情報・推定・制約が対数型期待効用最大化に与える影響

朝倉, 悠也 / ASAKURA, Yuya

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編
(巻 / Volume)
56
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
8
(発行年 / Year)
2015-03-24
(URL)
https://doi.org/10.15002/00011311

法政大学大学院理工学・工学研究科紀要　Vol.56(2015 年 3 月)　　法政大学

情報・推定・制約が対数型期待効用最大化に与える影響

EFFECTS OF INFORMATION, ESTIMATIONS AND CONSTRAINTS ON EXPECTED LOG-UTILITY MAXIMIZATION PROBLEM

朝倉 悠也
Yuya ASAKURA

指導教員 安田 和弘

法政大学大学院理工学研究科システム工学専攻修士課程

In this paper, we consider effects of information, estimations and constraints on portfolio optimization problems in mathematical finance. In particular, a portfolio optimization problem of an investor who wants to maximize an expected utility of the investor's terminal wealth is considered. As our risky security model we adopt a factor model in which the growth rate depends on an exogenous factor. We assume several strategies whose differences come from information of markets, estimations of a parameter and constraints of strategies, and study their effects to an expected utility theoretically and numerically. We adopt the logarithmic utility function as a utility function showing a risk aversion investor.
Key Words *: Expected log-utility maximization problem, Filtering, Portfolio constraints, Estimation errors*

1. はじめに

本研究は, 数理ファイナンスにおけるポートフォリオ最適化問題, 特に, 投資家の満期における富に対する期待効用最大化を考えている．株価過程として成長率が外生的要因の影響を受けるファクタモデルを採用し, 最適戦略を考えるときの情報の有無や未知のファクタの推定, パラメータの推定誤差や戦略に関する制約が, 期待効用にどのような影響を与えるかの考察をする．ここでは, リスク回避的な投資家の効用を表す効用関数の 1 つである対数型効用関数を用いる．

株価の成長率に対するファクタはいつでも観測可能なものや, 年に数回しか観測できないもの, 全く観測できないものなどがある．また, 情報によっては購入しないと得られない指標などもある．これらのことより, ファクタに関する情報が観測できる場合やできない場合, 取得可能な環境やそうでない環境などが存在する．株価とファクタの両情報が得られる場合を完全情報, 株価の情報のみ得られ, ファクタの情報を得られない場合を部分情報と呼ぶ．本研究を通じて, それらの情報の有無や推定結果がどのように満期での期待効用に影響を与えるかを考察する．また, 各パラメータの推定誤差や投資戦略に投資の上限と下限の制約を与えた場合の影響も考察する．

2. 市場モデルと取引戦略

(1) 市場モデルと期待効用最大化問題

T を正の実数とし, 有限期間 $[0,T]$ を考える．

本研究では, 証券市場には 1 つのリスク証券と 1 つの安全資産があると仮定する．リスク証券にはファクタモデルを用いる．リスク証券の価格過程 $S=\{S_t\}_{0\le t\le T}$ とそのファクタ過程 $\mu=\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ は以下の確率微分方程式に従うとする．

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dw_t^{(1)}, \tag{1}$$

$$d\mu_t = \alpha(\nu-\mu_t)dt + \beta dw_t^{(2)}. \tag{2}$$

ただし, S_0, μ_0 はそれぞれ証券の価格過程とファクタ過程の初期値とし, ν は定数, σ, α, β は正の定数とする． $w^{(1)} = \{w_t^{(1)}\}, w^{(2)} = \{w_t^{(2)}\}$ は互いに独立なブラウン運動である．ファクタ過程は Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼ばれ, 回帰速度 α, 回帰水準 ν をもつ平均回帰モデルであり, ガウス過程の 1 つである．このモデルの特徴は, 証券価格のトレンドが確率過程としていることである．また, 安全資産 $B=\{B_t\}_{0\le t\le T}$ は, 金利を r（正の定数）とすると,

$$dB_t = rB_t dt \tag{3}$$

という常微分方程式に従うとする．

次に, 投資家の富過程 $X^\pi = \{X_t^\pi\}_{0\le t\le T}$ を考える．ただし, X_0 は初期資産とし, 正の定数とする．戦略 $\pi = \{\pi_t\}_{0\le t\le T}$ を時点 t における証券 S への投資した金額の総額とし, 自己資金充足的戦略かつ admissible な戦略と仮定する．このとき, 戦略 π を用いた投資家の富過程は次の確率微分方程式を満たす．

$$dX_t^\pi = \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t - \pi_t)\frac{dB_t}{B_t}. \tag{4}$$

本研究の目的である満期 T における富の期待効用最大化問題は, 投資家の効用関数に対数効用関数を与えると次式で表される．

$$\max_{\pi} E\left[\log X_T^\pi\right]. \tag{5}$$

(2) 戦略

次に, 本研究で採用する 11 個の戦略について考える．

(i). 戦略 1: 証券価格とファクタの値が観測できる完全情報の下での戦略を考える．Ocone and Karatzas [4] の Example 4.3 より, 完全情報の下での問題 (5) に対する最適取引戦略は,

$$\pi_t^F = \frac{\mu_t - r}{\sigma^2}\hat{X}_t^F \tag{6}$$

となることが知られている．ただし，$\hat{X}_t^F$ は戦略 1 を用いた富過程 (4) の解である．

(ii). 戦略 2: 証券価格のみ観測でき, ファクタの値は観測できない部分情報の下での戦略を考える．Lakner [3] の Example 4.4 より, 部分情報の下での問題 (5) に対する最適取引戦略は,

$$\pi_t^P = \frac{m_t - r}{\sigma^2}\hat{X}_t^P \tag{7}$$

となることが知られている． ただし， $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}_t^S\}_{0\le t\le T}$ を証券価格 S から生成されたフィルトレーションとし，$m_t = E[\mu_t|\mathcal{F}_t^S]$ とする．また，$\hat{X}_t^P$ は戦略 2 を用いた富過程 (4) の解である．ここでは，ファクタ過程のモデルが，Ornstein-Uhlenbeck 過程であるため，ガウス過程となっている．したがって，ガウス過程に対するフィルタリング理論を用いることが可能である．ここで, 津野 [1] の Theorem 6.4.1 より, m は次式で表されるような確率微分方程式のただ 1 つの $\mathcal{F}^S-$ 可測な解となる．

$$dm_t = \left(-\alpha - \frac{\gamma(t)}{\sigma^2}\right)m_t dt + \frac{\gamma(t)}{\sigma^2}\frac{dS_t}{S_t} + \alpha\nu dt, \tag{8}$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\frac{\gamma(t)}{\sigma^2} - 2\alpha\gamma(t) + \beta^2. \tag{9}$$

