

従属故障ネットワークシステムに対するコピュラを用いた信頼性解析

KAGEYAMA, Takao / 影山, 孝夫

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

56

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

6

(発行年 / Year)

2015-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00011322>

従属故障ネットワークシステムに対する コピュラを用いた信頼性解析

RELIABILITY ANALYSIS USING COPULA
FOR NETWORK SYSTEM WITH CASCADING FAILURES

影山 孝夫

Takao KAGEYAMA

指導教員 木村光宏

法政大学大学院理工学研究科システム工学専攻修士課程

In this study, we try to investigate whether copula models contribute to the good reliability estimation for multi-component systems in some dependent environment. We assume that a failure occurs on the one component of multi-components, and the surviving component's hazard rate switches to the worse. Specifically, we consider the 2-component parallel system and the 5-component network system. Also we presume that we can obtain the complete data sets consist of failure occurrence time of each component. We estimate reliability function by the copula models and the traditional methods based on computer simulation, and compare these performances.

Key Words : network system, cascading failures, copula, Weibull analysis

1. はじめに

近年では、情報化社会が大きく広がり、業務支援や高度なシステム機能の実現には、コンピュータシステムが必要不可欠な存在となっている。特にその中でも、インターネットに代表されるような情報ネットワークシステムは様々な場面で利用される。知りたい情報を検索し入手する、航空機や鉄道などの座席を予約するなど、社会インフラとしてのその重要性は増している。そしてそれに従い、それらのシステムが、ユーザーが求める機能をきちんと提供できるかを正確に見積もる必要も高まっている。

実際に、コンポーネント（素子）を組み合わせるシステムが故障すること無く正常に動作する確率を高い精度で評価する研究が数多くなされている。しかし、システムの構成素子が従属的に故障することを考慮した研究はそれほど多くない。これは、確率変数間に生じると想定される依存性を見極めることが大変難しいことを意味している。だが現実的には、ネットワークシステムの故障を考える上で、構成素子間の依存性を考慮することは非常に重要だと思われる。例えば通信システムにおいて、あるサーバがダウンしたために他のサーバへの通信量・負荷が増大して、そのサーバの故障率が増大するといった状況は容易に想像がつく。

そこで本研究では、多素子からなる従属故障ネットワークシステムに対して、コピュラ（接合関数）を利用して信頼性解析を試み、従来の手法よりも精度の良い解析ができるか否かについて、シミュレーションに基づいた検討を行う。具体的には、2素子並列システムと5素子ネットワークシステムを取り上げ、シミュレーションにより作成したシステムの各構成素子の故障時刻（瞬間故障率を工夫し、従属故障を表現している。）を元に、観測者がシステムについての精度の高い信頼度関数を得る手段について考察を行う。

2. 先行研究

従属故障する2素子並列システムにおける信頼性解析について、影山ら [1]、太田ら [2] は、コピュラを用いた信頼性解析を試み、一定の成果を出している。コピュラとは多変数の同時分布とその周辺分布とをつなぎ合わせるような関数のことであり、その中でも Maximal コピュラと呼ばれるコピュラを用いて、実験ならびに考察を行っている。ただ、単純なワイブル解析を行う場合と比べての誤差改善率は低く、また2素子並列システム以外のもっと複雑なシステムに対しての実験は行われていない。

よって本研究では、先行研究による手法を5素子からなるネットワークシステムに適用し効果を確認すること、また誤差改善率のさらなる向上を目指し、得られるデータに工夫を施した上で正規コピュラを用いるというモデルについて実験と検証を行うことを目標とする。

3. コピュラについて

(1) コピュラの定義

本章では、コピュラと呼ばれる関数について説明を行う。コピュラとは、多変数の分布関数とその周辺分布関数との関係を示す関数のことである [3]。周辺分布関数 $F_1, F_2, \dots, F_n$ を持つ連続な n 変量同時分布関数を F とすると、

$$\begin{aligned} & \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)), \end{aligned} \quad (1)$$

を満たす関数 C が一意に存在し、その C をコピュラ（接合関数）と呼ぶ（スクラーの定理）。コピュラ C は無数に存在する。本研究では、コピュラの中でも、Maximal コピュラと正規コピュラの2種類を用いて解析を行う。次節より、この2つのコピュラについて詳しく説明を加える。

(2) Maximal コピュラ

任意のコピュラ C , および任意の $(F_1(t_1), F_2(t_2), \dots, F_n(t_n)) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ に対してフレシェ - ヘフディング境界が存在し, 次の不等式が成り立つ .

