

Hestonモデルにおける平均・分散ヘッジとデルタヘッジの比較

青木, 佐和 / AOKI, Sawa

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

56

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2015-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00011308>

Heston モデルにおける平均・分散ヘッジとデルタヘッジの比較

COMPARISON BETWEEN MEAN-VARIANCE HEDGING AND DELTA HEDGING IN HESTON MODEL

青木 佐和

Sawa AOKI

指導教員 安田 和弘

法政大学大学院理工学研究科システム工学専攻修士課程

Hedging errors of derivatives in an incomplete market are considered. We use the mean-variance hedging which is one of quadratic hedges and is driven from the least mean-square error of the hedging under the real world probability measure. In particular, we consider hedging errors of European put option under Heston stochastic volatility model. Through numerical experiments, we investigate relationships between parameters and hedging errors, and also the features of hedging errors in case of containing parameter estimation errors. In addition, we compare the mean-variance hedging to the delta hedging in their cases.

Key Words : Mean-Variance Hedging, Delta Hedging, Hedging Errors, Heston Model

1. はじめに

市場が非完備である場合には、ペイオフは自己資金充足的ポートフォリオで必ずしも複製できるとは限らない。非完備市場でのヘッジポートフォリオの求め方は、多くの手法が存在している。その一つにクオドラティックヘッジがある。クオドラティックヘッジとは、ペイオフとヘッジポートフォリオの価値の平均二乗誤差を最小にするヘッジ手法である。

一般に市場は非完備であることが知られているが、金融業界では広くデルタヘッジが使われている。このデルタヘッジは、デルタ（原資産価格の微小変化に対するオプション価格の変化率）を用いる、リスク中立確率測度 Q の下で有効な方法であり、現実確率測度 P の下においても有効であるとは限らない。そこで、デルタヘッジとクオドラティックヘッジとを現実確率測度 P の下で比較する。とくに、クオドラティックヘッジの中の平均・分散ヘッジ法を用いる。

本論文では非完備市場を表すモデルとして、確率的ボラティリティモデルである Heston モデルを用い、ヨーロッパ型プットオプションに対して、パラメータが既知の状況でパラメータを変化させた場合と、パラメータが推定誤差を含む状況で推定誤差を変化させた場合について、デルタヘッジとクオドラティックヘッジを行い、そのヘッジ誤差について比較及び考察を行っていく。クオドラティックヘッジの手法は参考文献 [1], [2] を参考にする。これにより、オプションの売り手に対して価格付けや、最適なヘッジポートフォリオの構築に有用であり、オプション取引の安全性の強化に役立つものと考ええる。

2. ヘッジポートフォリオについて

本論文ではヨーロッパ型プットオプションを扱う。ヨーロッパ型オプションは満期のみで権利の行使が可能なオプションであり、行使価格を K 、満期を T 、満期の株価を X_T とす

るとヨーロッパ型プットオプションのペイオフ H は次のようになる。

$$H = \max\{K - X_T, 0\}.$$

販売者は、株式と安全資産に投資し自己資金充足的にヘッジを行うとする。簡単のため安全資産の金利 r を $r = 0$ とする。この時のヘッジポートフォリオ φ を、株式保有量を α 、安全資産保有量を β とし、 $\varphi = (\alpha, \beta)$ とする。このヘッジポートフォリオの価値 $V_t(\varphi)$ は次のようになる。

$$V_t(\varphi) = \alpha_t X_t + \beta_t, (0 \leq t < T).$$

また、 V_T は、初期資産 V_0 と時刻 0 から時刻 T までの運用損益の合計となるため次で表せる。

$$V_T(\varphi) = V_0 + \int_0^T \alpha_s dX_s.$$

クオドラティックヘッジの時のヘッジポートフォリオを具体的に計算し、求めることを考えていく。

3. クオドラティックヘッジについて

クオドラティックヘッジには二つの方法がある。そのうちの平均・分散ヘッジ法について扱う。本節の説明は参考文献 [1], [2] を参考とする。

(1) 平均・分散ヘッジ法とは

現実確率測度 P の下において考える。平均・分散ヘッジ法とは、ペイオフと満期でのヘッジポートフォリオの価値の平均二乗誤差、つまり、

$$E_P \left[\left(H - \left(V_0 + \int_0^T \alpha_s dX_s \right) \right)^2 \right]$$

を最小にするヘッジポートフォリオ φ と V_0 を考える方法である。この時、自己資本充足的にヘッジを行うため、 V_0 はオプションの価格と等しくなる。

(2) Galtchok-Kunita-Watanabe 分解の定理

Galtchok-Kunita-Watanabe 分解を用い、ペイオフ H を P と同値な variance-optimal ELMM \tilde{P} の下、次で分解できる。

$$H = \tilde{H}_0 + \int_0^T \tilde{\delta}_s dX_s + \tilde{L}_T. \quad (1)$$

ただし、 \tilde{L}_T は $\int_0^T \tilde{\delta}_s dX_s$ に直交する確率変数、 $(\tilde{\delta}_t)_{t \in [0, T]}$ はある 2 乗可積分可予測過程の戦略である。この時、

$$V_0 = \tilde{H}_0 = E_{\tilde{P}}[H]$$

となる。

(3) Heston モデルによる平均・分散ヘッジ戦略

株価が Heston モデル (変形版) に従う時の平均・分散ヘッジ法のヘッジポートフォリオを考える。株価 X_t と、株価のボラティリティ Y_t が、次の Heston モデルに従うとする。

$$dX_t = X_t (\mu(t, Y_t) dt + Y_t dW_t^1), \quad (2)$$

$$dY_t = a(t, X_t, Y_t) dt + b(t, Y_t) dW_t^2. \quad (3)$$

ただし、株価のトレンド $\mu(t, y)$ は $\mu(t, y) = \gamma y^2$, $\kappa, \theta, \Sigma, \gamma$ は正の定数、 W_t^1, W_t^2 は独立なブラウン運動とし、 $a(t, x, y)$ と $b(t, y)$ を次とする。

$$a(t, x, y) = \frac{4\kappa(\theta - y^2) - \Sigma^2}{8y}, \quad b(t, y) = \frac{\Sigma}{2}.$$

