuki TAKAHASHI

指導教員 安田 和弘

法政大学大学院理工学研究科システム工学専攻修士課程

In this paper, we investigate pricing of American options under the real world probability measure, and obtain the optimal exercise boundary. In general, option pricing is carried out under a risk-neutral probability measure, however using the benchmark approach, it is possible to carry out option pricing under the real world probability measure even if a market risk-neutral probability measure does not exist. As an approximation of the growth optimal portfolio, we use the minimal market model with random scaling. Through a binomial approximation, we give an American option pricing method under the model.

**Key Words** : *Minimal Market Model with random scaling, American option, exercise boundary, sensitivity analysis, binomial approximation*

## 1. はじめに

本論文では、現実確率の下でアメリカ型オプションの価格付けを行うことを目的とする。一般的に、価格付けの手法はリスク中立確率を前提とした市場で行うが、ここでは現実確率の下で価格付けを行っていく。その意義は2つあり、リスク中立確率が存在しない市場であっても価格付けを行うことが可能になること。非完備市場においてリスク中立確率が複数個存在し、用いるべき確率測度が不明な際の別法となることである。その為、Platen[3]の論文を参考に、現実確率の下で価格付けを行うことが可能なベンチマークモデルを導入する。ベンチマークモデルでは、最適成長ポートフォリオ(GOP)と呼ばれる市場の指標をニューメレルとして用いることで、現実確率のまま価格付けを行うことが可能となる。さらに、現実確率の下でGOPを簡略化することのできるMinimal Market Model(MMM)を導入してオプションの価格付けを考えるが、MMMは長期市場を前提としているため、短期間の市場の特徴を捉えることができない。そのため、Heath, Platen[1]の論文では、短期間の市場の特徴を捉えることのできるランダムスケールをMMMに取り入れることで、問題点を解決している。本論文では、まずランダムスケールの必要性を、GOPとしてTOPIXを用いて検証する。ランダムスケールを持つMMMの下で、GOPを原資産とするアメリカ型オプションの価格付けを、二項近似を用いた手法により行い、モデルの各パラメータとアメリカ型オプション価格の関係や最適行使境界への影響を調べ、感度解析も行う。近似手法は、Vellkoop, Nieuwenhuis[5]を参考とする。

## 2. ベンチマークモデル

Platen[3]の論文を参考に、現実確率の下で価格付けが可能なベンチマークモデルを導入する。ここで、市場にある全て

のリスク資産の数を  $d$  とおき、 $j$  番目 ( $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ ) のリスク資産  $S^j(t)$  の確率微分方程式を

$$dS^j(t) = S^j(t) \left( a^j(t)dt + \sum_{k=1}^d b^{j,k}(t)dW_t^k \right),$$

とする。また、戦略  $\delta$  を持つポートフォリオ  $S^\delta(t)$  の確率微分方程式は

$$dS^\delta(t) = S^\delta(t) \left( r(t)dt + \sum_{k=1}^d b_\delta^k(t)(\theta^k(t)dt + dW_t^k) \right),$$

となる。ここで  $a^j(t)$  は  $j$  番目のリスク資産の収益率、 $b^{j,k}(t)$  は  $j$  番目のリスク資産の  $k$  番目のブラウン運動のボラティリティ、 $b_\delta^k$  は戦略  $\delta$  を用いた  $S^\delta(t)$  のボラティリティ、 $r(t)$  は無リスク金利、 $\theta^k(t)$  は  $k$  番目のブラウン運動のリスクプレミアム、 $W_t^k$  は独立なブラウン運動である。また、GOPとは  $S^\delta(t)$  の対数収益率(次式のドリフト  $g_\delta(t)$ ) が最大になるポートフォリオ  $\delta_*$  のことである。

$$d \log(S^\delta(t)) = g_\delta(t)dt + \sum_{k=1}^d b_\delta^k(t)dW_t^k.$$

このとき、GOPの従う確率微分方程式は次式の通りになる。

$$dS^{\delta_*}(t) = S^{\delta_*}(t) \left( r(t)dt + \sum_{k=1}^d \theta^k(t)(\theta^k(t)dt + dW_t^k) \right).$$

また、無リスク金利  $r(t)$  を用いて、現在価値に割引いた、割引GOPの確率微分方程式は次式の通りになる。

$$d\bar{S}^{\delta_*}(t) = \bar{S}^{\delta_*}(t) |\theta(t)| (|\theta(t)|dt + dW_t).$$

ただし、

$$dW_t = \frac{1}{|\theta_t|} \sum_{k=1}^d \theta_t^k dW_t^k.$$

### 3. Minimal Market Model

#### (1) MMM とは

Platen, Heath[4] を参考に, MMM を導入する. MMM とは, ベンチマークモデルを基にした, GOP のドリフト項を近似するモデルである. 市場の GOP を簡略化するため, GOP のドリフト項の近似を行う. 割引 GOP のドリフト項を

$$\alpha_t^{\delta_*} = \bar{S}_t^{\delta_*} |\theta_t|^2$$

とおくと, 割引 GOP の確率微分方程式は

$$d\bar{S}_t^{\delta_*} = \alpha_t^{\delta_*} dt + \sqrt{\bar{S}_t^{\delta_*} \alpha_t^{\delta_*}} dW_t$$

となる. 割引 GOP のドリフトを, 初期値が  $\alpha_0$ , 成長度が  $\eta$  の指数関数に従うと仮定すると,

$$\alpha_t^{\delta_*} = \alpha_0 \exp\{\eta t\},$$

となる. また, 割引 GOP の変化過程の一つである quadratic variation は次式の通りとなる.

$$\phi(t) = \frac{\alpha_0}{4\eta} (\exp\{\eta t\} - 1). \quad (1)$$

MMM を実際のオプション価格計算に用いるとき, (1) 式を用いて  $\alpha_0$  と  $\eta$  を推定することになる. 前述の通り MMM は長期市場を仮定しており, 市場の短期間のランダム性が加味されていない. その問題点を解決するためにランダムスケールを導入する必要がある. このことについては, 3.(3) 節で TOPIX を GOP とみなした場合に, ランダムスケールの必要性を検証する.