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq M(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2)$$

ここで関数 W は, フレシェ - ヘフディング下界と呼ばれ, 次の式を満たす .

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \max(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i, 0) . \quad (3)$$

また関数 M は, フレシェ - ヘフディング上界と呼ばれ, 次の式を満たす .

$$M(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n) . \quad (4)$$

関数 M の境界を超えるコピュラは存在しないことから, 本研究ではこれを Maximal コピュラと呼び, $M = C_M$ とする .

(3) 正規コピュラ

正規コピュラとは, 多変量正規分布と同じ依存構造を持つコピュラであり, 以下のように構成される . 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が, 相関行列を Σ とする n 変量標準正規分布に従うとき, その分布関数を $\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \Sigma)$ と表すことにする . n 変量標準正規分布の周辺分布は, 1 変量標準正規分布であるから, 正規コピュラはスクラーの定理より,

$$\begin{aligned} & \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \Sigma) \\ &= C_N(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \dots, \Phi_n(x_n)), \end{aligned} \quad (5)$$

となる C_N をもって定義される .

本研究では, 周辺分布をワイブル分布として正規コピュラを用いている . 注意点として, 実際に正規コピュラを用いるためには, 相関行列 Σ を推定する必要がある . その点を含めた具体的な使用法については, 後で詳しく述べることにする .

4. 2 素子並列システム

本章では, 本研究における 2 素子並列システムのシステム構成とシミュレーションデータ生成に関する説明をし, 続けて, 提案する 3 つの解析モデルの具体的な内容とそれらによる実験結果についてをまとめる .

(1) システム構成とデータ生成

まず単純な 2 素子並列システムを考える . システムは並列の 2 素子 (S_1, S_2 とする) からなり, 片方の素子が故障するともう片方の故障率が上昇すると仮定する . そして両方の素子が故障した時に, システム全体が故障したと見なす . この時, 観測者が故障時刻データセット (素子 1 の故障時刻, 素子 2 の故障時刻, システムの故障時刻) を n 組得ることができると仮定し, それを利用した解析を試みる .

ここで, シミュレーションデータの生成について説明を加える . このデータ生成では, 瞬間故障率の定義を利用して素子の故障を判定している . 具体的には, 「微小時刻 Δt において素子が故障する確率は瞬間故障率と Δt の積に等しい [4]」というものである .

2 素子並列システムのシミュレーションデータは以下のようアルゴリズムによって生成される .

アルゴリズム

手順 1 2 つの素子は正常動作しているとする . また, 時刻を 0 とし, 故障率の初期値を与える . 初期故障率 $\lambda_1(t)$ は, $\lambda_1(t) = a_1 t^{m_1-1}$ とする . これは指数型を含むワイブル型の故障率であり, a, m をパラメータとしている .

手順 2 時刻を微小時刻 Δt だけ進める . 正常な素子について, $[0, 1]$ の一様乱数を作り, 故障率と Δt の積と比較する . もし, 一様乱数よりも故障率と Δt の積の方が大きければ, その素子は故障したとみなし, 時刻も記録する .

手順 3 もし 2 つの素子がともに故障していれば, システム全体の故障時刻とし, 時刻を記録して終了する .

手順 4 もし手順 2 により片方の素子が故障したものの, 残りの素子が正常動作している場合は, 残っている素子の故障率を $\lambda_2(t)$ へと切り替える . $\lambda_2(t) = a_2 t^{m_2-1}$ とする . ただし, 故障率が連続的になるよう, $\lambda'_2(t) = a_2 t^{m_2-1} - (a_2 t_f^{m_2-1} - a_1 t_f^{m_1-1})$ という操作を施す . (t_f は先に故障した素子の時刻とする .)

手順 5 手順 2 へ戻る .