ここで P と同値な variance-optimal ELMM \tilde{P} の下で X_t, Y_t は、

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t Y_t d\tilde{W}_t^1, \\ dY_t &= \left(a(t, X_t, Y_t) - b^2(t, Y_t) \frac{\partial J}{\partial y}(t, Y_t) \right) dt \\ &\quad + b(t, Y_t) d\tilde{W}_t^2. \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\tilde{W}_t^1, \tilde{W}_t^2$ を \tilde{P} の下で独立なブラウン運動とし、 $J(t, y)$ は

$$J(t, y) = g_0(T - t) + g_1(T - t)y^2$$

に従う。ここで、

$$\begin{aligned} g_0(T - t) &= -\frac{2\kappa\theta}{\Sigma^2} \ln \frac{2\Gamma^2 e^{\frac{\Gamma+\kappa}{2}(T-t)}}{(\Gamma + \kappa)(e^{\Gamma(T-t)} - 1) + 2\Gamma}, \\ g_1(T - t) &= \frac{2\gamma^2(e^{\Gamma(T-t)} - 1)}{(\Gamma + \kappa)(e^{\Gamma(T-t)} - 1) + 2\Gamma}, \\ \Gamma &= \sqrt{2\gamma^2\Sigma^2 + \kappa^2} \end{aligned}$$

とする。

$V_t = E_{\tilde{P}}[H|\mathcal{F}_t]$ となるようにヘッジを考える。オプションの価格を $v(t, X_t, Y_t)$ とすると、マルコフ性から次が言える。

$$E_{\tilde{P}}[H|\mathcal{F}_t] = v_{\tilde{P}}(t, X_t, Y_t).$$

ただし、 $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, Y_u; 0 \leq u \leq t)$ とする。 $v_{\tilde{P}}$ に Itô の公式を用いると、 \tilde{P} の下、次になる。

$$\begin{aligned} dv_{\tilde{P}} &= \left(\frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial t} + \left(a - b^2 \frac{\partial J}{\partial y} \right) \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial y} + \frac{1}{2} x^2 y^2 \frac{\partial^2 v_{\tilde{P}}}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 v_{\tilde{P}}}{\partial y^2} \right) dt + \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial x} dX_t + b \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial y} d\tilde{W}_t^2. \end{aligned}$$

この 1 項目は $v_{\tilde{P}}$ がマルチンゲールのため、0 でなくてはならない。2 項目は式 (1) の 2 項目に、3 項目は式 (1) の 3 項目に対応させると次が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial t} + \left(a - b^2 \frac{\partial J}{\partial y} \right) \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial y} \\ + \frac{1}{2} x^2 y^2 \frac{\partial^2 v_{\tilde{P}}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 v_{\tilde{P}}}{\partial y^2} = 0, \quad (4) \\ \tilde{\delta}_t = \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial x}, \quad \tilde{L}_t = b \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial y}. \end{aligned}$$

これを用い、次の定理 1 よりヘッジポートフォリオを得る。

定理 1 (参考文献 [1] の Theorem 2.1)

H が 2 乗可積分な確率変数で、 \tilde{P} の下で $H = \tilde{H}_0 + \int_0^T \tilde{\delta}_s dX_s + \tilde{L}_T$ と Galtchok-Kunita-Watanabe 分解されるならば、平均・分散ヘッジ法のヘッジポートフォリオは現実確率測度 P の下で次で与えられる。

$$\begin{aligned} V_0 &= E_{\tilde{P}}[H], \\ \alpha_t &= \tilde{\delta}_t + \frac{\mu(t, Y_t)}{X_t Y_t^2} \left(\int_0^t \tilde{\delta}_s dX_s + \tilde{L}_0 - \int_0^t \alpha_s dX_s \right), \\ \beta_t &= V_0 + \int_0^t \alpha_s dX_s - \alpha_t X_t. \end{aligned}$$

この定理より、平均・分散ヘッジ法のヘッジポートフォリオ α_t は現実確率測度 P の下で次となる。

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \tilde{\delta}_t + \frac{\gamma(Y_t)^2}{X_t Y_t^2} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \tilde{\delta}_s dX_s + \int_0^t \frac{\Sigma}{2} \frac{\partial v_{\tilde{P}}}{\partial y} d\tilde{W}_s^2 - \int_0^t \alpha_s dX_s \right). \end{aligned}$$

さらにこれは次と書き換えられる。

$$\alpha_t = \tilde{\delta}_t + \frac{\gamma(Y_t)^2}{X_t Y_t^2} \left(v_{\tilde{P}}(t, X_t, Y_t) + V_0 - \int_0^t \alpha_s dX_s \right). \quad (5)$$

4. 数値実験法とヘッジポートフォリオの計算法

ここで、数値実験の手順と、ヘッジポートフォリオの計算法を説明していく。数値実験は、Heston モデルによる株価過程を発生させ、その株価過程に対してヘッジポートフォリオ α, δ を計算し、それぞれヘッジ誤差を求めることで行う。

まず、Heston モデルによる株価過程を発生させる手順を説明する。式 (2) と式 (3) に対して、オイラー・丸山近似を用いて近似し、各時刻の株価とボラティリティの値を得る。式 (2) に対して T を満期とし、時間の刻み数 u とし、微小変化 Δt を $\Delta t = \frac{T}{u}$ とすると、

$$X_{t+\Delta t} = X_t + X_t (\gamma Y_t^2 \Delta t + Y_t (W_{t+\Delta t}^1 - W_t^1)) \quad (6)$$

となる。ただし、ブラウン運動の定義より $W_{t+\Delta t}^1 - W_t^1$ は平均 0、分散 Δt の正規分布に従う確率変数とする。同様にボラティリティ Y_t についても式 (3) に対して、

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + a(t, X_t, Y_t) \Delta t + b(t, Y_t) (W_{t+\Delta t}^2 - W_t^2) \quad (7)$$

となる。ただし、ブラウン運動の定義より $W_{t+\Delta t}^2 - W_t^2$ は平均 0、分散 Δt の正規分布に従う確率変数とする。この式 (6) と式 (7) により、株価とボラティリティの値を得る。

つぎに、ヘッジポートフォリオを得る手順を説明する。まず $v_{\bar{P}}$ を求める。ここでは、有限差分法を用い偏微分方程式 (4) の数値微分を求める。 t の偏微分は後差分、 x, y は中心差分を用いて求める。時間の刻み数 l 、株価の刻み数 m 、ボラティリティの刻み数 n 、時間の最大（満期） T 、株価の最大 X_{max} 、ボラティリティの最大 Y_{max} とし、微小変化 dt, dx, dy はそれぞれ、 $dt = \frac{T}{l}, dx = \frac{X_{max}}{m}, dy = \frac{Y_{max}}{n}$ で求める。 i, j, k を整数とし $t_i = idt, x_j = jdx, y_k = kdy$ とおき、 $0 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq n$ の範囲のすべての $v_{\bar{P}}(t_i, x_j, y_k)$ を求める。