#### (2) ランダムスケールを持つ MMM

Platen, Heath[4] を参考に, ランダムスケールを持つ MMM を導入する. ランダムスケールを導入することで, 割引 GOP のドリフトが市場のランダム性を持つようになる. MMM にランダムスケールを導入するための変換式は,  $\nu > 2$  に対して,

$$\bar{S}_t^{\delta_*} = (Z_t)^{\frac{\nu-2}{2}}$$

であり,  $Z_t$  は確率微分方程式

$$dZ_t = \frac{\nu}{4} \gamma_t dt + \sqrt{\gamma_t Z_t} dW_t$$

に従う. また, スケール過程  $\gamma_t$  は

$$\gamma_t = Z_t \frac{\alpha_t^{\nu*}}{\bar{S}_t^{\nu*}} \frac{4}{(\nu-2)^2}$$

である. ここでは, 確率微分方程式

$$d\gamma_t = a(t, \gamma_t) dt + b(t, \gamma_t) (\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t)$$

に従うとする. ここで, ドリフト項  $a(t, \gamma)$  は

$$a(t, \gamma) = \xi_t \beta_t^2 \left( \frac{p}{2} - \frac{g}{2} \frac{\gamma}{\xi_t} \right) \frac{\gamma}{\xi_t} + \eta \gamma_t,$$

ボラティリティ項  $b(t, \gamma)$  は

$$b(t, \gamma) = \beta_t \gamma$$

である. また,  $W_t$  と  $\hat{W}_t$  は独立なブラウン運動である. 割引 GOP のドリフト項にランダムスケールである  $\gamma_t$  が加わり, 市場の短期間の変化を割引 GOP  $\bar{S}_t^{\delta_*}$  に反映することが可能になる.

#### (3) TOPIX による検証

代表的な市場指標である TOPIX を GOP として用いて, ランダムスケールの必要性を検証する. TOPIX は東証第一部上場株の時価総額の合計を評価し指数化したものであるため, GOP の候補として用いることが可能であると考えられる. TOPIX の quadratic variation の観測値により計算された値と推定値を, 1 期間の場合と 2 期間の場合で  $\alpha_0$  と  $\eta$  を推定し, それらの値を比較することで, ランダムスケールの必要性を検証する. ここでは, 期間 1949 年 5 月 1 日 ~ 2014 年 7 月 31 日までの東京証券取引所の TOPIX の日次終値を用いて考察する. (東京証券取引所よりデータを取得 [6]). quadratic variation の観測値は次式を用いて計算し, (1) 式と比較する.

$$\phi(t) = \left[ \sqrt{\bar{S}^{\delta_*}} \right]_t = \lim_{|t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{\bar{S}_{t_k}^{\delta_*}} - \sqrt{\bar{S}_{t_{k-1}}^{\delta_*}} \right)^2.$$

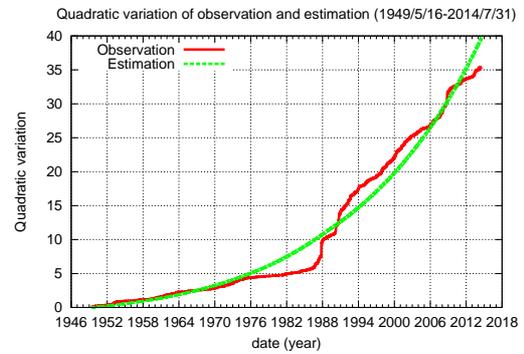


図 1 1949 年 5 月 ~ 2014 年 7 月

図 1 ~ 図 3 は各期間における quadratic variation の観測値と推定値の推移であり, パラメータの推定は最小二乗法を用いて求める. 最適化は Microsoft Excel 2010 のソルバーを用いた. 1949 年 5 月 ~ 2014 年 7 月の期間での, 割引 GOP のパラメータの推定値は,  $\alpha_0 = 0.312, \eta = 0.0517$  である. 1 期間の場合では, バブル期に大きな誤差が生じているのが分かる.

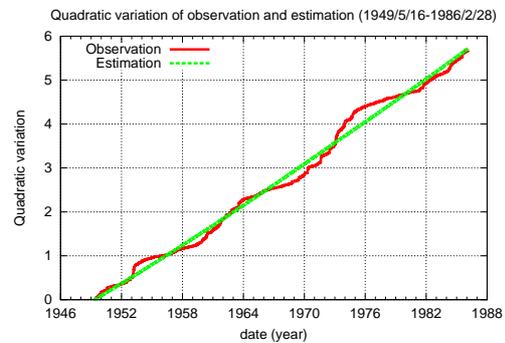


図 2 1949 年 5 月 ~ 1986 年 2 月

1949 年 5 月 ~ 1986 年 2 月の期間での, 割引 GOP のパラメータの推定値は,  $\alpha_0 = 0.518, \eta = 0.00668$  である.