ただし, $\gamma = \{\gamma(t)\}_{0\le t\le T}$ は μ の条件付き自己共分散 $\gamma(t) = E\left[(\mu_t - m_t)^2|\mathcal{F}_t^S\right]$ である．

(iii). 戦略 3: 部分情報の下で, 時間とともにファクタを推定することをしないで，観測することができた値を常に用いることとする．戦略 3 では，ファクタ過程の初期値である μ_0 を常に用いる．このとき，問題 (5) に対する戦略は

$$\pi_t^{\mu_0} = \frac{\mu_0 - r}{\sigma^2}X_t^{\mu_0} \tag{10}$$

とする．ただし，X^{μ_0} は，戦略 3 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．この戦略 π^{μ_0} は最適戦略ではないことを注意しておく．

(iv). 戦略 4: 部分情報の下で, ファクタを推定せず, 自分の感覚を頼りにしている投資家を想定する．戦略 4 では，ファクタ過程の回帰水準である ν を常に用いる．このとき，問題 (5) に対する戦略は

$$\pi_t^{\nu} = \frac{\nu - r}{\sigma^2}X_t^{\nu} \tag{11}$$

とする．ただし，X^{ν} は，戦略 4 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．この戦略 π^{ν} も最適戦略ではないことを注意しておく．

(v). 戦略 5: 投資家の富の $u \ge 0$ 倍まで証券を買い, 富の $l \le 0$ 倍まで証券の空売りができるような, 投資に上限と下限を設定する制約があり, 完全情報下での戦略を考える．Karatzas and Shreve [2] の Example 4.2 より, この戦略によるこの問題 (5) に対する最適取引戦略は,

$$\begin{aligned}\pi_t^{FC} =& u\hat{X}_t^{FC}\mathbb{I}\{\mu_t > u\sigma^2 + r\} \\ &+ \frac{\mu_t - r}{\sigma^2}\hat{X}_t^{FC}\mathbb{I}\{l\sigma^2 + r \le \mu_t \le u\sigma^2 + r\} \\ &+ l\hat{X}_t^{FC}\mathbb{I}\{\mu_t < l\sigma^2 + r\}\end{aligned} \tag{12}$$

となる．ただし，X^{FC} は，戦略 5 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．また, $\mathbb{I}$ は定義関数とする．

(vi). 戦略 6: 戦略 5 と同様の制約がある, 部分情報下での戦略とする．Sass [5] の Lemma 3.3 より, この戦略によるこの問題 (5) に対する最適取引戦略は,

$$\begin{aligned}\pi_t^{PC} =& u\hat{X}_t^{PC}\mathbb{I}\{m_t > u\sigma^2 + r\} \\ &+ \frac{m_t - r}{\sigma^2}\hat{X}_t^{PC}\mathbb{I}\{l\sigma^2 + r \le m_t \le u\sigma^2 + r\} \\ &+ l\hat{X}_t^{PC}\mathbb{I}\{m_t < l\sigma^2 + r\}\end{aligned} \tag{13}$$

となる．ただし，X^{PC} は，戦略 6 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．

(vii). 戦略 7: 部分情報の下で, 戦略 2 に対して, 金利 r に関するパラメータの推定誤差を含んだ戦略とする．このときの取引戦略を次のように定義する．

$$\pi_t^{Er} = \frac{m_t - e_1 r}{\sigma^2}X_t^{Er}. \tag{14}$$

ただし, e_1 は正の定数とし, X^{Er} は戦略 7 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．また, この戦略は, 最適戦略ではないことを注意しておく．

(viii). 戦略 8: 部分情報の下で, 戦略 2 に対して, 証券価格のボラティリティσ に関するパラメータの推定誤差を含んだ戦略とする．このときの取引戦略を次のように定義する．

$$\pi_t^{E\sigma} = \frac{m_t^{E\sigma} - r}{(e_2\sigma)^2}X_t^{E\sigma}. \tag{15}$$

ただし, e_2 は正の定数とし, $m^{E\sigma}$ は式 (8), (9) の σ を $e_2\sigma$ に置き換えた解, $X^{E\sigma}$ は戦略 8 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．この戦略も, 戦略 7 と同様に最適戦略ではないことを注意しておく．

(ix). 戦略 9: 部分情報の下で, 戦略 2 に対して, ファクタ過程の回帰速度 α に関するパラメータの推定誤差を含んだ戦略とする．このときの取引戦略を次のように定義する．

$$\pi_t^{E\alpha} = \frac{m_t^{E\alpha} - r}{\sigma^2}X_t^{E\alpha}. \tag{16}$$

ただし, $m^{E\alpha}$ は式 (8), (9) の α を $e_3\alpha$ に置き換えた解とし, e_3 は正の定数, $X^{E\alpha}$ は戦略 9 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．この戦略も, 戦略 7 と同様に最適戦略ではないことに注意しておく．

(x). 戦略 10: 部分情報の下で, 戦略 2 に対して, ファクタ過程の回帰水準 ν に関するパラメータの推定誤差を含んだ戦略とする．このときの取引戦略を次のように定義する．

$$\pi_t^{E\nu} = \frac{m_t^{E\nu} - r}{\sigma^2}X_t^{E\nu}. \tag{17}$$

ただし, $m^{E\nu}$ は式 (8) の ν を $e_4\nu$ に置き換えた解とし, e_4 は正の定数, $X^{E\nu}$ は戦略 10 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．この戦略も, 戦略 7 と同様に最適戦略ではないことに注意しておく．

(xi). 戦略 11: 部分情報の下で, 戦略 2 に対して, ファクタ過程のボラティリティβ に関するパラメータの推定誤差を含んだ戦略とする．このときの取引戦略を次のように定義する．

$$\pi_t^{E\beta} = \frac{m_t^{E\beta} - r}{\sigma^2} X_t^{E\beta}. \tag{18}$$

ただし, $m^{E\beta}$ は式 (8), (9) の β を $e_5\beta$ に置き換えた解とし, e_5 は正の定数, $X^{E\beta}$ は戦略 11 を用いた確率微分方程式 (4) の解である．この戦略も, 戦略 7 と同様に最適戦略ではないことに注意しておく．