近似して得た X_{t_i} と Y_{t_i} についてのオプション価格 $v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i})$ を求める。いま、偏微分方程式を解いて得られた $v_{\bar{P}}(t, x, y)$ を用いて、 $v_{\bar{P}}(t, X_t, Y_t)$ を求める。まず、 $x_j \leq X_{t_i} < x_j + dx$ を満たす x_j 、 $y_k \leq Y_{t_i} < y_k + dy$ を満たす y_k を求める。つぎに、

$$p = \frac{X_{t_i} - x_j}{dx}, \quad q = \frac{Y_{t_i} - y_k}{dy}$$

とおくことで、 $v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i})$ は次で与えることとする。

$$\begin{aligned} v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i}) = & (1 - q)((1 - p)v_{\bar{P}}(t_i, x_j, y_k) \\ & + pv_{\bar{P}}(t_i, x_j + dx, y_k)) \\ & + q((1 - p)v_{\bar{P}}(t_i, x_j, y_k + dy) \\ & + pv_{\bar{P}}(t_i, x_j + dx, y_k + dy)). \end{aligned}$$

ヘッジポートフォリオ α_t の式 (5) の第 1 項は、株価の微小変化に対するオプションの価格の変化率であるから、デルタである。このデルタ $\tilde{\delta}_t$ は次で表される。

$$\tilde{\delta}_t = \frac{\partial v_{\bar{P}}}{\partial x}.$$

$\tilde{\delta}_t$ は、 $v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i})$ を中心差分することで求める。 $\tilde{\delta}_t(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i})$ は次で与えることとする。

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_t(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i}) \\ = \frac{v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i} + dx, Y_{t_i}) - v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i} - dx, Y_{t_i})}{2dx}. \end{aligned} \quad (8)$$

また、式 (5) の積分項を I_{t_i} とすると、

$$I_{t_i} = I_{t_i-dt} + \alpha_{t_i-dt}(X_{t_i} - X_{t_i-dt})$$

と表せる。以上より $\alpha(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i})$ は次で与えることとする。

$$\begin{aligned} \alpha(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i}) = & \tilde{\delta}(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i}) + \frac{\gamma Y_{t_i}^2}{X_{t_i} Y_{t_i}^2} \\ & \times (v_{\bar{P}}(t_i, X_{t_i}, Y_{t_i}) + v_{\bar{P}}(0, X_0, Y_0) - I_{t_i}). \end{aligned} \quad (9)$$

式 (6) と式 (7) を用い、Heston モデルに従う各時刻の株価とボラティリティを $u = 1000$ とし、1 万シナリオ発生させる。そして、式 (8) と式 (9) を用い、ヘッジポートフォリオを求め、ヘッジ誤差について考察を行う。発生させた株価過程が、設定の株価、ボラティリティの最大値 (X_{max} と Y_{max}) を超えた場合は、そのシナリオは省くこととする。

平均・分散ヘッジ法のヘッジ誤差を R 、デルタヘッジのヘッジ誤差を R_{δ} とし、それぞれ次で与えるとする。

$$\begin{aligned} R &= H - \left(V_0 + \int_0^T \alpha_s dX_s \right), \\ R_{\delta} &= H - \left(V_0 + \int_0^T \tilde{\delta}_s dX_s \right). \end{aligned}$$

このヘッジ誤差について、次を見て考察を行っていく。

- ・各ヘッジの平均二乗誤差: $E[R^2], E[R_{\delta}^2]$.
- ・平均二乗誤差の差: $E[R^2] - E[R_{\delta}^2]$. (差で表す.)
- ・各ヘッジ誤差の期待値: $E[R], E[R_{\delta}]$.
- ・各絶対誤差の期待値: $E[|R|], E[|R_{\delta}|]$.
- ・各ヘッジのヘッジ成功数: $R \leq 0$ ($R_{\delta} \leq 0$) となったシナリオの回数. (成功数 m_v , 成功数 δ で表す.)
- ・各ヘッジのヘッジの勝ち数: $R^2 \leq R_{\delta}^2$ ($R_{\delta}^2 \leq R^2$) となったシナリオの回数. (勝ち数 m_v , 勝ち数 δ で表す.)
- ・シナリオが省かれた回数. (cut で表す.)
- ・各ヘッジ誤差のヒストグラム.
- ・各ヘッジ誤差の散布図.

また、数値実験で使う各パラメータの基準値を次の表 1 で与える。ここで、ボラティリティの初期値 Y_0 と、ボラティリティの回帰レベル θ について、 $\theta = Y_0^2$ とする。

表 1 各パラメータの基準値

パラメータ	記号	値
満期	T	1.0
時間の刻み数	l	10000
株価の刻み数	m	100
ボラティリティの刻み数	n	100
株価の最大値	X_{max}	500
ボラティリティの最大値	Y_{max}	1
時間の刻み幅	dt	0.0001
株価の刻み幅	dx	5
ボラティリティの刻み幅	dy	0.01
株価の初期値	X_0	100
株価のトレンド	γ	2.5
ボラティリティの初期値	Y_0	0.2
ボラティリティの回帰レベル	θ	0.04
ボラティリティの回帰度	κ	5
ボラティリティのボラティリティ	Σ	0.6

5. 数値実験と考察 1 (パラメータが既知の場合)

ここでは、満期 T と、株価モデルの 5 つのパラメータ ($X_0, Y_0, \kappa, \Sigma, \gamma$) を既知とし、そのパラメータを基準値から変化させた場合のヘッジ誤差について考察する。

(1) 満期 T を変化させた時

満期 T を 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 と変化させた場合を考察する。 $v_{\bar{P}}$ の偏微分方程式を解く時、満期を変化させると dt, dx, dy も変化するため、 l, m, n も合わせて変える必要がある。その満期を変化させた場合の各パラメータの値を表 2 で示す。

この時、表 3 および図 1, 図 2, 図 3 から次の結果が得られた。

- ・平均二乗誤差、絶対誤差の期待値は、常に平均・分散ヘッジ法の方が小さく、満期が長くなると、どちらの方法もヘッジ誤差が大きくなった。
- ・成功数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多く、満期が長くなると、どちらの方法も減った。

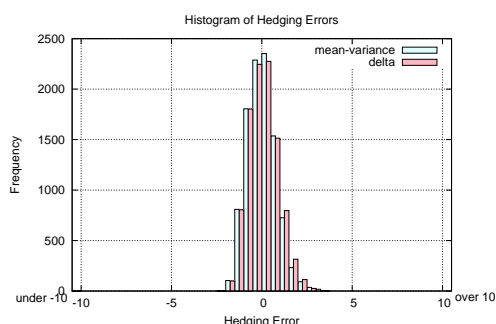
表 2 満期を変化させた場合の各パラメータの値

T	0.1	0.2	0.5	1.0
l	4000	8000	5000	10000
m	200	200	100	100
n	100	100	100	100
dt	0.000025	0.000025	0.0001	0.0001
dx	2.5	2.5	5	5
dy	0.01	0.01	0.01	0.01