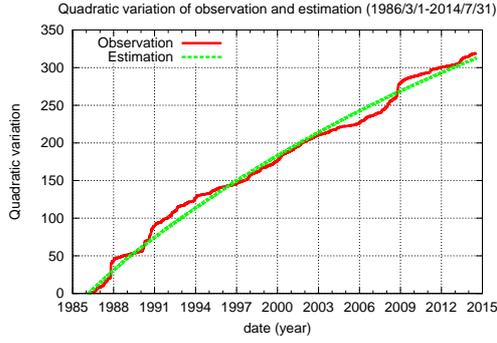


図 3 1986 年 3 月～2014 年 7 月

1986 年 3 月～2014 年 7 月の期間での、割引 GOP のパラメータの推定値は、 $\alpha_0 = 6.24, \eta = -0.0485$  である。

期間を二つに分けることで、パラメータの値が大きく変わり、図 2、図 3 から観測値と推定値の誤差が小さくなっていることが伺える。このことから、割引 GOP の成長率は時間と共に変化していると考えられ、MMM にランダムスケールを導入し、短期間の市場の特徴を捉える必要があることが分かる。

#### 4. MMM の下でのオプション価格

##### (1) MMM でのオプション価格式

Heath, Platen[2] の論文を参考に、MMM の下でのオプション価格式を説明する。満期のペイオフを  $H_T$  とおくと、一般に時刻  $t$  におけるオプション価格は

$$U_{H_T}(t) = S_t^{\delta_*} E \left[ \frac{H_T}{S_T^{\delta_*}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

となる。特に、満期  $T$  の原資産が GOP のヨーロッパ型コールオプションの価格は

$$c_{T,K}(t, Z_t, \gamma_t) = S_t^0 Z_t^{\frac{\nu}{2}-1} E \left[ \left( 1 - \frac{K}{S_T^0 Z_T^{\frac{\nu}{2}-1}} \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2)$$

となり、満期  $T$  のヨーロッパ型プットオプションの価格は

$$p_{T,K}(t, Z_t, \gamma_t) = S_t^0 Z_t^{\frac{\nu}{2}-1} E \left[ \left( \frac{K}{S_T^0 Z_T^{\frac{\nu}{2}-1}} - 1 \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3)$$

となる。ここで、 $\mathcal{F}_t$  は時刻  $t$  までの各資産の情報とする。このオプション価格式の重要な特徴は 2 つある。1 つ目は、一般にオプション価格を求めるときは、リスク中立確率を考え、リスク中立確率の下で割引ペイオフの期待値を求める。しかし、ここでは現実確率のまま期待値を考えている点である。このことにより、市場にリスク中立確率が存在しないときでも、オプションの価格付けが可能になることを示している。2 つ目として、一般には割引は市場の金利を用いて行うが、ここでは GOP をニューメレールとして用いていることである。次節では、これらのことを念頭に二項近似を用いて、原資産を GOP としたアメリカ型プットオプションの価格付けを考える。

##### (2) アルゴリズムのアイデア

Vellekoop, Nieuwenhuis[5] の論文を参考に、MMM に対する二項近似を用いたアメリカ型オプションの価格付けの手法を説明する。ここで簡単のため  $\rho = 0$  とする。手法としては、変換後の過程  $Z_t$

$$dZ_t = \frac{\nu}{4} \gamma_t dt + \sqrt{\gamma_t} Z_t dW_t \quad (4)$$

とランダムスケール  $\gamma_t$

$$d\gamma_t = a(t, \gamma_t) dt + b(t, \gamma_t) d\hat{W}_t \quad (5)$$

に対する、オイラー・丸山近似を基とした二項近似を構築する。そして、満期でのペイオフ

$$C(T, Z_T, \gamma_T) = (K - Z_T^{\frac{\nu}{2}-1})^+$$

から満期におけるオプション価格を決定し、満期から期間を遡ってオプションの現在価値を求めていく。

##### (3) グリッドの構築

(4), (5) 式に対して、 $T$  を満期とし、微小期間  $\Delta t = T/n, n \in \mathbb{N}$  としてオイラー・丸山近似を用いると

$$Z_{t+\Delta t} = Z_t + \frac{\nu}{4} \gamma_t \Delta t + \sqrt{\gamma_t} Z_t (W_{t+\Delta t} - W_t),$$

$$\gamma_{t+\Delta t} = \gamma_t + a(t, \gamma_t) \Delta t + b(t, \gamma_t) (\hat{W}_{t+\Delta t} - \hat{W}_t).$$

ここでブラウン運動の定義より、 $W_{t+\Delta t} - W_t, \hat{W}_{t+\Delta t} - \hat{W}_t$  は平均 0、分散  $\Delta t$  の正規分布に従う確率変数である。さらに二項近似を

$$Z_{t+\Delta t} = Z_t + \frac{\nu}{4} \gamma_t \Delta t + \sqrt{\gamma_t} Z_t Y_{t+\Delta t}^1 \sqrt{\Delta t}, \quad (6)$$

$$\gamma_{t+\Delta t} = \gamma_t + a(t, \gamma_t) \Delta t + b(t, \gamma_t) Y_{t+\Delta t}^2 \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