3. 理論的計算による期待効用と考察

2.(2) 節の戦略 $1, 2, 3, 4, 7$ に対して, 満期の富に対する対数期待効用 $E\left[\log X_T^\pi\right]$ を具体的に計算する．富過程 X_t^π は 5 つの各戦略 π_t を確率微分方程式 (4) に代入すると線形確率微分方程式になる．戦略 $1, 2, 3, 4$ において $\log X_t^\pi$ に伊藤の公式を用いると, 次のようになる．$a_t = \mu_t, m_t, \mu_0, \nu$ に対して,

$$\begin{aligned} d\log X_t^\pi = &\left\{ r + \frac{r^2}{2\sigma^2} + \mu_t \frac{a_t - r}{\sigma^2} - \frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\} dt \\ &+ \frac{a_t - r}{\sigma} dw_t^{(1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

$a_t = \mu_t, \mu_0, \nu$ に対しては, 簡単な計算から次のように得られる．

$$\begin{aligned} E\left[\log \hat{X}_T^F\right] =& \log X_0 + \left(r + \frac{r^2}{2\sigma^2} \right) T - \frac{r}{\sigma^2} \int_0^T E[\mu_s] ds \\ &+ \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T E[\mu_s^2] ds, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} E\left[\log X_T^b\right] =& \log X_0 + \left(r + \frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{b^2}{2\sigma^2} \right) T \\ &+ \frac{b - r}{\sigma^2} \int_0^T E[\mu_s] ds. \end{aligned} \tag{21}$$

ただし, $b = \mu_0, \nu$ とし,

$$\int_0^T E[\mu_s] ds = \nu T - \frac{(\mu_0 - \nu)\left(e^{-\alpha T} - 1\right)}{\alpha}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T E[\mu_s^2] ds =& \left(\frac{\beta^2}{2\alpha} + \nu^2 \right) T - \frac{2\nu(\mu_0 - \nu)}{\alpha} \left(e^{-\alpha T} - 1 \right) \\ &- \frac{(\mu_0 - \nu)^2 - \frac{\beta^2}{2\alpha}}{2\alpha} \left(e^{-2\alpha T} - 1 \right). \end{aligned} \tag{23}$$

今, 式 (20) と (21) を比べると,

$$\begin{aligned} &E\left[\log \hat{X}_T^F\right] - E\left[\log X_T^b\right] \\ &= \frac{T}{2\sigma^2} \left(b - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^T E[\mu_s] ds \right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2 T} \left(\int_0^T E[\mu_s] ds \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T E[\mu_s^2] ds. \end{aligned} \tag{24}$$

コーシー・シュワルツの不等式から, 次が成り立つ．

$$\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(\int_0^T E[\mu_s] ds \right)^2 \leq \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T E[\mu_s^2] ds. \tag{25}$$

よって, 任意の $b \in R$ に対して,

$$E\left[\log X_t^b\right] \leq E\left[\log \hat{X}_T^F\right] \tag{26}$$

となる．従って, 戦略 $3, 4$ の期待効用は戦略 1 の期待効用より常に小さくなることが示された．

次に, $a_t = m_t$ に対しては, (9) 式より, $\gamma(t)$ は Riccati 方程式の解であり, 具体的に次のように与えられる．

$$\gamma(t) = \sqrt{C}\sigma \frac{C_1 \exp\left(2t\frac{\sqrt{C}}{\sigma}\right) + C_2}{C_1 \exp\left(2t\frac{\sqrt{C}}{\sigma}\right) - C_2} - \alpha\sigma^2. \tag{27}$$

ただし, $C = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2, C_1 = \sqrt{C}\sigma + \gamma_0 + \alpha\sigma^2, C_2 = -\sqrt{C}\sigma + \gamma_0 + \alpha\sigma^2$ とする．さらに条件付き期待値の性質より,

$$\gamma(t) = -E\left[\mu_t^2 | \mathcal{F}_t^S\right] + E\left[m_t^2\right], \tag{28}$$

$$E\left[\mu_t m_t\right] = E\left[m_t E\left[\mu_t | \mathcal{F}_t^S\right]\right] = E\left[m_t^2\right] = E\left[\mu_t^2\right] + \gamma(t). \tag{29}$$

これらを用いると, 次のようになる．

$$E\left[\log \hat{X}_T^P\right] = E\left[\log \hat{X}_T^F\right] - \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \gamma(s) ds. \tag{30}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma(s) ds =& \sigma^2 \log \frac{C_1 \exp\left(2\sqrt{C}T/\sigma\right) - C_2}{C_1 - C_2} \\ &- \sigma\left(\sqrt{C} + \alpha\sigma\right) T. \end{aligned} \tag{31}$$

条件付き分散 $\gamma(t)$ は常に正であるから, (30) 式より完全情報下で取引戦略を考えた期待効用は, 部分情報下で取引戦略を考えたものより高くなり, その差が $\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T \gamma(s) ds$ であることが示された．

次に, 戦略 7 において $\log X_t^\pi$ に伊藤の公式を用いると, 次のようになる．

$$\begin{aligned} d\log X_t^{Er} =& \left\{ r + \frac{(2 - e_1) e_1 r^2}{2\sigma^2} + \frac{r m_t}{\sigma^2} (e_1 - 1) \right. \\ &\left. + \mu_t \frac{m_t - e_1 r}{\sigma^2} - \frac{m_t^2}{2\sigma^2} \right\} dt + \frac{m_t - r}{\sigma} dw_t^{(1)}. \end{aligned} \tag{32}$$

簡単な計算から, 戦略 7 に対する対数期待効用は次のように得られる．

$$\begin{aligned} E\left[\log X_T^{Er}\right] =& \log X_0 + rT + \frac{(2 - e_1) e_1 r^2}{2\sigma^2} T \\ &- \frac{r}{\sigma^2} \int_0^T E\left[\mu_s\right] ds + \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T E\left[\mu_s^2\right] ds \\ &- \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \gamma(s) ds. \end{aligned} \tag{33}$$

これは, $e_1 = 1$ としたとき, (30) 式と同じになることが分かる．また, パラメータの推定誤差がどの項に影響を与えるかも分かる．

4. 数値実験結果と考察

(1) 数値実験 1.1（各パラメータと期待効用の関係）

実際に各パラメータに数値を設定しシミュレーションを行って，戦略 1 から戦略 6 までの 6 つの戦略の下での期待効用を計算する．各パラメータを次のように設定する．$S_0 = 100$, $\mu_0 = 0.02$, $X_0 = 500$, $T = 1$, $r = 0.03$, $\sigma = 0.3$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$, $u = 6$, $l = -1$. これらの数値を基準とし，各