表 3 各満期による結果

T	0.1	0.2	0.5	1
$E[R^2]$	0.660	259.623	12947.600	5219.570
$E[R_\delta^2]$	0.680	307.207	13354.300	11320.500
差	-0.020	-47.584	-406.712	-6100.960
$E[R]$	0.028	-0.090	-1.098	-0.893
$E[R_\delta]$	0.050	-0.086	-0.678	-0.861
$E[R]$	0.637	1.249	3.911	5.464
$E[R_\delta]$	0.652	1.309	3.947	6.930
成功数 $_{mv}$	5008	5145	4650	4204
成功数 $_\delta$	4956	5009	4373	3626
勝ち数 $_{mv}$	5182	5187	5429	5642
勝ち数 $_\delta$	4818	4811	4565	4335
cut	0	2	6	23

- ・ 勝ち数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多かった。
- ・ 図 1, 図 2 より, 満期が長くなるとどちらの方法もバラつきは大きくなるが, 平均・分散ヘッジ法の方が小さい。
- ・ 図 3 より, 二つの方法のヘッジ誤差には正の相関があった。

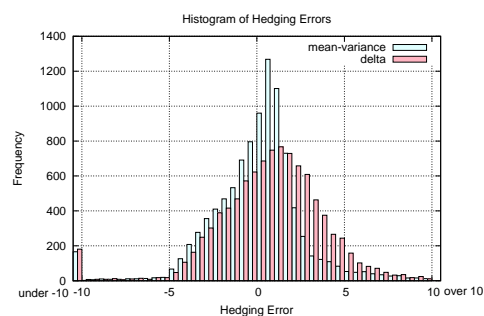
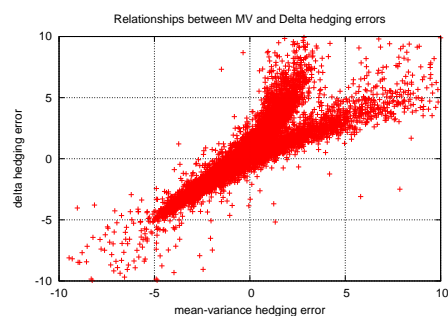
図 1 $T = 0.1$ のヘッジ誤差のヒストグラム

これらより, 満期が長い時にヘッジ誤差は大きくなると考えられる。これは, 満期が長い方が市場の不確かさが増し, ヘッジがしにくいためと考えられる。満期が変化しても, 常に平均・分散ヘッジ法の方がヘッジ誤差は小さくなり, 図 1, 図 2 を見てもデルタヘッジよりヘッジ誤差の小さいデータ区間により多くのシナリオが集中した。そのため, 満期が変化しても, 平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。

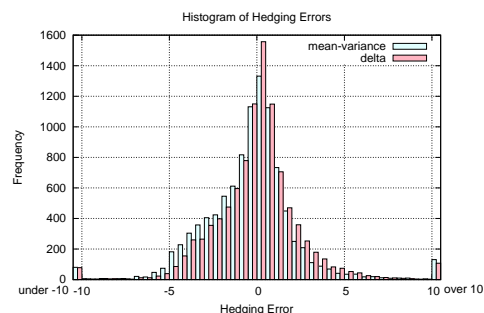
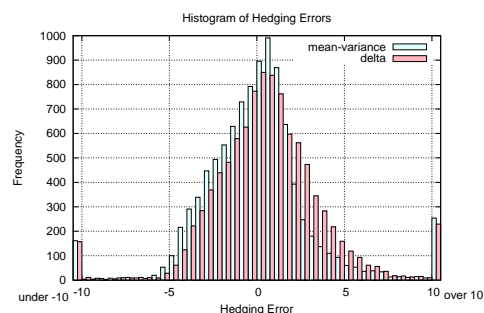
(2) 株価の初期値 X_0 を変化させた時

株価の初期値 X_0 を 80, 90, 100, 110, 120 と変化させ, ヘッジ誤差を考察する。表 4 および 図 4, 図 5 から次の結果が得られた。

- ・ 平均二乗誤差, 絶対誤差の期待値は, 常に平均・分散ヘッジ法の方が小さくなった。
- ・ 成功数は, 常に平均・分散ヘッジ法の方が多く, X_0 が大きくなると, どちらの方法も少なくなった。
- ・ 勝ち数は, $X_0 = 80, 90$ 以外は平均・分散ヘッジ法の方が多かった。

図 2 $T = 1.0$ のヘッジ誤差のヒストグラム図 3 $T = 0.1$ のヘッジ誤差の散布図表 4 X_0 を変化させた結果

X_0	80	90	100	110	120
$E[R^2]$	10323.474	38419.158	3359.111	3299.507	344.572
$E[R_\delta^2]$	16616.568	68033.607	11419.766	3688.751	459.369
差	-6293.094	-29614.449	-8060.655	-389.243	-114.797
$E[R]$	1.828	2.968	0.106	0.224	0.022
$E[R_\delta]$	2.342	4.439	1.539	0.445	0.309
$E[R]$	4.269	8.155	5.423	3.393	1.925
$E[R_\delta]$	4.601	9.618	7.194	4.263	2.639
成功数 $_{mv}$	5279	4883	4182	3778	3331
成功数 $_\delta$	4715	4218	3571	3474	3191
勝ち数 $_{mv}$	2674	3889	5667	7311	8268
勝ち数 $_\delta$	7301	6083	4300	2654	1698
cut	25	28	33	35	34

図 4 $X_0 = 80$ のヘッジ誤差のヒストグラム図 5 $X_0 = 90$ のヘッジ誤差のヒストグラム

- ・ 図 4, 図 5 より, 二つの方法の誤差の分布に大きな差はみられなかった。

これらより, $X_0 = 80, 90$ のイン・ザ・マネーの時, 勝ち数はデルタヘッジが多くなったが, 図 4, 図 5 などをもて二つの方法に大きな差はなく, 僅差でデルタヘッジの勝ち数が多かったと考えられる。株価の初期値が行使価格より小さいとヘッジ誤差は大きくなるが, 株価の初期値が変化しても全体的には平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考ええる。