これにより 1 組のデータセット (素子 1 の故障時刻, 素子 2 の故障時刻, システムの故障時刻) が入手できる . これを n 回繰り返すことにより, n 組のデータセットが入手できる .

(2) 解析モデル

(a) 単純解析モデル はじめに単純な解析手法から考える . 観測者は, システムの故障時刻 ($= t_s$) を知ることができるので, その集合を最尤法によりワイブル分布へと当てはめ, システムの故障時刻の分布関数 ($= u_s$) とすることが可能である . ゆえに, このモデルにおける信頼度関数 $R_T(t)$ は次の式で求まる .

$$R_T(t) = 1 - u_s(t) . \quad (6)$$

この解析法は簡素で既知の手法であり, 本研究では単純解析モデルとして用いて, 他の手法との精度比較を行う .

(b) Maximal コピュラモデル 本小節では, 2 つのワイブル型分布関数の交差に着目したモデルを考える . 以下に詳しく説明する .

まず故障時刻を分類する . 2 素子の故障時刻を t_1, t_2 とすると, 先に故障した素子の時刻 t_f の集合は以下のように書ける .

$$t_f^i = \min(t_1^i, t_2^i), \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

以下これを先故障群と呼ぶ .

また, 後で故障した素子の時刻 t_l の集合は以下のように書くことができる .

$$t_l^i = \max(t_1^i, t_2^i), \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

以下これを後故障群と呼ぶ .

このように, 2 素子の故障時刻を先故障群と後故障群へと分類して, それぞれの群を最尤法によりワイブル分布へと当てはめる . 先故障群によるワイブル型分布関数を u_f , 後故障群によるワイブル型分布関数を u_l とする .

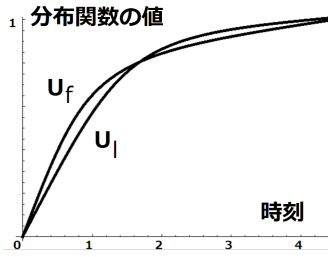


図 1 ワイブル型分布関数の交差のイメージ図．

さて，一般に 2 つのワイブル型分布関数が存在するとき，形状・尺度パラメータの値が異なるとすると，図 1 のように，横軸が 0 から無限大，縦軸が 0 から 1 までの間に必ず交差が起こる．だが問題設定から，先故障群の分布関数は後故障群の分布関数より常に上側に来るべきであり，不自然である．

真の分布関数（推定ではない）は先故障群のみがワイブル型であり，後故障群についてはワイブル型ではないと考えられるが，推定の都合上，先故障群の分布関数にも後故障群の分布関数にもワイブル分布を当てはめていることで，このような不自然な現象が起きている．よって，後故障群のワイブル型分布関数について修正を行い，精度を向上させることを考える．

具体的な解析は以下のように行う．故障時刻の分類の後，先故障群と後故障群の 2 つのワイブル型分布関数 u_f, u_l を最尤法により求める．それらを Maximal コピュラによりつなぎ，それをシステムの分布関数とする．

$$F_M(t_f, t_l) = C_M(u_f, u_l), \quad (9)$$

Maximal コピュラの定義より，下側の分布関数を取り出されるために，交差はなくなる．これより，Maximal コピュラを用いた場合のシステム信頼度関数 $R_M(t)$ は，次の式で与えられる

$$R_M(t) = 1 - F_M(t, t). \quad (10)$$

(c) 正規コピュラモデル 続いて正規コピュラを用いた解析手法について説明する．

はじめに，2 素子のうち後で故障した素子の時刻から先に故障した素子の時刻をひいた差分時刻 t_d の集合を，以下のように定義する．

$$t_d^i = \max(t_1^i, t_2^i) - \min(t_1^i, t_2^i), i = 1, 2, \dots, n, \\ \text{以下これを差分時刻群と呼ぶ.} \quad (11)$$

そして，2 素子の故障時刻を先故障群と差分時刻群へと分類し，それぞれの群を最尤法によりワイブル分布へ当てはめる．先故障群によるワイブル分布関数を u_f ，差分時刻群によるワイブル分布関数を u_d とする．