パラメータ r, σ, α, ν, β を変化させ，6 つの戦略での期待効用を計算し，各パラメータの期待効用への影響を考察する．ただし, シミュレーションの手法として, 証券の価格過程やファクタ過程などの微分方程式には時間を 300 分割したオイラー・丸山近似を用い, 期待効用を計算するためにはシナリオを 10^5 個発生させるモンテカルロ・シミュレーションを用いる．$r, \sigma, \alpha, \nu, \beta$ を変化させたときの 6 つの戦略のグラフをそれぞれ図 1, 2, 3, 4, 5 で与える．

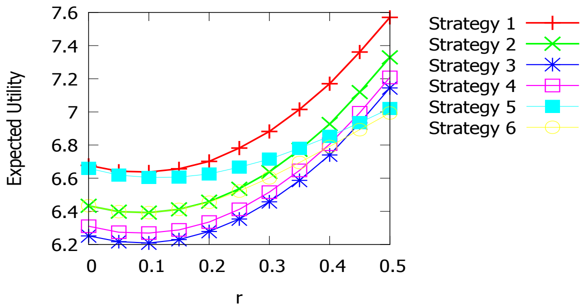

図 1：r を変化させたときの期待効用

金利 r を変化させたとき, 各戦略の分子を見ると, 投資家の戦略は証券の期待収益率と金利の差によって投資比率が決定するような戦略を考えている．つまり, 金利が高い場合, 安全資産に預ける比率が大きくなる．逆に金利が低い場合, 証券に投資する比率が大きくなる．しかし, r はすべての戦略に同等の影響を及ぼすので, 図 1 を見て分かるように, 期待効用の差にあまり影響を与えない．また, 金利が大きくなると制約のある戦略 5 と 6 は制約のない戦略 1 と 2 と比べて差が広がっていった．これは, 金利が大きくなると安全資産に預ける比率が大きくなるが, 今回制約の下限であるパラメータ l を 0 に近くし, 安全資産に預けることを抑えるような設定にしているため, 制約のある戦略は金利が大きくなると富が増えにくくなるためである．

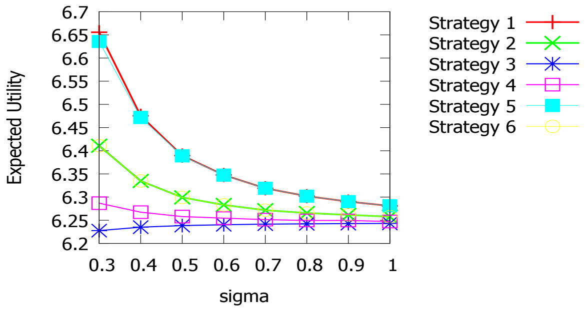

図 2：σ を変化させたときの期待効用

σ は, 証券の価格過程のボラティリティで, 証券価格の変動の激しさを決定するパラメータであるので, 投資家は σ をリスクと考えている．各戦略の分母を見ると, σ も各戦略に影響を及ぼし, 大きくなると証券へ投資する比率が小さくなる．図 2 を見ると, σ を大きくしていくと, 各戦略での期待効用はすべてある値に近づいていっているのが分かる．これは証券へ投資するリスクが大きいので, すべての戦略で証券への投資量が少なくなり, ほとんどの資産を安全資産に預けていることを表している．本研究では, リスク回避的な投資家を仮定しているので, この結果は妥当である．

α はファクタ過程の回帰速度で, ファクタ μ が回帰水準 ν に引き寄せられる強さを表している．α はファクタの推定に

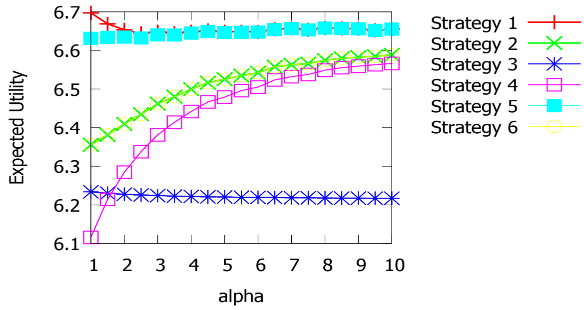

図 3：α を変化させたときの期待効用

影響を与えるパラメータと考えられる．図 3 を見ると, α が小さいと, 戦略 1 と 2 に大きな差が生じている．これは, α を小さくするとことによってファクタ μ が回帰水準 ν に引き寄せられる強さが弱くなり, μ が ν まわりの値をとらなくなり, ファクタの推定精度が悪くなるため, 戦略 1 と 2 に差が生じたと考えられる．α を大きくすると逆の理由で, 戦略 1 と 2 の差が縮まっていることが確認できる．また, α が大きく, ファクタ μ の初期値 μ_0 と ν の差が大きいと, 戦略 3 の期待効用がほかの戦略の期待効用と比べて 1 番低い結果となったため, この数値の設定上では, 戦略 3 が的外れな戦略であることを表している．

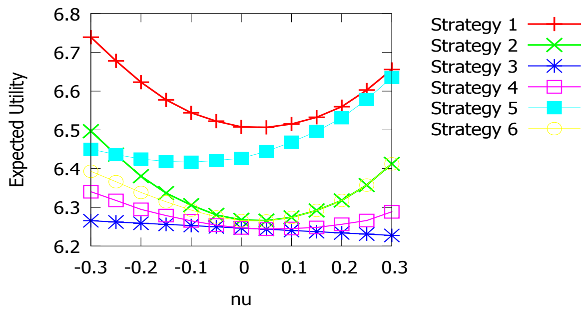

図 4：ν を変化させたときの期待効用

ν は上で述べたようにファクタ過程の回帰水準である．α が大きいとき, ファクタ μ は ν のまわりを推移していると考えられる．図 4 を見ると, 戦略 3, 5, 6 の期待効用を除いたすべての戦略の期待効用は, ν に関して二次関数になっていることが分かる．このことから, 投資環境として通常証券の成長率が正の方が望ましいと考えられるが, この結果は成長率の回帰水準 ν の正負に関わらず, ある軸を境に対称な投資環境が整うことを意味している．したがって, 証券の成長率が負の場合でも, 正のときと同様の効用を達成することが可能である．