とする。ここで、 $Y^1, Y^2$  は次を満たす確率変数とする。

$$Q(Y^1 = i_1, Y^2 = i_2) = \frac{1}{4},$$

$$i_1, i_2 \in \{-1, 1\}.$$

(6), (7) 式の二項近似では  $Z_t$  とランダムスケール  $\gamma_t$  からそれぞれ上昇と下降の 2 種類のシナリオが作られる。ランダムスケール  $\gamma_t$  は  $Y^2$  が 1 をとり続けた場合に最大値をとり、 $Y^2$  が  $-1$  をとり続けた場合に最小値をとる。 $Z_t$  は  $\gamma_t$  の値に依存するため、 $Y^2$  が 1 をとり続け  $Y^1$  が 1 をとり続ける場合に最大値をとり、 $Y^2$  が 1 をとり続け  $Y^1$  が  $-1$  をとり続ける場合に最小値をとる。また、それぞれの期間での  $Z_t$  とランダムスケールの区切り幅を次式のように区切る。

$$\Delta Z_t = (z_t^{\max} - z_t^{\min}) / (m_z - 1),$$

$$\Delta \gamma_t = (\gamma_t^{\max} - \gamma_t^{\min}) / (m_\gamma - 1).$$

ここで  $m_z$  は  $Z_t$  の区切り数、 $m_\gamma$  はランダムスケールの区切り数、 $z_t^{\max}$  は  $Z_t$  の時刻  $t$  における最大値、 $z_t^{\min}$  は  $Z_t$  の時刻  $t$  における最小値、 $\gamma_t^{\max}$  はランダムスケールの時刻  $t$  における最大値、 $\gamma_t^{\min}$  はランダムスケールの時刻  $t$  における最小値とする。

##### (4) オプション価格の決定

前節で作成した時刻  $t$  の各グリッドから、(6), (7) 式を用いて  $Z_t$  とランダムスケールそれぞれ 2 種類のシナリオが作られ、一つのグリッドから 4 つのシナリオが作られることになる。各シナリオが入る時刻  $t + \Delta t$  におけるグリッドに囲まれた枠を探す。枠のそれぞれのグリッド上にはオプション価格が与えられている。シナリオの先のオプション価格は、その枠の中における、 $Z_t$  とランダムスケールの値のそれぞれの内点の比率から計算する。そして、4 つのシナリオをそれぞれの確率である  $\frac{1}{4}$  倍して足し合わせる。さらに、GOP で割り引くことで、時刻  $t$  における権利を行使しなかったときの

オプション価格が決定される。そして、ペイオフがそのオプション価格より高ければ、直ちに権利を行使され、そのペイオフがオプション価格となる。これを繰り返して行くことで、現時点でのアメリカ型オプション価格が決定される。

### 5. 数値実験と考察

このモデルに対して、刻み数やパラメータを変化させる事によりオプション価格や行使境界がどのような影響を受けるかなどの考察を行う。数値実験で使うパラメータの標準値を表1に示す。また使用したシミュレーション環境を表2に載せる。また、 $\nu = 4$  のとき  $Z_t$  は GOP と一致し、GOP は市場を代表するインデックスと考えられるため、以下では  $Z_t$  のことをインデックスと呼ぶことにする。

表1 主要なパラメータの標準値

パラメータ	記号	値
満期	$T$	1
金利	$r$	0.05
行使価格	$K$	100
インデックスの刻み数	$m_s$	500
ランダムスケールの刻み数	$m_\gamma$	3
時間の刻み数	$n$	7
インデックスの初期値	$Z_0$	100
ランダムスケールの初期値	$\gamma_0$	0.1
インデックスの $\nu$	$\nu$	4
ランダムスケールの $\beta$	$\beta$	0.6
ランダムスケールの $\eta$	$\eta$	0.05
ランダムスケールの $p$	$p$	3
ランダムスケールの $g$	$g$	2
ランダムスケールの $\xi$	$\xi$	10

表2 シミュレーション環境

メーカー	lenovo
プロセッサ	Intel Core i3 CPU U 380(1.33GHz)
実装メモリ	4.00GB
OS	Windows 7 Enterprise 32bit
開発言語	Visual Studio Express C++ 2013

#### (1) MMM の下での最適な刻み数の検証

ここでは、MMM の下、二項近似する際の最適なランダムスケール、時間の刻み数を検証する。(4)、(5)式に対してオイラー・丸山近似と、(2)式の期待値に対してモンテカルロシミュレーション(時間の区切数は200、モンテカルロ法を100万回とした)を用いて求めたヨーロッパ型コールオプションの価格は5.418である。表3は  $m_z = 500$  としたランダムスケールの最小値から最大値までの刻み数  $m_\gamma$ 、満期までの時間の刻み数  $n$  と4節で述べた二項近似によるオプション価格の計算法をヨーロッパ型コールオプションに用いたときのオプション価格の関係である。 $m_\gamma = 2$ 、 $n = 7$  のときが最もモンテカルロ法を用いた価格に近いが、 $m_\gamma = 2$  は区間が1つしか存在しないため採用せず、 $m_\gamma = 3$ 、 $n = 7$  が妥当だと考え、標準値とする。また、インデックスの最小値から最大値までの刻み数  $m_z = 500$  を標準値とするのは、次節の数値実

験から決定した。 $m_z = 500$  のときでも計算時間がそれほどかからないため、大きめの値を採用した。この標準値を用いて、以下、アメリカ型プットオプション価格及び行使境界の特徴について実験、考察していく。