次に，正規コピュラを用いるために必要な相関行列 Σ の推定を行う．先故障群と差分時刻群のデータを，適用した周辺分布（ワイブル分布）ごとに， $[0, 1]$ の一様分布へ変換する．

$$a_1^i = u_f(t_f^i), a_2^i = u_d(t_d^i). \quad (12)$$

さらに a_1^i, a_2^i を逆関数法により，標準正規分布に従うデータ ω_1^i, ω_2^i へと変換する．そして，

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_j^i \omega_k^i \quad (j, k = 1, 2), \quad (13)$$

を計算し，これを相関行列 Σ の j 行 k 列成分の推定量 $\hat{\Sigma}_{j,k}$ とする．

このようにして相関行列 $\hat{\Sigma}$ を求めた後，先故障群と差分時刻群を正規コピュラによりつなぎ，同時分布関数

$$F_N(t_f, t_d) = C_N(u_f, u_d), \quad (14)$$

を求める．これは先故障群と差分時刻群についての同時分布関数である．そこで，上式の同時分布関数に従う 2 次元乱数を，十分多い数（ここでは 10000 個）発生させる．

この 2 次元乱数は $\{\text{先故障時刻}, \text{差分時刻}\}$ の確率変数となっており，この乱数の和がシステム故障時刻の確率変数となっている．これらを昇順にソートして，カプラン・マイヤー法 [5] により経験分布 $F_{NE}(t)$ を作る．具体的には，昇順にソートした故障時刻のうち i 番目のものを t_i とおくと，時刻 t_i の時の経験分布関数の値は $i/10000$ となり，それらの点を直線でつないだものが $F_{NE}(t)$ である．

これより，正規コピュラを用いた場合のシステム信頼度関数 $R_N(t)$ は，次の式で与えられる．

$$R_N(t) = 1 - F_{NE}(t). \quad (15)$$

(3) 実験結果と考察

実験は，故障率のパラメータセットを変えて，10 回行う．1 回の実験の流れは以下になる．

手順 1 真の分布の代用の分布を作り，その信頼度関数を求める（ $=R'(t)$ ，10000 組のデータをシミュレーションにより作り，それを経験分布として，カプラン・マイヤー法により作成する．）

手順 2 100 組のデータをシミュレーションにより作成し，それを 3 つのモデルでそれぞれ解析して 3 つの信頼度関数を作る．そして，上記の信頼度関数 $R'(t)$ と，誤差 2 乗和をとって比較する．

手順 3 ばらつきを取り除くため，手順 2 を 10 回繰り返し，誤差 2 乗和の合計を記録する．

このような実験を行い，表 1 のような結果が得られた．

表 1 2 素子並列システムにおける実験結果．

No	$\lambda_1(t)$	$\lambda_2(t)$	td SSE	mc SSE	nc SSE
1	1	t	92.5718	92.5718	68.7516
2	1	4t	157.4536	157.4330	139.0691
3	2	t	120.6395	120.6395	100.3291
4	2	4t	107.3692	107.3595	126.7336
5	t	2t	214.2358	214.2358	218.9211
6	t	4t	157.9451	157.9451	108.3252
7	t	8t	92.9225	92.9224	46.5475
8	2t	3t	116.5011	116.5011	135.9168
9	2t	6t	149.5089	149.5089	131.6753
10	2t	9t	115.5758	115.5757	102.5625
All			1324.7232	1324.6928	1178.8318

表中の，td，mc，nc，はそれぞれ単純解析モデル，Maximal コピュラモデル，正規コピュラモデルを表す．

また，SSE は誤差 2 乗和であり，All にはそれぞれ総和が入る．

10 種類のパラメータにおいて実験を行ったが、パラメータの特徴による結果の違いはあまり見受けられなかった。

誤差 2 乗和を比較すると、7 種類のパラメータで正規コピュラモデルが 1 番勝っており、全パラメータ合計では、単純解析モデルと比較して約 11.0130% ほど誤差 2 乗和を減らすことができている。これにより、正規コピュラモデルは有益であると考えられる。ただ No. 4, No. 5, No. 8 においては逆に誤差 2 乗和が増えてしまっており、結果のばらつきが大きいとも考えられる。