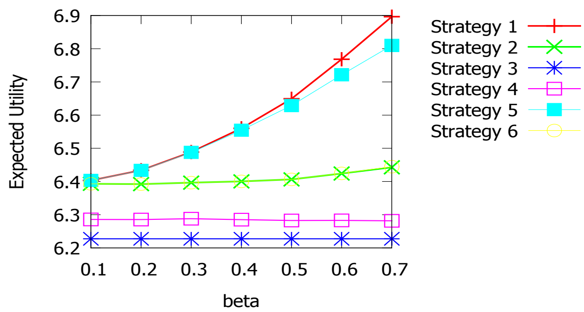

図 5：β を変化させたときの期待効用

β はファクタ過程のボラティリティである．図 5 を見ると, β を大きくしていくと各期待効用の差が広がっていくのが確認できる．β が大きいと, ファクタ μ が大きく変動しやすくなるのでファクタの推定精度が悪くなり, 期待効用の差が広がっていったと考えられる．逆に β が小さいときはファクタがあまり変動せず, 推定しやすくなるので戦略 1 と 2 は非常に近い期待効用となる．

(2)　数値実験 1.2 （各パラメータと期待効用の関係）

4.(1) 節のパラメータを基準にし, 各パラメータの推定誤差の倍率を $e_1 = 1.5, e_2 = 1.5, e_3 = 1.5, e_4 = 1.5, e_5 = 1.5$ と設定し, 戦略 7 から戦略 11 までの 5 つの戦略の下での期待効用を計算する．各パラメータ r, σ, α, ν, β を変化させ，5 つの戦略での期待効用を計算し，4.(1) 節で計算した戦略 1 と戦略 2 での期待効用と比較しながら各パラメータの期待効用への影響を考察する．$r, \sigma, \alpha, \nu, \beta$ を変化させたときの 5 つの戦略のグラフをそれぞれ図 6, 7, 8, 9, 10 で与える．

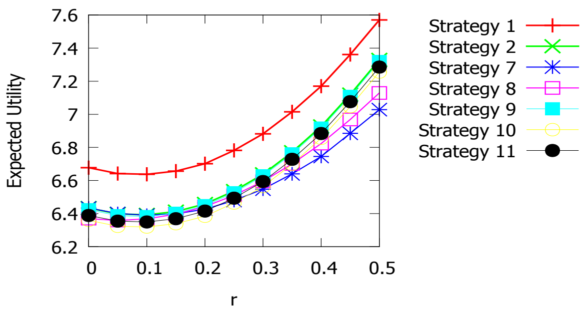

図 6：r を変化させたときの期待効用

図 6 より, r が大きくなると戦略 2 と戦略 7, 8 との差は開いていき, 他の推定誤差を含んだ戦略は戦略 2 とほぼ同等の期待効用をとっている．戦略 7 は, 真の金利の値に e_1 の倍率のある誤差を戦略に組み込んでいるため, 金利が大きくなると真の値との差が大きくなり, 他の推定誤差を含んだ戦略より戦略 2 との差は大きくなっている．また, 戦略 8 は σ に関する推定誤差を含んでいる戦略であるが, σ は投資比率を決定するときの重要なパラメータであるので, r の変化に過剰に反応しているものと考えられる．

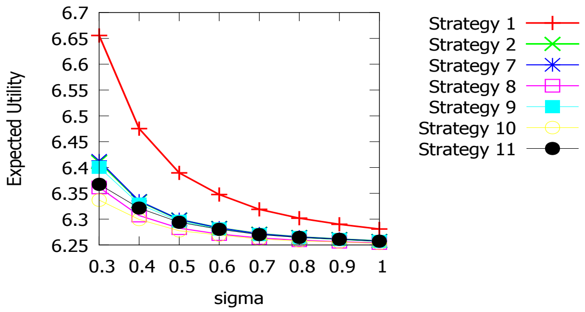

図 7：σ を変化させたときの期待効用

図 7 より, σ を大きくすると, 各戦略による期待効用はある値に収束しているので, 前節よりリスク回避的な投資家を表していると言える．また, σ を小さくしていくと, 戦略 10 による期待効用が 1 番低くなり, 次に戦略 11 , σ に推定誤差がある戦略 8 が 3 番目に小さい結果となっている．σ を小さくすることによって証券に投資, または安全資産に投資する比率が大きくなる．つまり, 今回の数値設定上では, σ が小さいときに ν に関する推定誤差による戦略が 1 番損をする可能性があることが分かる．

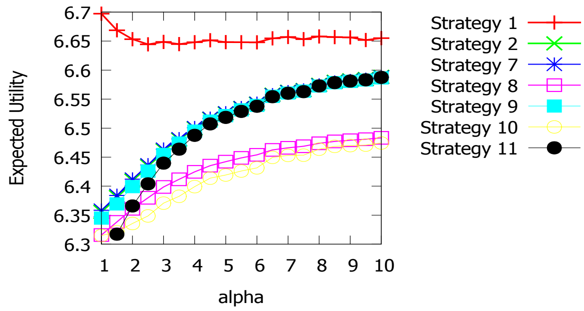

図 8：α を変化させたときの期待効用

図 8 より, α 大きくしていくと, 戦略 8 と戦略 2 との差は大きく開いてしまっている．これは, α を大きくするとファクタの推定が容易になるが, 投資比率を決定するときに σ が重要であるので, σ に推定誤差があるとファクタの推定が容易でも戦略 2 とは異なった投資比率になるためだと考えられる．逆に, α を小さくしていくと, 戦略 11 と戦略 2 との差は開いていっている．これは, α が小さいと, ファクタが β の数値に依存して変動しやすくなるので, β の推定誤差の影響が強くなっていくものと考えられる．また, 戦略 10 は α の変化に関わらず, 常に戦略 2 との差があることが見て分かる．これは, 回帰速度が回帰水準に回帰する強さを表しているので, 回帰水準に推定誤差があるとファクタの推定の容易さに関わらず, 戦略 10 は戦略 2 より常に低い期待効用を得る．

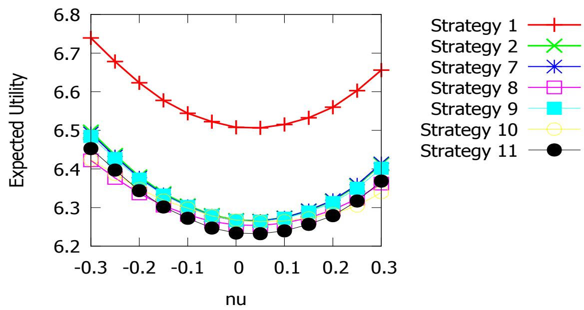

図 9：ν を変化させたときの期待効用

図 9 より, 前節と同等の理由から, すべての戦略で ν に関して二次関数になっていることが見て分かる．また多少の差はあるものの, パラメータの推定誤差がある戦略と戦略 2 での期待効用はほぼ同等の値をとる結果となった．