(3) 株価のトレンド γ を変化させた時

株価のトレンド γ を $-5, -2.5, 0, 2.5, 5$ と変化させ, ヘッジ誤差を考察する。

表 5 γ を変化させた結果

γ	-5	-2.5	0	2.5	5
$E[R^2]$	2072.300	17790.540	11911.203	90102.754	17951.813
$E[R_\delta^2]$	126508.123	407966.734	11911.203	272647.323	60508.932
差	-124435.823	-390176.194	-	-182544.569	-42557.118
$E[R]$	-0.787	-1.578	1.033	4.453	-2.559
$E[R_\delta]$	-3.974	-13.226	1.033	7.690	-3.685
$E[R]$	3.534	6.369	7.736	8.684	6.962
$E[R_\delta]$	12.195	19.693	7.736	13.296	12.012
成功数 $_{mv}$	3236	3740	4146	4217	3918
成功数 $_\delta$	2235	3375	4146	3594	2461
勝ち数 $_{mv}$	7571	6512	-	5524	6930
勝ち数 $_\delta$	2403	3460	-	4445	3025
cut	26	28	21	31	45

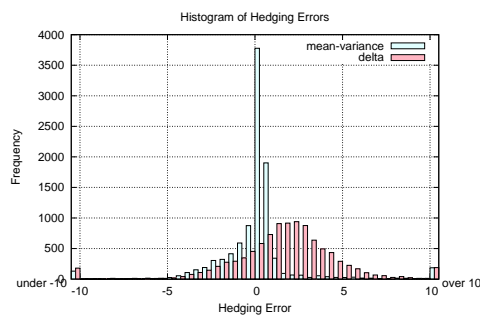


図 6 $\gamma = -5$ のヘッジ誤差のヒストグラム

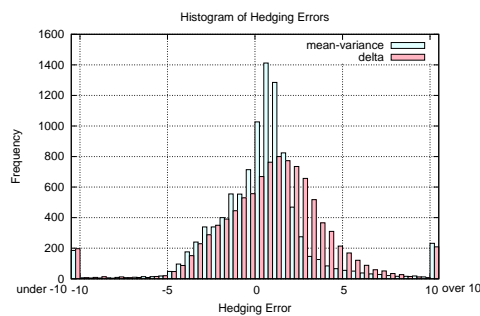


図 7 $\gamma = -2.5$ のヘッジ誤差のヒストグラム

表 5 および 図 6, 図 7, 図 8 から次の結果が得られた。

- ・ 式 (5) より, $\gamma = 0$ の時二つのヘッジポートフォリオは同じになる。
- ・ 平均二乗誤差, 絶対誤差の期待値は, 常に平均・分散ヘッジ法が小さくなった。
- ・ 成功数, 勝ち数は常に平均・分散ヘッジが多くなった。
- ・ 平均二乗誤差, 絶対誤差の期待値, 成功数, 勝ち数は $\gamma = 0$ を中心に対称性がみられた。
- ・ 図 6, 図 7, 図 8 から, γ の γ が大きいほど分散は小さくなり, $\gamma = 0$ を中心に対称性がみられた。

これらより, 平均・分散ヘッジ法が有効と考えられる。 $\gamma = 0$ を中心に, 対称となるのは, γ は株価のトレンドで市場の方

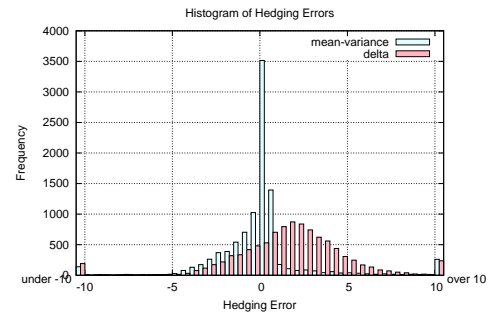


図 8 $\gamma = 5$ のヘッジ誤差のヒストグラム

向性を示すものであるからと考えられる。また, γ が大きいとより市場の方向性がはっきりするためヘッジ誤差が小さくなったと考えられる。

(4) ボラティリティの回帰レベル θ を変化させた時

θ を $0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25$ と変化させ, ヘッジ誤差を考察する。

表 6 θ を変化させた結果

θ	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25
$E[R^2]$	10784.028	12247.438	10.806	16.940	25.987
$E[R_\delta^2]$	24462.612	8753.000	12.300	18.710	27.792
差	-13678.584	3494.438	-1.494	-1.770	-1.804
$E[R]$	-1.441	-1.143	-0.597	-1.300	-2.112
$E[R_\delta]$	0.590	0.628	0.756	1.208	1.871
$E[R]$	16.939	6.368	2.289	2.748	3.293
$E[R_\delta]$	22.757	6.907	2.930	3.687	4.563
成功数 $_{mv}$	961	4170	4954	5369	5748
成功数 $_\delta$	893	3622	3749	3385	2863
勝ち数 $_{mv}$	5984	5588	5444	5519	5431
勝ち数 $_\delta$	3235	4386	4551	4374	3931
cut	781	26	5	107	638

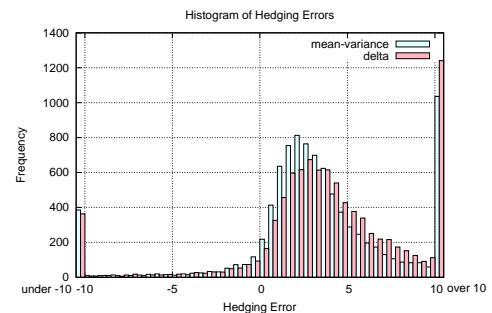


図 9 $\theta = 0.01$ のヘッジ誤差のヒストグラム

表 6 および 図 9, 図 10 から次の結果が得られた。

- ・ 平均二乗誤差は $\theta = 0.04$ の時以外は平均・分散ヘッジ法が小さくなった。
- ・ 絶対誤差の期待値は, 常に平均・分散ヘッジ法の方が小さくなった。
- ・ 成功数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多く, θ が大きくなると, さらに多くなった。
- ・ 勝ち数は平均・分散ヘッジ法が常に多くなった。
- ・ 図 9, 図 10 より, 平均・分散ヘッジ法の方がバラつきが少なくなった。

これらより, $\theta = 0.01, 0.04$ の時ヘッジ誤差が大きくなった原因は, ボラティリティの最小値を 0 と設定し v_p の偏微分方程式を有限差分法を用いて求めている時に生じている誤差が原因と考えられる。 $\theta = 0.09$ 以上では二つの方法でヘッジ誤差の差は少ないが, 成功数, 勝ち数では平均・分散ヘッ

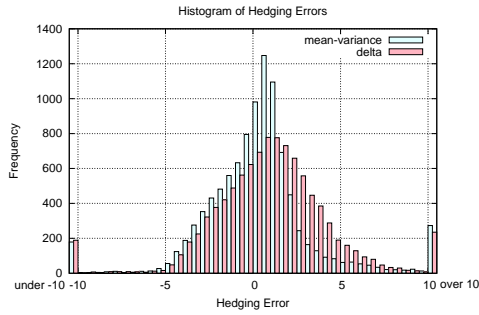


図 10 $\theta = 0.04$ のヘッジ誤差のヒストグラム
ジ法の方が多く、平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。