次に単純解析モデルと Maximal コピュラモデルの比較では、No. 2 などで、ごく小さな差で Maximal コピュラが勝っており、結果が悪くなるパラメータはない。全パラメータ合計で見ると、0.0023% ほど誤差 2 乗和が減っており、これは本当にごく小さな改善であるが、Maximal コピュラを用いることで結果が悪くなることは無いということが強みといえるのではないだろうか。

5. 5 素子ネットワークシステム

(1) システム構成とデータ生成

前章の 2 素子並列システムをより一般的に拡張した、5 素子からなるネットワークシステムに対しても解析を行う。システムは素子 $S_1 \sim S_5$ によって成り立っており、構成は図 2 のようになっている。

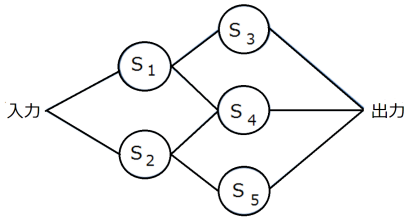


図 2 5 素子ネットワークシステムの構成図。

ある 1 つの素子が故障すると他の素子に負荷がかかり、これらの素子の故障率が変化（主に上昇）していくと仮定する。例えば、 S_1 が故障すると、 S_2 は大きな影響を受けると考えるのが自然である。よってこの場合、 S_2 の負荷、故障率は大きく上昇する。またそれに伴い S_4, S_5 の負荷、故障率も上昇する（ただし、 S_3 は孤立するため逆に負荷、故障率は下降し 0 となる。）

入力から出力まで到達することが出来なくなった場合をシステム全体の故障とみなす。この時、観測者が故障時刻データセット（素子 1 の故障時刻、素子 2 の故障時刻、...、素子 5 の故障時刻、システムの故障時刻）を得ることができると仮定し、それを利用した解析を試みる。

ここで、シミュレーションデータの生成について説明を続ける。5 素子ネットワークシステムのシミュレーションデータは以下のようなアルゴリズムによって生成される。

アルゴリズム

前準備 システムの全素子の故障率を全素子の正常動作・故障の状況別に作っておく。

手順 1 すべての素子は正常動作しているとする。また、時刻を 0 とし、故障率の初期値を与える。初期故障率 $\lambda_1(t)$ は、 $\lambda_1(t) = a_1 t^{m_1-1}$ とする。これは指数型を含むワ

イブル型の故障率であり、 a, m をパラメータとしている。

手順 2 時刻を微小時刻 Δt だけ進める。それぞれの素子について、 $[0, 1]$ の一様乱数を作り、故障率と Δt の積と比較する。もし、一様乱数よりも故障率と Δt の積の方が大きければ、その素子は故障したとし、時刻も記録する。

手順 3 もし、入力から出力まで到達できないならば、システム全体の故障時刻とし、時刻を記録して終了する。

手順 4 もし手順 2 によりある素子が故障したものの、入力から出力まで到達可能ならば、システムは動作しており、残っている素子の故障率を状況により、 $\lambda_0(t) = 0$ $\lambda_2(t) = a_2 t^{m_2-1}$ $\lambda_3(t) = a_3 t^{m_3-1}$ $\lambda_4(t) = a_4 t^{m_4-1}$ のどれかへと変化させる。また、2 素子並列システムの場合と同じようにして、故障率が連続するように工夫する。

手順 5 手順 2 へ戻る。

これにより 1 組のデータセット（素子 1 の故障時刻、素子 2 の故障時刻、...、素子 5 の故障時刻、システムの故障時刻）が入手できる。これを n 回繰り返すことにより、 n 組のデータセットが入手できる。

(2) 仮想的並列システムの構築

この 5 素子ネットワークシステムにおいて、本研究の理論を適用するためには、ネットワークシステムを並列システムへと仮想的に置き換える必要がある。そのために最小パスセットと呼ばれる集合を考える。

パスセットとは、それに属する要素がすべて正常ならシステムが正常となる部分集合のことであり、あるパスセットの部分集合にパスセットとなるものが存在しないとき、そのパスセットを最小パスセットと呼ぶ [5]。この最小パスセットを利用して構造関数（システムの状態（正常: 1, 故障: 0）を素子の状態を表す変数の和と積によって表したもの）を構築し、仮想的な並列システムを作り出す。