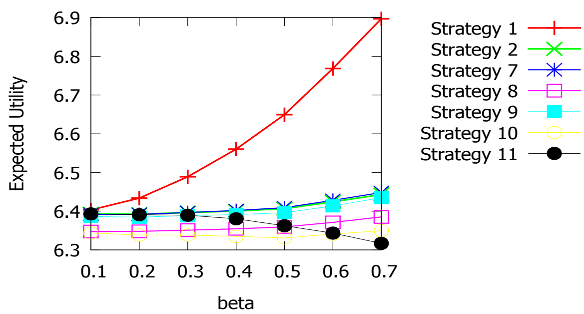

図 10：β を変化させたときの期待効用

図 10 より, β を大きくすると戦略 11 による期待効用は下降方向に向かっている. これは, β が大きいときは推定誤差による影響がとても強いことを表している.

(3)　数値実験 1.3 （各パラメータと期待効用の関係）

4.(1) 節のパラメータを基準にし, 各パラメータの推定誤差の倍率 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 を変化させ, 戦略 7 から戦略 11 の 5 つの戦略の下での期待効用を各戦略ごとに計算する. e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 を変化させたときの各戦略のグラフをそれぞれ図 11, 12, 13, 14, 15 で与える.

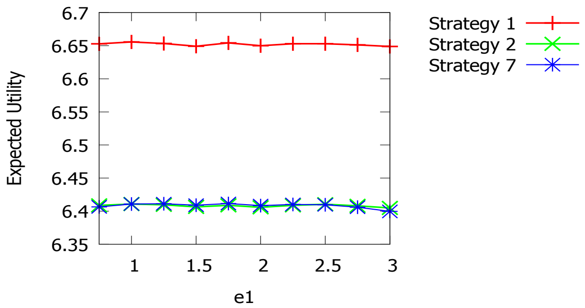

図 11：e_1 を変化させたときの期待効用

図 11 より, r に関する推定誤差の倍率 e_1 を変化させても戦略 7 と戦略 2 での期待効用の差にあまり影響は見られなかった. ただし, e_1 が 1 から離れた値をとると若干の差が生じている. したがって, r の推定誤差は期待効用にあまり影響はないが, その推定誤差が極端に大きくなると徐々に影響が強くなると考えられる.

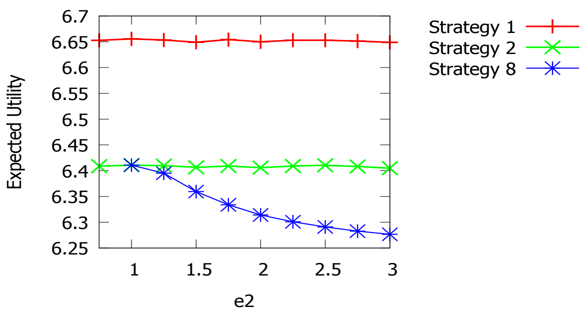

図 12：e_2 を変化させたときの期待効用

図 12 より, σ に関する推定誤差の倍率 e_2 を変化させると, e_2 が 1 より大きくなると戦略 8 と戦略 2 での期待効用の差は開いていっている. σ は投資比率を決定するときに重要なパラメータであるので, σ の推定は非常に大事であることが分かる. また, 図 12 を見て分かる通り, σ の推定誤差が少しでもあると, 推定誤差のない戦略と比べて期待効用が小さくなっていることからも, σ の推定が重要であることが言える.

図 13 より, α に関する推定誤差の倍率 e_3 を変化させると, e_3 が 1 より大きい場合に戦略 9 と戦略 2 での期待効用の差は徐々に大きくなっていることが分かる. α を真の値より小さい値を想定しても結果はあまり変わらないが, 真の値より大きい値を想定してしまうと期待効用が多少下がってしまう.

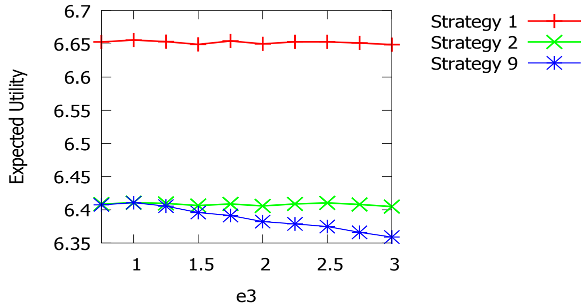

図 13：e_3 を変化させたときの期待効用

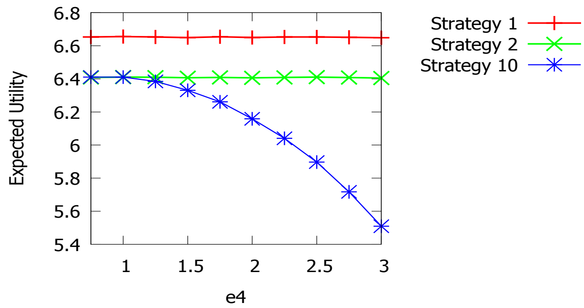

図 14：e_4 を変化させたときの期待効用

図 14 より, ν に関する推定誤差の倍率 e_4 を変化させると, e_4 が 1 より大きい場合に戦略 10 と戦略 2 での期待効用の差は徐々に大きくなっており, e_3 を変化させたときよりも, 大きく差が開いている. ν を真の値よりも小さい値を想定しても結果はあまり変わらないが, 真の値よりも大きい値を想定してしまうと, 真の値との誤差が大きい分, 大幅に期待効用が下がってしまう.