(5) ボラティリティの回帰度 κ を変化させた時

ボラティリティの回帰度 κ を 1, 2, 3, 4, 5 と変化させ、ヘッジ誤差を考察する。

表 7 κ を変化させた結果

κ	1	2	3	4	5
$E[R^2]$	12348.724	7814.781	32031.486	34571.694	149456.537
$E[R_\delta^2]$	28352.129	14097.320	69677.270	132623.632	294550.859
差	-16003.404	-6282.540	-37645.784	-98051.938	-145094.323
$E[R]$	-3.286	-1.281	-2.711	-2.383	-4.583
$E[R_\delta]$	-2.059	-0.663	-4.198	-3.417	-6.189
$E[R]$	18.553	10.248	13.230	14.790	10.403
$E[R_\delta]$	21.816	11.406	15.098	17.849	11.674
成功数 $_{mv}$	2444	3223	3141	3551	4158
成功数 $_\delta$	2064	2918	2784	3034	3603
勝ち数 $_{mv}$	6352	6316	6323	5953	5657
勝ち数 $_\delta$	2992	3537	3564	3987	4314
cut	656	147	113	60	29

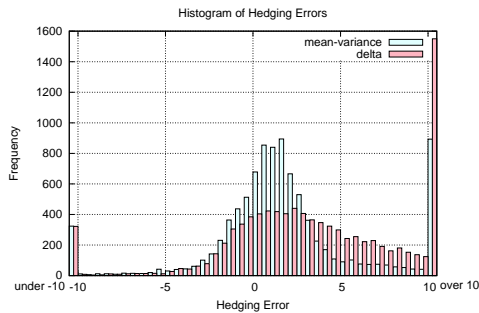


図 11 $\kappa = 1$ のヘッジ誤差のヒストグラム

表 7 および 図 11, 図 12 から次の結果が得られた。

- ・ 平均二乗誤差, 絶対誤差の期待値は, 常に平均・分散ヘッジ法が小さくなり, どちらの方法も $\kappa = 1$ を除き, κ が大きいほど大きくなった。
- ・ 成功数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多く, κ が大きいほど, どちらの方法も成功数が多くなった。
- ・ 勝ち数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多く, κ が大きいほど, デルタヘッジの勝ち数が多くなった。
- ・ 図 11, 図 12 より, κ が小さいほど, ヘッジ誤差の大きい頻度が多くなった。

これらより, 平均・分散ヘッジ法が有効と考えられる。 κ が大きくなるとボラティリティの回帰度が強くボラティリティの変動は安定しやすくなるため, ボラティリティの変化を加味しないデルタヘッジの成功数も多くなったと考えられる。

(6) ボラティリティのボラティリティ Σ を変化させた時

ボラティリティのボラティリティ Σ を 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7 と変化させ, ヘッジ誤差を考察する。

表 8 および 図 14, 図 13 から次の結果が得られた。

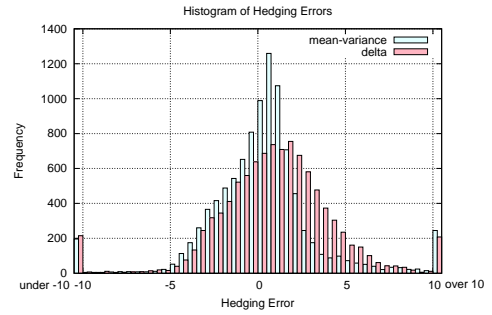


図 12 $\kappa = 5$ のヘッジ誤差のヒストグラム

表 8 Σ を変化させた結果

Σ	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$E[R^2]$	132.874	519.617	30434.424	51540.451	28865.052
$E[R_\delta^2]$	184.818	1202.945	64504.547	124323.416	71520.288
差	-51.944	-683.328	-34070.123	-72782.965	-42655.236
$E[R]$	-0.308	0.013	-2.692	-0.765	-2.049
$E[R_\delta]$	0.226	0.506	-4.234	-1.486	-2.856
$E[R]$	2.087	2.732	7.783	12.670	14.563
$E[R_\delta]$	2.401	3.340	10.164	16.761	19.579
成功数 $_{mv}$	4912	4749	4154	3407	2723
成功数 $_\delta$	4320	4182	3596	2935	2416
勝ち数 $_{mv}$	5226	5282	5665	6010	6305
勝ち数 $_\delta$	4772	4703	4311	3917	3583
cut	2	15	24	73	112

- ・ 平均二乗誤差, ヘッジ誤差の期待値は常に平均・分散ヘッジ法が小さく, $\Sigma = 0.7$ を除き, Σ が大きくなるほど大きくなった。
- ・ 成功数は常に平均・分散ヘッジが多く, Σ が大きくなると, どちらの方法も成功数は減った。
- ・ 勝ち数は常に平均・分散ヘッジが多く, Σ が大きくなると, 平均・分散ヘッジ法の方が多くなった。
- ・ 図 13, 図 14 より, Σ が大きくなると, 平均・分散ヘッジ法の方が分散が小さくなった。

これらより, $\Sigma = 0.7$ の時にヘッジ誤差が小さくなったのは, ボラティリティの最大値を 1 と設定している影響があると考えられる。 Σ が大きい時, ボラティリティの変動が激しくなり, 株価の変動も激しくなるため, ヘッジ誤差が大きくなると考えられる。平均・分散ヘッジ法の方がヘッジ誤差が小さくなったのは, ボラティリティの変動を加味するポートフォリオであるからだと考えられる。よって, Σ が大きいほど二つの平均二乗誤差の差は大きくなり, 平均・分散ヘッジ法の方が有効となったと考えられる。

6. 数値実験と考察 2 (パラメータが推定誤差を含む場合)

ここでは, オプション価格 v_P を求める偏微分方程式を解く際に株価モデルの 4 つのパラメータ ($\theta, \kappa, \Sigma, \gamma$) が推定誤差を含む場合, そのパラメータの推定誤差を変化させた場合のヘッジ誤差について考察する。各パラメータを基準値から -10% , -5% , 5% , 10% の 4 パターンの推定誤差を含ませ, ヘッジ誤差について考察を行う。

(1) 株価のトレンド γ が誤差を含む時

偏微分方程式で使用するパラメータの γ に推定誤差を -10% , -5% , 5% , 10% の 4 パターン含ませた場合のヘッジ誤差について比較することで推定誤差について考察する。