表3 ランダムスケール、時刻の刻み数とオプション価格

$m_\gamma \backslash n$	5	6	7	8	9
2	5.485	5.460	5.416	5.344	5.261
3	5.428	5.447	5.429	5.379	5.310
4	5.361	5.405	5.404	5.370	5.313
5	5.281	5.342	5.356	5.335	5.290
6	5.206	5.277	5.303	5.293	5.258
7	5.140	5.218	5.251	5.249	5.221
8	5.081	5.163	5.202	5.205	5.183

#### (2) インデックスの刻み数による変化

インデックスの最小値から最大値までの刻み数  $m_z$  を50から500まで50刻みに変化させたときの  $m_z$  とオプション価格、計算時間の関係を表4に載せ、 $m_z$  の変化による時刻、ランダムスケールと行使境界の関係を図4、図5に載せる。

表4 インデックスの刻み数  $m_z$ 、オプション価格と計算時間

刻み数 $m_z$	オプション価格	計算時間(秒)
50	0.30013	0.016
100	0.2988	0.046
150	0.2984	0.078
200	0.29837	0.203
250	0.29828	0.234
300	0.298237	0.328
350	0.298195	0.468
400	0.29818	0.577
450	0.298175	0.749
500	0.29816	0.92

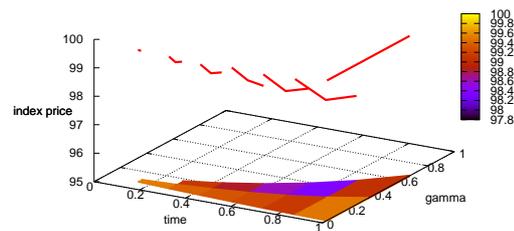


図4  $m_z = 50$  のときの行使境界

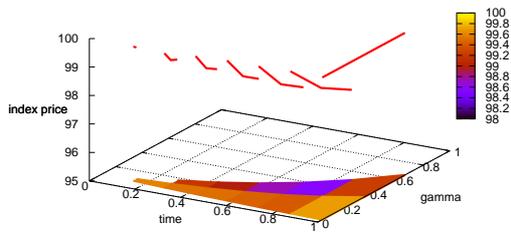


図 5  $m_z = 500$  のときの行使境界

表 4, 図 4, 図 5 よりインデックスの刻み数の変化とオプション価格, 行使境界の変化について次の結果が得られた.

- 刻み数を増やすことでオプション価格がわずかに下がって, 徐々に収束していく. 5.(1) 節と同様に, オイラー・丸山近似とモンテカルロシミュレーションを用いた方法でヨーロッパ型プットオプション価格を求めると 0.1533 であった. アメリカ型プットオプションの価格は少なくともヨーロッパ型プットオプション価格より高くなる. この観点からは, 得られている価格は妥当なものだと考えられ, 刻み数が小さいときから比較的適切な価格が得られていると考えられる.
- 計算時間は刻み数が 2 倍になるとおよそ 4 倍になる. これは, オプション価格計算のアルゴリズムでシナリオが入る枠を探す手間も倍になることを考えると妥当な関係である.
- 刻み数を増しても行使境界価格に大きな影響はみられない.
- ランダムスケールが小さいところでは, 行使境界は高くなり, 満期が近づくに従い境界が高くなるのがわかる. また, 二項近似の特徴として時刻 0 付近では行使境界が存在せず, 保有する方が良いとなっている. この関係は典型的な関係であり, 他のパラメータでも同様の特徴が見られる.

### (3) ランダムスケールの刻み数による変化

ランダムスケールの最小値から最大値までの刻み数  $m_\gamma$  を 3 から 100 まで変化させたときの  $m_\gamma$  とオプション価格, 計算時間の関係を表 5 に載せ,  $m_\gamma$  の変化による時刻, ランダムスケールと行使境界の関係のグラフを図 6, 図 7 に載せる. 表 5 ランダムスケールの刻み数  $m_\gamma$ , オプション価格と計算時間

刻み数 $m_\gamma$	オプション価格	計算時間 (秒)
3	0.2982	0.92
5	0.2855	3.073
10	0.2792	14.181
20	0.2772	59.67
30	0.2769	137.03
40	0.2768	245.98
50	0.2768	386.66
100	0.2767	1565.48

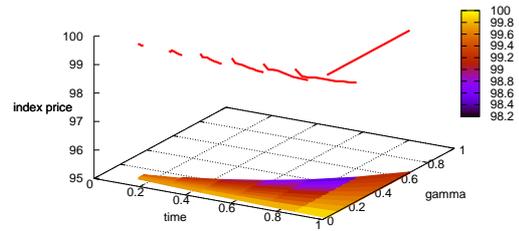


図 6  $m_\gamma = 10$  のときの行使境界

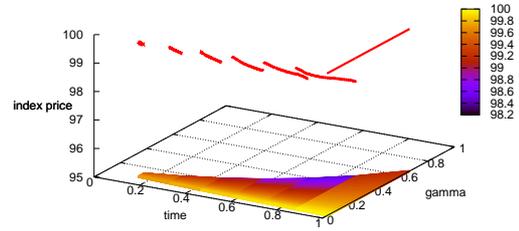


図 7  $m_\gamma = 100$  のときの行使境界

表 5, 図 6, 図 7 から次の結果が得られた.