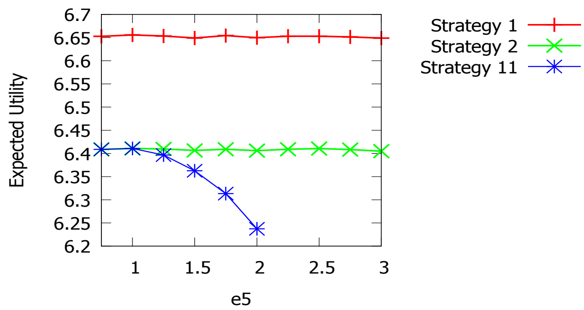

図 15：e_5 を変化させたときの期待効用

図 15 より, β に関する推定誤差の倍率 e_5 を変化させると, e_5 が 1 より大きい場合に戦略 11 と戦略 2 での期待効用の差は徐々に大きくなっており, e_4 を変化させたときと同等の差がある. β を真の値より小さい値を想定しても結果はあまり変わらないが, 真の値より大きい値を想定してしまうと, 真の値との誤差が大きい分, 大幅に期待効用が下がってしまう.

(4)　数値実験 2.1 （満期での富への影響）

2 つ目の数値実験として, 戦略 1 から戦略 6 の 6 つの戦略による満期の富を 10 万個発生させ, その分布のグラフを

図 16, 満期における富の基本統計量（平均, 標準偏差）を表 1 で与える．

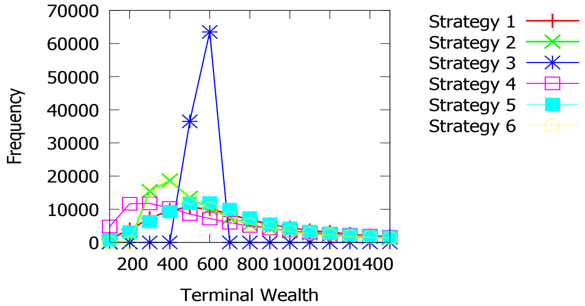

図 16：満期での富の分布

表 1 満期における富の基本統計量

	戦略 1	戦略 2	戦略 3
平均	2095.97	901.94	506.84
標準偏差	50770.11	1927.21	18.93

	戦略 4	戦略 5	戦略 6
平均	891.98	1417.63	900.16
標準偏差	1181.52	5425.31	1815.61

図 16, 表 1 を見ると, 戦略 3 での富は標準偏差が小さく, 平均が初期資産に近いので, 満期での富は初期資産に近い場合が多い．戦略 1 と戦略 4 , 戦略 2 は標準偏差が大きいので, 満期での富は爆発的に増える場合や, 極端に減る場合もあることが分かる．ただその中で, 戦略 2 は富が極端に減らないような作用が見られる．数値的に証券 S とファクタを推定した m の相関をとある 10 シナリオで求めると, 証券に上昇傾向が見られるときに相関係数は大きくなり, 証券に下降傾向が見られるときに相関係数は 0 に近い値をとることが分かった．このことが, 戦略 2 の富が極端に減らないような作用ではないかと考えられる．また, 戦略 5 と戦略 6 は表 1 で求めた基本統計量がそれぞれ戦略 1 と戦略 2 のそれよりやや下回る結果となっており, 完全情報下での制約の有無の差による戦略が部分情報下でのそれより大きく下回っている結果となった．今回の数値設定上では, 制約の有無の差が満期の富に与える影響は, 完全情報の場合には強く, 部分情報の場合には弱いということが言える．

(5)　数値実験 2.2 （満期での富への影響）

戦略 7 から戦略 11 の 5 つの戦略による満期の富を 10 万個発生させ, 前節と同じ数値実験を行う．満期の富の分布のグラフを図 17, 満期における富の基本統計量（平均, 標準偏差）を表 2 で与える．

図 17, 表 2 を見ると, 戦略 10 を除いたすべての推定誤差を含んだ戦略は, 戦略 2 と同様に極端に富が増える場合はあるが極端に減らないような結果が得られた．戦略 10 は ν に関して推定誤差があり, この推定誤差がファクタの推定に強く影響しているため, このような結果となったのではないかと考えられる．また, 戦略 10 と 11 は戦略 2 と比べて, 満期の富の平均が大きくなっている．これは, 戦略 10, 11 による満期の富での標準偏差が戦略 2 のものと比べて大きいことか

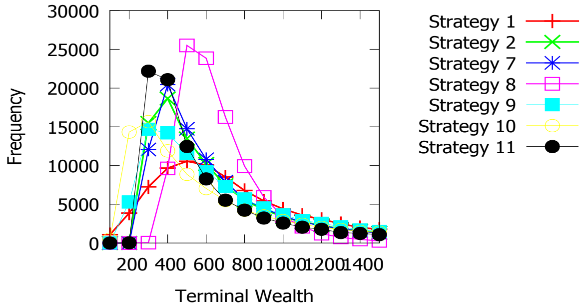

図 17：満期での富の分布

表 2 満期における富の基本統計量

	戦略 2	戦略 7	戦略 8
平均	901.94	864.40	609.18
標準偏差	1927.21	1656.28	216.32

	戦略 9	戦略 10	戦略 11
平均	900.09	1216.26	1322.34
標準偏差	1475.53	5111.23	13983.03

ら, ν と β による推定誤差を含むことによって, 満期の富が増えやすいことが言える．戦略 2 と戦略 7, 8, 9 の富の平均と標準偏差を見ると, 戦略 7, 9 は戦略 2 を少し下回り, 戦略 8 は戦略 7 を大きく下回っているので, r と σ, α に関するパラメータの推定誤差の倍率を同じ倍率にしたときは, r や α に推定誤差がある場合より σ に推定誤差がある場合の方が満期の富が増えにくくなることが言える．

5.　まとめと今後の展望

(1)　各戦略のまとめ

(i). 戦略 1: 期待効用に関する式 (20), (21), (30) から理論的に戦略 1 の期待効用が他の戦略より高い期待効用を与えることが示された．

数値実験から β が小さいときを除き, 他の戦略を大きく引き離した期待効用を与える．このことは投資戦略を考える上で, 情報の有無が非常に重要であることが分かる．

ファクタは観測できるため, ファクタが大きくなった場合や小さくなった場合に極端なレバレッジをとり, 満期で極度に大きい富や小さい富をとることがある．

(ii). 戦略 2: 理論的には戦略 2 と戦略 3, 4 との期待効用の具体的な大小関係は示されていないが, 数値実験上では戦略 2 > 戦略 3, 4 であることが分かる．今回の数値実験で用いた数値では, ボラティリティが標準的な大きさや回帰速度が大きいとき, ファクタのボラティリティが大きいときに戦略 3 や戦略 4 との期待効用の差が大きくなり, 推定することの意味が大きくなることが分かる．

また, 満期の分布を調べると極端に富が小さくなることは少ない．これは, 推定が証券価格から成される ため, 証券価格の推移と類似した推定結果が得られる．したがって, 推定値と証券価格には負の相関が出にくく, 証券価格が下落しているときは推定値も小さくな

り, 株への投資比率も下げるため, 結果的に極端に大きな損失を出しにくいものと考えられる. この特徴は戦略 1 のものとは異なるものである.