今回のネットワークであれば、最小パスセットは $(S_1, S_3), (S_1, S_4), (S_2, S_4), (S_2, S_5)$ の 4 つであるから、システムの状態を z 、素子 i の状態を x_i とおいた時の、このネットワークにおける構造関数は、

$$z = 1 - (1 - x_1 \cdot x_3) \cdot (1 - x_1 \cdot x_4) \cdot (1 - x_2 \cdot x_4) \cdot (1 - x_2 \cdot x_5) \quad (16)$$

となる。

これは、図 3 のような並列システムと等しいと考えることができる。よって、次節より解析を考える際には、この仮想的な並列システムを用いて解析を進める。

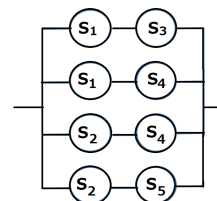


図 3 仮想的並列システムの構成図。

(3) 解析モデル

(a) 単純解析モデル 2 素子並列システムの時に考えた単純解析モデルをそのまま適用できる。すなわち、システムの故障時刻 ($= t_s$) の集合を最尤法によりワイブル分布へと当てはめ、システムの故障時刻の分布関数 ($= u_s$) として、信頼度関数 $R_T(t)$ を次のように求める。

$$R_T(t) = 1 - u_s(t). \quad (17)$$

ここでも、このモデルを単純解析モデルとして用いて、他の手法との精度比較を行う。

(b) Maximal コピュラモデル Maximal コピュラを用いた解析手法について説明する。先に述べた仮想的並列化を利用することになる。具体的な解析の流れは次のようになる。

仮想的並列化によって、図 3 のように 4 本の枝ができあがった。この枝についての故障時刻を考える。 i 番目のデータにおける素子 1 から素子 5 までの故障時刻をそれぞれ $t_1^i, \dots, t_5^i$ とすると、 i 番目のデータの 4 本の枝の故障時刻 $b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i$ はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} b_1^i &= \min(t_1^i, t_3^i), b_2^i = \min(t_1^i, t_4^i), \\ b_3^i &= \min(t_2^i, t_4^i), b_4^i = \min(t_2^i, t_5^i). \end{aligned} \quad (18)$$

さらに、 $b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i$ を並び替えて、1 本目故障時刻 r_1^i 、2 本目故障時刻 r_2^i 、3 本目故障時刻 r_3^i 、4 本目故障時刻 r_4^i を作る。すなわち、

$$\begin{aligned} r_1^i &= (b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i) \text{ のうち 1 番目に小さい時刻,} \\ r_2^i &= (b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i) \text{ のうち 2 番目に小さい時刻,} \\ r_3^i &= (b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i) \text{ のうち 3 番目に小さい時刻,} \\ r_4^i &= (b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i) \text{ のうち 4 番目に小さい時刻,} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。このような並び替えの作業を n 個のデータ全てについて行い、1 本目故障時刻群、...、4 本目故障時刻群を作る。

続いて、それぞれの群を最尤法によりワイブル分布へ当てはめる。1 本目故障時刻群によるワイブル型分布関数を u_1 、2 本目故障時刻群によるワイブル型分布関数を u_2 、3 本目故障時刻群によるワイブル型分布関数を u_3 、4 本目故障時刻群によるワイブル型分布関数を u_4 とする。そして、この 4 つのワイブル型分布関数を Maximal コピュラによりつなぎ、それをシステムの分布関数とする。

$$F_M(r_1, r_2, r_3, r_4) = C_M(u_1, u_2, u_3, u_4). \quad (20)$$

これより、Maximal コピュラを用いた場合のシステム信頼度関数 $R_M(t)$ は、次の式で与えられる

$$R_M(t) = 1 - F_M(t, t, t, t). \quad (21)$$

(c) 正規コピュラモデル 仮想的並列化による 4 本の枝に関する諸定義は同様である。ここで、1 本目故障時刻と 4 本目故障時刻との差分時刻 t_{d14} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} t_{d14}^i &= r_4^i - r_1^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \text{以下これを差分時刻群 14 と呼ぶ.} \end{aligned} \quad (22)$$

