最適化アルゴリズムSℓ1QP法の実装と翼形状最適化への応用

田村, 星也 / TAMURA, Seiya

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)
55

(開始ページ / Start Page)
1

(終了ページ / End Page)
4

(発行年 / Year)
2014-03-24

(URL)
https://doi.org/10.15002/00010484

最適化アルゴリズム Sℓ_1QP 法の実装と翼形状最適化への応用

Implementation of the optimization algorithm Sℓ_1QP method, and its application to the airfoil shape optimization

田村　星也
Seiya TAMURA
指導教員　堀端　康善

法政大学大学院工学研究科情報電子工学専攻修士課程

This paper describes methods for the Sequential Quadratic Programing(SQP) method and Sℓ_1QP. SQP method is known as most effective method solution for solving the constrained nonlinear optimization problem. On the other hand, Sℓ_1QP method was suggested by Fletcher. It is the method that adopted trust-region method in SQP method. It can be expected by Sℓ_1QP method that the performance of SQP improve more. This paper solves a problem and compare SQP method with Sℓ_1QP method and its application to the airfoil shape optimization.

key words: *nonlinear optimization problem, SQP, Sℓ_1QP,*

1　はじめに

SQP 法の中で信頼領域法を用いたものに Fletcher[1] による Sℓ_1QP 法が存在する．Sℓ_1QP 法は信頼領域法を取り入れていることから, 直線探索法を利用している SQP 法よりも安定して最適解に近づいていくことが期待される．本論文では、非線形最適化問題を解く Sℓ_1QP 法を試作し, 数値実験により比較, 検証を行う．また，翼形状最適化へ Sℓ_1QP 法を応用させる．

2　Sℓ_1QP 法について

Sℓ_1QP 法は, 非線形計画問題に対して有効な逐次 2 次計画法（SQP 法）に信頼領域法を取り入れたものである．

・Sℓ_1QP 法における 2 次計画部分問題

Sℓ_1QP 法では, 以下のような 2 次計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数}: & \; q_\mu(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{p}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}_k^T B_k \boldsymbol{p}_k \\
& + \mu \sum_{i=1}^{m_e} \mid c_i(\boldsymbol{x}) + \nabla c_i(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{p} \mid \\
& + \mu \sum_{i=1}^{m_i} \mid \min\{0, c_i(\boldsymbol{x}) + \nabla c_i(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{p}\} \mid \\
& \longrightarrow \text{最小化} \\
\text{制約条件}: & \; \|\boldsymbol{p}\|_\infty \leq \Delta_k
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで, m_e は等式制約数, m_i は不等式制約数であり, $m = m_e + m_i$ である．スラック変数 v, w, t を用いて以下のように再定式化できる．

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数}: & \; q_\mu(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{p}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}_k^T B_k \boldsymbol{p}_k \\
& + \mu \sum_{i=1}^{m_e}(v_i + w_i) + \mu \sum_{i=1}^{m_i} t_i \\
& \longrightarrow \text{最小化} \\
\text{制約条件}: & \; c_i(\boldsymbol{x}) + \nabla c_i(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{p} + v_i - w_i \\
& \; c_i(\boldsymbol{x}) + \nabla c_i(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{p} + t_i \\
& \; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{t} \geq 0 \\
& \; \|\boldsymbol{p}\|_\infty \leq \Delta_k
\end{aligned}
\tag{2}
$$

3 Sℓ_1QP 法のアルゴリズム

Sℓ_1QP 法のアルゴリズムは以下の通りである．

[I] 適当な初期点 $\boldsymbol{x}_0$，正定置対称行列 B_0，ペナルティーパラメータ μ_0，信頼領域半径 Δ_0 を選び，$k=0$ とおく．

[II] $\boldsymbol{x}_k$ が最適点なら終了．そうでないなら，ペナルティーパラメータ μ の更新アルゴリズムから，2 次計画部分問題を解きながら μ_k,$\boldsymbol{p}_k$ を求める．