- 刻み数を増やすとオプション価格が下がっていき, 収束していく. この変化は  $m_z$  を変化させたときよりも大きい変化となっている.
- 刻み数を増やしても行使境界に大きく影響を与えない. また, 時間とランダムスケールに対する関係は 5.(2) 節で述べた典型的な形となっている.
- 5.(2) 節と同様に, 計算時間は刻み数が 2 倍になるとおよそ 4 倍になる. 5.(2) 節と同様の理由で妥当な結果である.

### (4) 時間の刻み数による変化

満期までの時間の刻み数  $n$  を 5 から 100 まで変化させたときの  $n$  とオプション価格, 計算時間の関係を表 6 に載せ,  $n$  の変化による時刻, ランダムスケールと行使境界の関係のグラフを図 8, 図 9 に載せる.

表 6 時間の刻み数  $n$ , オプション価格と計算時間

刻み数 $n$	オプション価格	計算時間 (秒)
5	0.2293	0.64
7	0.2982	0.92
10	0.3609	1.3
20	0.4797	2.9
30	0.5203	4.4
40	0.5340	5.9
50	0.5376	7.5
100	0.5334	15.2

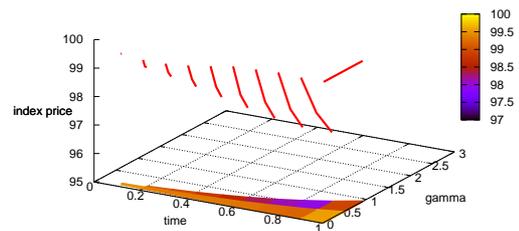


図 8  $n = 10$  のときの行使境界

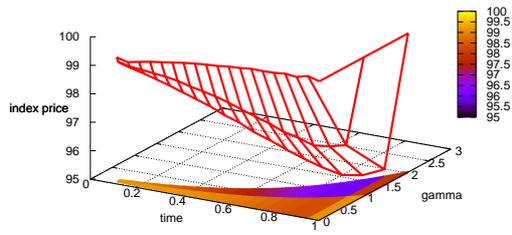


図 9  $n = 20$  のときの行使境界

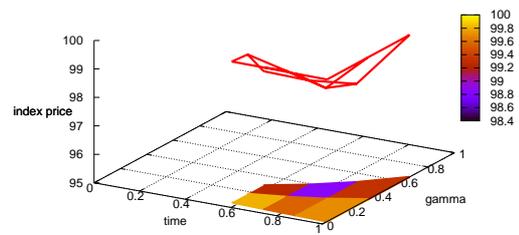


図 11  $Z_0 = 102$  のときの行使境界

表 6, 図 8, 図 9 から次の結果が得られた.

- 刻み数を増やすことでオプション価格が上昇していき、やがて収束する. 刻み数を増やすことで, 行使機会が増えるためである. アメリカ型オプションを二項近似する際の特徴と一致する.
- 刻み数を増やすことでランダムスケール  $\gamma$  が大きく広がりを見せる.
- 刻み数を増やすことで行使境界が下がっていく. しかし, 時間とランダムスケールに対する関係は 5.(2) 節で述べた典型的な形となっている.
- 計算時間は刻み数が 2 倍になるとおおよそ 2 倍になる. 探す枠の数は増えないため, ここは 2 倍が妥当である.

(5) インデックスの初期値による変化

インデックスの初期値を 98 から 105 まで変化させたときのインデックスとオプション価格, デルタとガンマの関係を表 7 に載せ, インデックスの初期値の変化による時刻, ランダムスケールと行使境界の関係を図 10, 図 11 に載せる.

表 7 初期インデックス, オプション価格と感度

初期 index	option 価格	デルタ	ガンマ
98	2	1	0
99	1	-0.8509	0.07454
100	0.2982	-0.4606	0.1206
101	0.07889	-0.1339	0.04270
102	0.03040	-0.03369	0.007399
103	0.01151	-0.01321	0.002840
104	0.003972	-0.005062	0.001236
105	0.001382		

表 7, 図 10, 図 11 から次の結果が得られた.

- 初期インデックスが高くなると, オプションが行使される機会が限られるため, オプションの価格は下がる.
- 初期インデックスを高くすることで, 二項近似の性質上, ペイオフがオプション価格を下回るのが遅くなるため, 行使境界が現れるのが遅くなる.
- 初期値が高くなると, インデックスの初期値に対するオプション価格の関係に対する接線の傾きであるデルタは 0 に近づく.
- インデックスに対するオプション価格の凸の大きさであるガンマは行使価格である 100 の付近で大きくなっている.

(6) ランダムスケールの初期値による変化

ランダムスケールの初期値を 0.1 から 1.0 まで変化させたときのランダムスケールとオプション価格, 感度の関係を表 7 に載せ, ランダムスケールの初期値の変化による時刻, ランダムスケールと行使境界の関係を図 10, 図 11 に載せる.