そして、1 本目故障時刻群と差分時刻群 14 の 2 つの群を、それぞれ最尤法によりワイブル分布へ当てはめる。1 本目故障時刻群によるワイブル型分布関数を u_1 、差分時刻群 14 によるワイブル型分布関数を u_{d14} とする。

先ほどと同様の手順にて、相関行列 Σ を求めた後、2 つの群を正規コピュラによりつなぎ、同時分布関数

$$F_N(r_1, t_{d14}) = C_N(u_1, u_{d14}), \quad (23)$$

を求める。これは 1 本目故障時刻群と差分時刻群 14 についての同時分布関数である。

そこで、上式の同時分布関数に従う 2 次元乱数を、十分多い数 (10000 個) 発生させる。この 2 次元乱数は { 1 本目故障時刻, 差分時刻 14 } の確率変数となっており、この乱数の和がシステム故障時刻の確率変数となっている。10000 個ある「乱数の和」をシステムの故障時刻とみなし、ソートして、カプラン・マイヤー法により経験分布 $F_{NE}(t)$ を作る。

これより、正規コピュラを用いた場合のシステム信頼度関数 $R_N(t)$ は、次の式で与えられる。

$$R_N(t) = 1 - F_{NE}(t). \quad (24)$$

(4) 実験結果と考察

実験の設定についての要点を確認する。実験は、故障率のパラメータセットを変えて、13 回行う。1 回の実験の流れは、2 素子並列システムの時とほぼ同じで、以下のようになる。

手順 1 真の分布の代用の分布を作り、その信頼度関数を求める ($= R'(t)$, 10000 組のデータをシミュレーションにより作り、それを経験分布として、カプラン・マイヤー法により作成する) を一つ決める。

手順 2 100 組のデータをシミュレーションにより作成し、それを 3 つのモデルにてそれぞれ解析し、3 つの信頼度関数を作る。そして、上記の信頼度関数 $R'(t)$ と、誤差 2 乗和をとって比較する。

手順 3 ばらつきを取り除くため、手順 2 を 10 回繰り返し、誤差 2 乗和の合計を計算する。

このような実験を行い、表 2 のような結果が得られた。

13 種類のパラメータにおいて実験を行ったが、2 素子並列システムの時と同様、パラメータの特徴による結果の違いはあまり見受けられなかった。

誤差 2 乗和を比較すると、7 種類のパラメータで正規コピュラモデルが 1 番勝っており、全パラメータ合計では、単純解析モデルと比較して約 1.7798% ほど誤差 2 乗和を減らすことができています。これにより、正規コピュラモデルはある程度の成果があると言えるだろう。ただ他の 6 種類のパラメータにおいては逆に誤差 2 乗和が増えてしまっており、ばらつきが大きく確実な効果を期待することはできないと思われる。

次に、単純解析モデルと Maximal コピュラモデルの比較では、No. 2, No. 6, No. 12, No. 13 においてごく小さな差で Maximal コピュラが勝っており、他のパラメータにおいては同じ値を取っている。全パラメータ合計で見ると、0.0009% ほど誤差 2 乗和が減っている。これもまた、2 素子並列システムの時と同じく、改善の幅は小さいものの、Maximal コピュラを用いることで結果が悪くなることは無いということが強みといえるだろう。

表 2 5 素子ネットワークシステムにおける実験結果 .

No	$\lambda_1(t)$	$\lambda_2(t)$	$\lambda_3(t)$	$\lambda_4(t)$	td SSE	mc SSE	nc SSE
1	1	t	$2t$	$3t$	150.0141	150.0141	148.6113
2	1	$3t$	$6t$	$9t$	196.4564	196.4560	147.0158
3	2	t	$2t$	$3t$	68.3800	68.3800	79.8826
4	2	$3t$	$6t$	$9t$	118.8058	118.8058	92.1506
5	t	$2t$	$4t$	$6t$	128.8188	128.8188	172.0344
6	t	$3t$	$6t$	$9t$	141.5126	141.5125	127.0972
7	t	$4t$	$8t$	$12t$	177.2328	177.2328	178.5158
8	$2t$	$3t$	$5t$	$7t$	134.8641	134.8641	180.7745
9	$2t$	$6t$	$8t$	$10t$	132.9294	132.9294	94.7706
10	$2t$	$9t$	$11t$	$13t$	71.0065	71.0065	89.6148
11	t	t^2	t^2	$2t^2$	74.4536	74.4536	48.1754
12	t	$2t^2$	$3t^2$	$4t^2$	193.6730	193.6727	199.5436
13	t	$4t^2$	$6t^2$	$8t^2$	141.9287	141.9139	141.0973
All					1730.0760	1730.0602	1699.2839