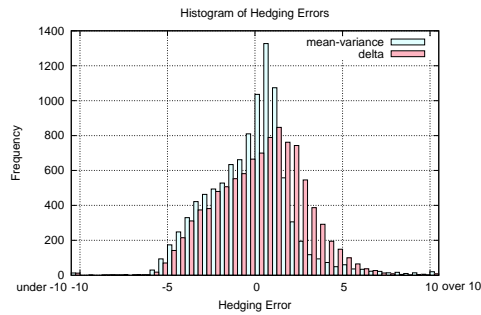


図 13 $\Sigma = 0.5$ のヘッジ誤差のヒストグラム

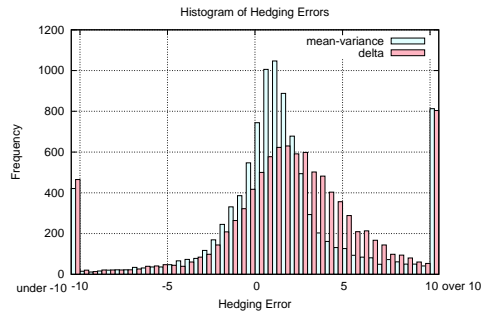


図 14 $\Sigma = 0.7$ のヘッジ誤差のヒストグラム

表 9 と 図 15 から次の結果が得られた。

- ・ 平均二乗誤差は，5% の時以外は平均・分散ヘッジ法が小さくなり，平均・分散ヘッジ法は 0% で，デルタヘッジは 5% で最小になった。
- ・ 絶対誤差の期待値は，常に平均・分散ヘッジ法の方が小さくなった。
- ・ 成功数は，常に平均・分散ヘッジ法の方が多くなった。
- ・ 勝ち数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多くなった。
- ・ 平均・分散ヘッジ法の方がヘッジ誤差が小さい区間に頻度が多く見られた。
- ・ 図 15 より，平均・分散ヘッジ法の方が，ヘッジ誤差が小さいデータ区間に頻度が多かった。

誤差を変化させても，ヘッジ誤差は変化するが，成功数と勝ち数には大きな変化は見られなかった。ゆえに，ヘッジができるかどうかは， γ に誤差が含まれていてもあまり変わらないと考えられる。以上より， γ に誤差を含ませても，平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。

(2) ボラティリティの回帰レベル θ が誤差を含む時

偏微分方程式で使用するパラメータの θ に対し， θ^2 に推定誤差を -10% ， -5% ， 5% ， 10% の 4 パターン含ませた場合のヘッジ誤差について比較することで推定誤差について考察する。

表 10 と 図 16 から次の結果が得られた。

表 9 γ に誤差を含ませた結果

%	-10	-5	0	5	10
$E[R^2]$	145113.696	62960.974	5231.611	9435.353	9398.383
$E[R_\delta^2]$	194578.593	126184.541	11346.629	9411.170	26349.590
差	-49464.897	-63223.567	-6115.019	24.183	-16951.207
$E[R]$	-4.449	-2.597	-0.893	0.226	-0.518
$E[R_\delta]$	-4.779	-3.320	-0.861	1.402	-0.579
$E[R]$	11.166	8.226	5.464	6.481	6.467
$E[R_\delta]$	13.568	10.616	6.930	7.463	8.392
成功数 _{mv}	4224	4257	4204	4104	4023
成功数 _δ	3628	3671	3626	3530	3518
勝ち数 _{mv}	5567	5650	5642	5560	5655
勝ち数 _δ	4404	4321	4335	4416	4307
cut	29	29	23	24	38

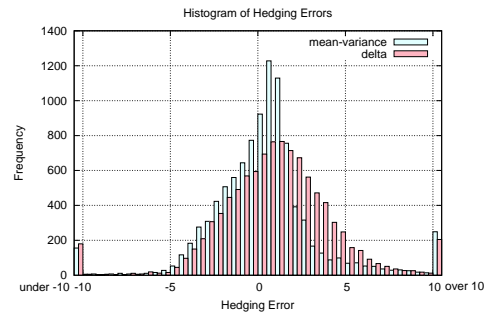


図 15 γ に 5% 誤差を含ませた場合のヒストグラム

表 10 θ^2 に誤差を含ませた結果

%	-10	-5	0	5	10
$E[R^2]$	39127.597	5553.442	5231.611	60651.573	7209.511
$E[R_\delta^2]$	75973.160	5180.040	11346.629	89105.869	11452.522
差	-36845.563	373.402	-6115.019	-28454.295	-4243.012
$E[R]$	-0.914	0.345	-0.893	-3.837	-1.203
$E[R_\delta]$	-1.335	1.139	-0.861	-2.842	-1.118
$E[R]$	6.280	5.384	5.464	9.088	6.201
$E[R_\delta]$	7.952	6.330	6.930	10.073	6.912
成功数 _{mv}	2360	3349	4204	4996	5616
成功数 _δ	1980	2847	3626	4391	5023
勝ち数 _{mv}	6521	6028	5642	5263	5036
勝ち数 _δ	3450	3936	4335	4715	4943
cut	29	3	23	22	21

- ・ 平均二乗誤差は， -5% の時以外は平均・分散ヘッジ法が小さくなった。
- ・ 平均二乗誤差は，平均・分散ヘッジ法は 0% で，デルタヘッジは -5% で最も小さくなった。
- ・ 絶対誤差の期待値は，常に平均・分散ヘッジ法の方が小さくなった。
- ・ 成功数は，常に平均・分散ヘッジ法の方が多くなった。
- ・ 勝ち数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多くなった。
- ・ 図 16 より，平均・分散ヘッジ法の方が，ヘッジ誤差が小さいデータ区間に頻度が多かった。

-5% の時，デルタヘッジの方が平均二乗誤差は小さくなったが，成功数，勝ち数，ヘッジ誤差の分布と併せて考え，平均・分散ヘッジ法が有効と考えられる。そのため，全体的にみると θ に誤差を含ませても，平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。

(3) ボラティリティの回帰度 κ が誤差を含む時

偏微分方程式で使用するパラメータの κ に推定誤差を -10% ， -5% ， 5% ， 10% の 4 パターン含ませた場合のヘッジ誤差について比較することで推定誤差について考察する。