表 8 初期ランダムスケール  $\gamma$ , オプション価格と感度

初期ランダムスケール	オプション価格	感度
0.1	0.2982	
0.2	0.7112	3.990
0.3	1.096	3.796
0.4	1.470	3.606
0.5	1.817	3.360
1.0	3.284	

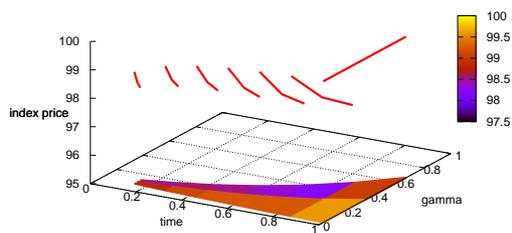


図 10  $Z_0 = 98$  のときの行使境界

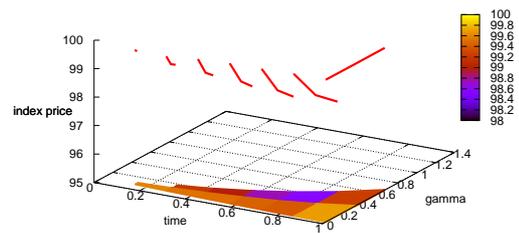


図 12  $\gamma = 0.1$  のときの行使境界

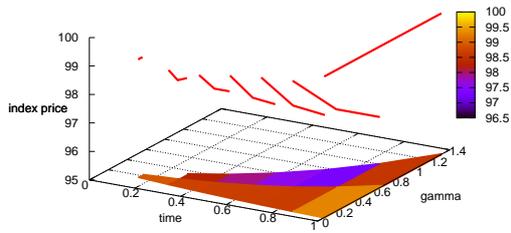


図 13  $\gamma = 0.2$  のときの行使境界

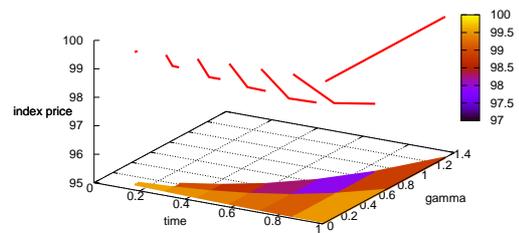


図 15  $\beta = 0.8$  のときの行使境界

表 8, 図 12, 図 13 から次の結果が得られた。

- 初期値を高くすることで、ランダムスケールの変化の幅が大きくなり、ペイオフが大きくなる可能性が高まり、オプション価格が上昇する。
- 初期値を高くすることで、 $\gamma$  の値が広がりを見せる。
- 初期値を高くすることで、ランダムスケールの変化の幅が大きくなり、ペイオフが大きくなる可能性が高まり、行使境界の価格は全体的に下がる。時間とランダムスケールに対する関係は 5.(2) 節で述べた典型的な形となっている。
- 他のパラメータと比較して、感度の値が大きいことが分かる。インデックスがランダムスケールに依存していて、影響力が大きいことが分かる。初期値が高くなると、感度は小さくなり初期値が小さいところより初期値の変化にオプション価格が敏感に変化する。

(7)  $\beta$  の値による変化

ランダムスケールの  $\beta$  を 0.1 から 1.0 まで変化させたときの  $\beta$  とオプション価格を表 9 に載せ、 $\beta$  の変化による時刻、ランダムスケールと行使境界の関係のグラフを図 14, 図 15 に載せる。

表 9  $\beta$ , オプション価格と感度

$\beta$	オプション価格	感度
0.1	0.2584	
0.2	0.2602	0.026505
0.3	0.2637	0.0516
0.4	0.2706	0.09494
0.5	0.2827	0.137985
1.0	0.4091	

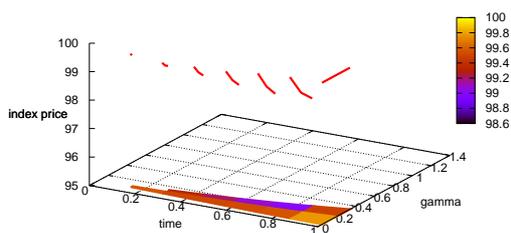


図 14  $\beta = 0.4$  のときの行使境界

表 9, 図 14, 図 15 から次の結果が得られた。

- $\beta$  の値を高くすることでランダムスケール  $\gamma$  が大きく広がりを見せる。
- $\beta$  の値を高くすることで、オプション価格が上昇していく。これは、ランダムスケールの変動が大きくなることでインデックスの変化が大きくなり、ペイオフが大きくなるためと考えられる。
- $\beta$  の値が高くなっても、行使境界は大きく変化しない。時間とランダムスケールに対する関係は 5.(2) 節で述べた典型的な形となっている。
- $\beta$  の値を高くすることにより、ランダムスケールの変化が大きくなるため、感度が高くなり影響力が強くなることが分かる。

(8)  $\eta$  の値による変化

ランダムスケールの  $\eta$  を 0.1 から 1.0 まで変化させたときの  $\eta$  とオプション価格を表 10 に載せ、 $\eta$  の変化による時刻、ランダムスケールと行使境界の関係のグラフを図 16, 図 17 に載せる。

表 10  $\eta$ , オプション価格と感度

$\eta$	オプション価格	感度
0.1	0.3025	
0.2	0.3112	0.09013
0.3	0.3205	0.09685
0.4	0.3305	0.1044
0.5	0.3414	0.1126
1.0	0.4245	

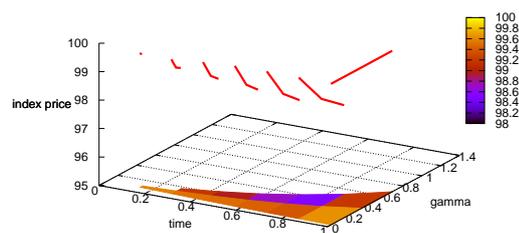


図 16  $\eta = 0.1$  のときの行使境界

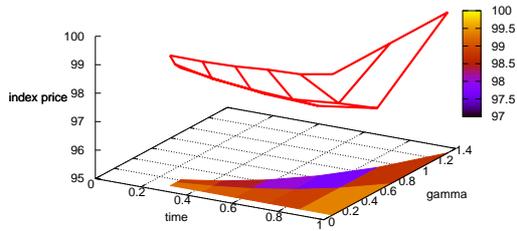


図 17  $\eta = 1.0$  のときの行使境界

表 10, 図 16, 図 17 から次の結果が得られた.