表中の, td,mc,nc. はそれぞれ単純解析モデル,
Maximal コピュラモデル, 正規コピュラモデルを表す.
また, SSE は誤差 2 乗和であり, All にはそれぞれ総和が入る .

6. おわりに

(1) まとめと結論

本研究では, 2 素子並列システムと 5 素子ネットワークシステムを題材に, 従属故障する複数の素子からなるシステムの信頼性解析にコピュラを取り入れることで解析の精度が向上するか否かの検討を行った. どちらの場合も, 正規コピュラを用いたモデルに一定の成果が得られた. ただ, 100% 成果があるわけではなく, 特に 5 素子の場合, 逆に誤差が増えてしまう場合も多くあった. それに対し, Maximal コピュラを用いたモデルでは, 成果は非常に小さいものの誤差が増えるケースは見られなかった.

システムの信頼性解析が求められる状況は様々である. もう少し詳しく正規コピュラモデルの特徴がつかめれば, それを使った解析が良いと思われるが, 高い確実性を求められる場合 (病院の医療システム等) では, Maximal モデルを用いて解析したほうが良い場合も考えられる. よって, 状況に応じて, 正規コピュラモデルと Maximal コピュラモデルを使い分けていくことが有益であると考えられる.

(2) 今後の課題

これからの課題としては, 正規コピュラモデルの特徴をもっとはつきりつかむことや, もっと大きなシステムにおいて成果があるか確認することが挙げられる.

また, Maximal コピュラや正規コピュラにこだわらず, 他のコピュラを用いたモデルも検討すべきかもしれない. 実際に, 今回の研究の途中で, 他の様々なコピュラも解析に用いることも考えた. その選定基準としてデータから経験コピュラと呼ばれるコピュラを作り, その経験コピュラと最も適合するコピュラを用いるという方針だった. しかし計算量がとても多く時間がかかりすぎるために断念することを余儀なくされた.

もう一つのポイントとして, 実験を行う際にシミュレーションによる生成データではなく, 現実に関わった問題に関する実測データを用いることができれば, より実務への応用を考えやすくなると思われる.

参考文献

- [1] 影山孝夫, 太田修平, 木村光宏, 「コピュラによる 2 素子並列システムの従属故障に関する一考察」, 電子情報通信学会技術研究報告 (信頼性), R2013-79, pp. 1-5 (2013).
- [2] 太田修平, 影山孝夫, 木村光宏, 「2 素子並列システムのカスケード故障に関するコピュラ解析」, 電子情報通信学会 2014 年総合大会論文集, A-9-4 (2014).
- [3] 戸坂凡展, 吉羽要直, 「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」, 日本銀行金融研究所, 金融研究, pp. 115-162 (2005).
- [4] 市田嵩, 鈴木和幸, 「信頼性の分布と統計」, 日科技連出版社, (2005).
- [5] 野中保雄, 島岡淳, 「冗長系 理論と実際」, 日科技連出版社, (1990).
- [6] R. T. Clemen and T. Reilly, “Correlations and copulas for decision and risk analysis”, *Management Science*, Vol. 45, Issue 2 (1999).
- [7] I. Dobson, B. A. Carreras, and D. E. Newman, “A loading-dependent model of probabilistic cascading failure”, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, Vol. 19, pp. 15–32 (2005).
- [8] 弓削哲史, 丸山恵, 柳繁, 「システムの共通原因故障率の推定について」, 信学技法, Vol. R2013-68, pp. 25–30 (2013).
- [9] 松岡猛, 「確率論的安全評価における従属故障と外的事象の取り扱い」, システム / 制御 / 情報, Vol. 36, No. 3, pp. 158–170 (1992).