表 11 と 図 17 から次の結果が得られた。

- ・ 平均二乗誤差は -10% の時はデルタヘッジが，それ以外は平均・分散ヘッジ法が小さくなった。また，平均・分散

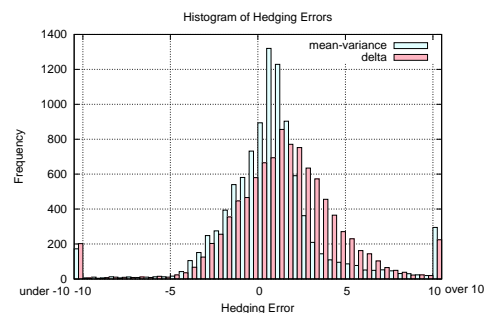


図 16 θ^2 に -5% 誤差を含ませた場合のヒストグラム

表 11 κ に誤差を含ませた結果

%	-10	-5	0	5	10
$E[R^2]$	28754.247	23985.659	5231.611	10235.878	743711.399
$E[R_\delta^2]$	19825.834	51453.410	11346.629	72543.550	2086169.104
差	8928.413	-27467.752	-6115.019	-62307.672	-1342457.704
$E[R]$	0.411	-2.334	-0.893	-1.253	-9.205
$E[R_\delta]$	1.002	-3.669	-0.861	1.382	-13.919
$E[R]$	7.354	7.272	5.464	6.686	15.654
$E[R_\delta]$	7.900	9.530	6.930	9.357	23.200
成功数 _{mv}	3769	3916	4204	4448	4568
成功数 _s	3194	3369	3626	3886	4003
勝ち数 _{mv}	5874	5765	5642	5486	5387
勝ち数 _s	4090	4208	4335	4485	4581
cut	36	27	23	29	32

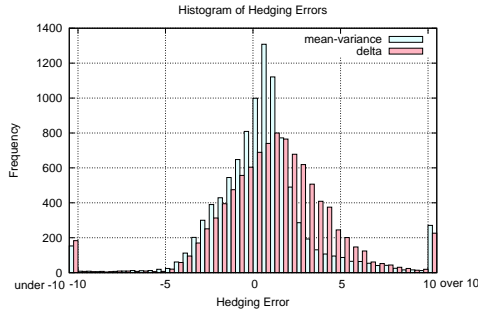


図 17 κ に -10% 誤差を含ませた場合のヒストグラム
ヘッジ法は 0% で、デルタヘッジは -5% で最小になった。
・絶対誤差の期待値は、常に平均・分散ヘッジ法の方が小さくなった。
・成功数は、常に平均・分散ヘッジ法の方が多く、どちらの方法も誤差が -10% で最も少なく、誤差が正になるほど成功数は多くなった。
・勝ち数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多く、誤差が変わっても大きな変化は見られなかった。
・図 17 より、平均・分散ヘッジ法の方が、ヘッジ誤差が小さいデータ区間に頻度が多かった。

-10% の時はデルタヘッジの方が平均二乗誤差は小さくなったが、成功数、勝ち数、ヘッジ誤差の分布と併せて考え、誤差が -10% の時も平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。そのため、 κ に誤差を含ませても、平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。

(4) ボラティリティのボラティリティ Σ が誤差を含む時
偏微分方程式で使用するパラメータの Σ に推定誤差を -10% 、 -5% 、 5% 、 10% の 4 パターン含ませた場合のヘッジ誤差について比較することで推定誤差について考察する。

表 12 Σ に誤差を含ませた結果

%	-10	-5	0	5	10
$E[R^2]$	9427.082	16472.105	5231.611	14820.737	912.321
$E[R_\delta^2]$	16551.155	38159.085	11346.629	26969.710	4593.892
差	-7124.073	-21686.979	-6115.019	-12148.973	-3681.570
$E[R]$	-0.327	1.912	-0.893	-0.701	0.512
$E[R_\delta]$	-0.054	1.053	-0.861	-0.494	1.334
$E[R]$	6.177	7.086	5.464	6.144	4.571
$E[R_\delta]$	7.766	9.377	6.930	7.407	6.092
成功数 _{mv}	4896	4588	4204	3632	3078
成功数 _s	4320	4034	3626	3109	2616
勝ち数 _{mv}	5287	5490	5642	5881	6129
勝ち数 _s	4685	4470	4335	4089	3836
cut	28	40	23	30	35

表 12 から次の結果が得られた。

- ・平均二乗誤差、ヘッジ誤差の期待値は、常に平均・分散ヘッジ法が小さくなった。
- ・平均二乗誤差は、どちらの方法も 10% で最も小さくなった。

- ・成功数は、常に平均・分散ヘッジ法の方が多く、どちらの方法も誤差が -10% で最も多く、誤差が正になるほど成功数は少なくなった。
- ・勝ち数は常に平均・分散ヘッジ法の方が多く、 -10% から誤差が正になるほど、平均・分散ヘッジ法の勝ち数は増え、デルタヘッジの勝ち数が減った。

0% の時に最もヘッジ誤差の期待値が小さくならなかったのは、近似誤差の影響だと考えられる。 Σ にヘッジ誤差を含ませても、平均・分散ヘッジ法の方が有効であると考えられる。

7. まとめ

本研究では、非完備市場を表すモデルとして、確率的ボラティリティモデルである Heston モデルに対し、デルタヘッジとクオドラティックヘッジを行い、そのヘッジ誤差について 2 つの実験、考察を行った。株価モデルのパラメータが既知の状況で、パラメータを変化させた結果も、パラメータが推定誤差を含む状況で、推定誤差を変化させた結果も、平均・分散ヘッジ法がデルタヘッジより有効であると考えられた。

また株価モデルのパラメータが既知の状況でも、パラメータが推定誤差を含む状況でも、平均・分散ヘッジ法の方がヘッジ誤差がマイナスとなりやすい傾向があり、ヘッジが成功した回数も多くなった。

8. 今後の課題

v_P の偏微分方程式を有限差分法を用いて求める際、それぞれ設定した X_t, Y_t の最小値または最大値に近いとき、大きい近似誤差が生じた。今回行った実験結果は、この有限差分法による誤差を含むものである。また、今回用いた基準値のうち θ を 0.09 として、5.(2) 節と同様の実験を行ったところ、 $X_0 = 80, 90$ の時、平均二乗誤差がデルタヘッジの方が小さくなった。しかし理論的には平均・分散ヘッジ法の方が平均二乗誤差が小さくなることが明らかであるため、この結果も有限差分法による誤差の影響が原因と考えられる。ゆえに、この有限差分法による近似誤差の影響を取り除いた場合に対して考察を行うことが今後の課題として挙げられる。

また、今回は簡単のために株価とボラティリティの相関のない変形版の Heston モデルを用いた。参考文献 [1], [2] では、株価とボラティリティに相関のある場合の平均・分散ヘッジ法についても具体的なヘッジポートフォリオが与えられている。株価とボラティリティに相関がある場合についても同様の数値実験を行い考察することも、今後の課題である。

参考文献

- 1) D. Heath, E. Platen, M. Schweizer, *A Comparison of Two Quadratic Approaches to Hedging in Incomplete Markets*, Mathematical Finance, Vol.11, No.4, pp.835-413, 2001.
- 2) D. Heath, E. Platen, M. Schweizer, *Numerical Comparison of Local Risk-Minimisation and Mean-Variance Hedging*, Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, pp.509-537, 2000.