- $\eta$  の値を高くすることでランダムスケール  $\gamma$  が大きく広がりをもせる.
- $\eta$  の値を高くすることで, オプション価格が上昇していく. これも同様に, ランダムスケールの変動が大きくなることでインデックスの変化が大きくなり, ペイオフが大きくなるためと考えられる.
- $\eta$  の値を高くしても, 行使境界は大きく変化しない. 時間とランダムスケールに対する関係は 5.(2) 節で述べた典型的な形となっている.
- $\eta$  の値を高くすることにより, ランダムスケールの変化が大きくなるため, 感度が高くなり影響力が強くなることが分かる.

### (9) $g$ の値による変化

ランダムスケールの  $g$  を 1 から 10 まで変化させたときの  $g$  とオプション価格を表 11 に載せ,  $g$  の変化による時刻, ランダムスケールと行使境界の関係のグラフを図 18, 図 19 に載せる.

表 11  $g$ , オプション価格と感度

$g$	オプション価格	感度
1	0.2847	
2	0.2982	0.0144
3	0.3135	0.0163
4	0.3308	0.01855
5	0.3506	0.02125
10	0.5532	

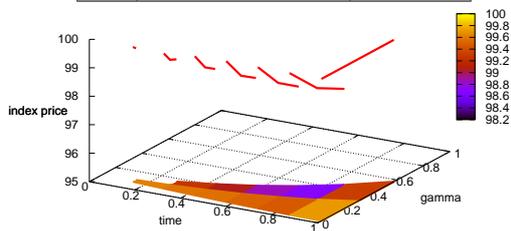


図 18  $g = 1$  のときの行使境界

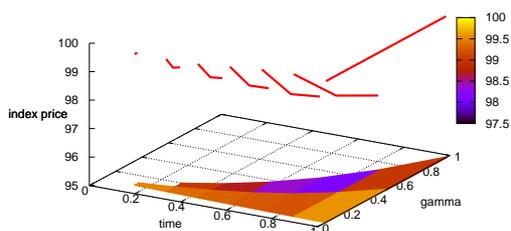


図 19  $g = 5$  のときの行使境界

表 11, 図 18, 図 19 から次の結果が得られた.

- $g$  の値を高くすることでランダムスケール  $g$  が大きく広がりをもせる.
- $g$  の値を高くすることで, オプション価格が上昇していく. これも同様に, ランダムスケールの変動が大きくなることでインデックスの変化が大きくなり, ペイオフが大きくなるためと考えられる.
- $g$  の値を高くすると, 行使境界は下がる. 時間とランダムスケールに対する関係は 5.(2) 節で述べた典型的な形となっている.
- $g$  の値を高くすることにより, ランダムスケールの変化が大きくなるため, 感度が高くなってはいる. しかし, 間接的なパラメータであるため, 感度は小さく影響力が小さいことがわかる.

## 6. おわりに

本論文では, ランダムスケールを持つ MMM を Vellkoop, Nieuwenhuis[5] を参考に二項近似し, パラメータの変化や二項近似する際の刻み数の変化に対してアメリカ型プットオプションの価格がどう変化するか考察した. 注意点として, この方法を用いる際は任意に値を設定できる刻み数が大きく影響を及ぼした. 特にランダムスケールの刻み数  $m_\gamma$  と時間の刻み数  $n$  である. ヨーロッパ型コールオプションで検証した際には,  $m_\gamma = 3, n = 7$  と小さい値で安定しランダムスケールと時間の刻み数を増やすことでオプション価格は収束していくが, 真値と離れた値に収束していく特徴を持っていた. また, アメリカ型プットオプションで MMM のパラメータを変化させ特徴を検証した際には, ランダムスケールに影響を与えるパラメータを変えることで, オプション価格と行使境界が大きく変化し, MMM に対するランダムスケールの影響力が強いことが分かった. 今後の課題として, Vellkoop, Nieuwenhuis[5] で与えられているような計算結果が安定する刻み数の関係を理論的な観点から MMM に対して与える必要がある. また, インデックスの行使境界への初到達時間への分布を作り特徴を調べることで, よりランダムスケールを持つ MMM の特徴を知ることが可能と考えられる.

### 参考文献

- 1) David Heath and Eckhard Platen, *Currency Derivatives Under A Minimal Market Model With Random Scaling*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, vol.8, No.8, 1157-1177, 2005.
- 2) David Heath and Eckhard Platen, *Understanding The Implied Volatility Surface For Option On A Diversified Index*, Asia-Pacific Financial Markets, 11, 55-77, 2005.
- 3) Eckhard Platen, *A Benchmark Approach To Finance*, Mathematical Finance, vol.16, No.1, 131-151, 2006.
- 4) Eckhard Platen and David Heath, *A Benchmark Approach To Quantitative Finance*, Springer Finance, 2006.
- 5) Michel Vellekoop and Hans Nieuwenhuis, *A Tree-based Method To Price American Options In The Heston Model*, The journal of Computational Finance, vol.13, No.1, 1-21, 2009.
- 6) 株式会社東京証券取引所, TOPIX 終値, 1949 年 05 月 ~ 2014 年 07 月.