(iii). 戦略 3: 今回の数値では, ボラティリティが大きい場合や回帰速度がゼロに近い場合, ファクタのボラティリティが小さい場合などの限られた場合には推定の有無はあまり期待効用に影響を与えないことが分かる. 逆に言うと, 上記の場合以外は推定をしないことで期待効用を損していると言える. 特に, 今回の数値では $\mu_0 = 0.02, r = 0.03$ であるため戦略 3 は証券を少額だけ空売りするという戦略であるため, 満期での富の分布は非常にレンジの小さいものとなった.

(iv). 戦略 4: 戦略 4 ではモデルリスクを含む投資家である. ただし, この投資家の成長率への予測はファクタの真の回帰水準 ν であるため, モデルリスク下でありながらも, その中ではまだ正確な予測をしている投資家と考えられる. このことから, 今回の数値実験結果は比較的戦略 2 に近い結果を与え, 戦略 3 をたびたび上回る結果を与えている. しかし, 今回の結果は良好な予想の下での結果であるため, 現実的にはこの手の投資家の投資結果はもっと悪いものとなると考えられる.

戦略 2 との関係で言えば, 戦略 3 と同様の状況で期待効用の差が縮まり, それ以外の場合は期待効用に差が生じることとなる.

(v). 戦略 5, 6: 今回のパラメータ u, l の数値設定上, 自身の富の 6 倍まで証券を買うことができ, 自身の富の 1 倍しか証券の空売りをできない制約をとっている. この場合, 金利 r が大きいときは空売りをしようとする戦略をとりやすいので, 制約の下限 l を 0 に近くしてしまうと自身の富を増やすことが困難になってしまう. また, ファクタの回帰水準 ν が小さいとき, つまり証券価格が下落の方向に向かっているときに図 4 より制約のある戦略は下がる作用があると考えられる. この 2 つのパラメータ r, ν が変化したときに, 制約のある戦略と制約のない戦略との差に特徴が見られた. したがって, r と ν を観測した値, または推定した値によって制約の上限と下限を決定するとより高い期待効用が得られるのではないかと考えられる. また, 戦略 5 と 6 の差は, r が大きい場合と ν が小さい場合を除くと, 戦略 1 と 2 とほぼ同等の差がある結果が見られた. 戦略 5 と 6 , 戦略 1 と 2 は情報の有無という共通の差があるため, 制約を課しても情報の有無の差が期待効用に与える影響はほぼ変わりない結果となった.

(vi). 戦略 7 : パラメータ $\sigma, \alpha, \nu, \beta$ を変化させたとき, 金利 r に関する推定誤差を含んだ戦略 7 は推定誤差を考慮しない戦略 2 とほぼ同じ期待効用を得た. r を変化させたときのみ, 戦略 2 の期待効用との差が広がっているので, r に関する推定誤差が結果に与える影響はあまり強くないと考えられる.

(vii). 戦略 8 : 証券のボラティリティσ に関する推定誤差を含んだ戦略 8 は, r が大きいときや, σ が小さいとき, α が大きいとき, ν が 0 から離れた値をとるとき, β がとるすべての値で推定誤差を含んでいない戦略 2 の期待効用との差がひらいている. 以上より, σ は取引戦略の分母にあるため, この推定は非常に大事であることが分かる.

(viii). 戦略 9 : ファクタの回帰速度 α に関する推定誤差を含んだ戦略 9 は, 今回の数値設定上で戦略 2 とあまり差が生じなかったので, α の推定誤差は期待効用にあまり影響を与えない結果となった.

(ix). 戦略 10 : ファクタの回帰水準 ν に関する推定誤差を含んだ戦略 10 は, 常に戦略 2 による期待効用より下回る結果が得られた. ν の真の値と違った $e_4\nu$ を想定しているので, 真のファクタが回帰すべき値を誤り, ファクタの推定に強い影響を与えているものと考えられる. ファクタを推定する際に, ν の推定が 1 番大事であることが分かる.

(x). 戦略 11 : ファクタのボラティリティβ に関する推定誤差を含んだ戦略 11 は, α が小さい場合と β が大きい場合を除いて戦略 2 とほぼ同等の期待効用が得られた. この 2 つの状況を除けば, β の推定誤差は結果にあまり影響を与えないことが言える.

(2) 今後の展望

今後は, 制約のある戦略について理論的に考察をする. 例えば, 制約のある戦略での満期における対数期待効用を理論的に計算する. なぜ, 制約のある戦略に注力するかというと, 本研究でのシミュレーション回数を 10 万回としており, 制約のない戦略だと極端に富が増えたり減ったりしてしまうなどのあまり現実的でない状況が多々あるため, それを抑えるために戦略に制約を課し, より正確な影響を考察したいと考えているからである. また, ファクタと証券価格の相関をより詳しく調べる, つまり, 理論的にこの 2 つの相関関係を導出する. 戦略 2 は他の戦略と同じように富が極端に増えるシチュエーションは起こるが, 富が極端に減るようなシチュエーションはあまり見られなかった. 戦略 2 には, 富が極端に減らないような作用があると考え, なぜこのような作用があるのかを調べるために, ファクタと証券価格との相関やファクタを推定したものと証券価格との相関を明らかにする. 他にも, 推定誤差のある戦略での満期における対数期待効用を理論的に計算していく. また, 確率的ボラティリティモデルやべき型効用関数などの別のモデルを考慮したり, 証券の数を増やすことなどを想定していく.

参考文献

1) 津野 義道, *Kalman-Bucy* のフィルター理論, 共立出版, 2006.
2) I. Karatzas, S.E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer Science Business Media, 1998.
3) P. Lakner, *Optimal Trading Strategy for An Investor The Case of Partial Information*, Stochastic Processes and their Applications, 76, no.1-2, pp.77-97, 1998.
4) D. Ocone, I. Karatzas, *A Generalized Clark Representation Formula, with Applications to Optimal Portfolios*, Stochastics and Stochastic Reports, 34, no.3-4, pp.187-220, 1991.
5) J. Sass, *Utility Maximization with Convex Constraints and Partial Information*, Acta Applicandae Mathematicae, 97, no.1-3, pp.221-238, 2007.