[III] 信頼領域の更新アルゴリズムを用いて Δ_{k+1},$\boldsymbol{x}_{k+1}$ を求める．

[IV] 行列 B_k を更新．$k:k+1$ として [II] へ戻る．

4 数値実験

非線形最適化問題を Sℓ_1QP 法，単調直線探索法を使った SQP 法 [?]，非単調直接探索法使った SQP 法である NLPQLP 法 [?] を用いて解き最適解が求まるまでの反復回数を比較する．

1. 実験 1 以下のような非線形最適化問題を考える

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：} \quad & -x_1+10x_1^2+10x_2^2 \\
\text{制約条件：} \quad & x_1^2+x_2^2-1=0 \\
& x_1-0.5\geq 0 \\
& x_2+0.5\geq 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Sℓ_1QP 法の初期値 $\Delta_0=0.5$, $\mu_0=100$ とする．以下に計算結果を示す．

表 1: Sℓ_1QP 法、SQP 法、NLPQLP の大反復回数 (IT)、2 次計画問題 (QP)･線形計画問題 (LP) の計算回数 (***は最適点未到達、ーは実行不能)

初期点		Sℓ_1QP			SQP		NLPQLP	
x_1	x_2	IT	QP	LP	IT	QP	IT	QP
1.0	0.5	4	4	0	4	6	6	6
0.5	0.5	7	7	0	4	7	10	10
-1.5	-1.5	10	10	4	9	15	—	—
3.0	3.0	8	8	2	85	167	9	9
10	10	15	15	9	55	106	10	10

表 2: Sℓ_1QP 法、SQP 法、NLPQLP の目的関数の評価，目的関数の勾配計算 (***は最適点未到達、ーは実行不能)

初期点		Sℓ_1QP		SQP		NLPQLP	
x_1	x_2	目的	勾配	目的	勾配	目的	勾配
1.0	0.5	4	4	8	4	16	6
0.5	0.5	7	6	9	4	31	10
-1.5	-1.5	14	13	18	6	—	—
3.0	3.0	10	10	762	85	27	9
10	10	24	24	337	55	8	7

1. 実験 2 以下のような非線形最適化問題を考える

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：} \quad & -x_1x_2x_3 \\
\text{制約条件：} \quad & x_1+2x_2+2x_3\geq 0 \\
& 72-x_1-2x_2-2x_3\geq 0 \\
& 0\leq x_1\leq 42 \\
& 0\leq x_2\leq 42 \\
& 0\leq x_3\leq 42
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Sℓ_1QP 法の初期値 $\Delta_0=5.0$, $\mu_0=100$ とする．以下に計算結果を示す．

表 3: Sℓ_1QP 法、SQP 法、NLPQLP の大反復回数 (IT)、2 次計画問題 (QP)･線形計画問題 (LP) の計算回数 (***は最適点未到達、ーは実行不能)

初期点			Sℓ_1QP			SQP		NLPQLP	
x_1	x_2	x_3	IT	QP	LP	IT	QP	IT	QP
20	10	10	4	4	0	4	4	7	7
20	20	20	5	5	3	5	5	8	8
10	10	10	4	4	0	4	4	7	7
-10	-10	-10	6	11	3	***	***	—	—
-100	-100	-100	42	61	19	***	***	—	—

表 4: Sℓ_1QP 法、SQP 法、NLPQLP の目的関数の評価，目的関数の勾配計算 (***は最適点未到達、ーは実行不能)

初期点			Sℓ_1QP		SQP		NLPQLP	
x_1	x_2	x_3	目的	勾配	目的	勾配	目的	勾配
20	10	10	4	4	8	4	16	7
20	20	20	6	6	10	5	9	8
10	10	10	4	4	8	4	8	7
-10	-10	-10	7	7	***	***	—	—
-100	-100	-100	59	42	***	***	—	—

5　翼形状最適化への応用

軸流圧縮機の翼形状最適化に $S\ell_1$QP 法を応用する．そのときの収束履歴、最適化された翼形状の結果を単調直線探索法を使った SQP 法で最適化されたときと比較，検討する．

5.1　設計変数

図 1 は翼列の初期形状を示す．ガスが左から右へ流れ，流入角と流入マッハ数の設計値をできるだけまもりながらエネルギー損失を減らす翼形状の計算を非線形最適化問題として扱う．スプライン補間を使ってよく形状を定義する．設計変数は全部で 40 個である．

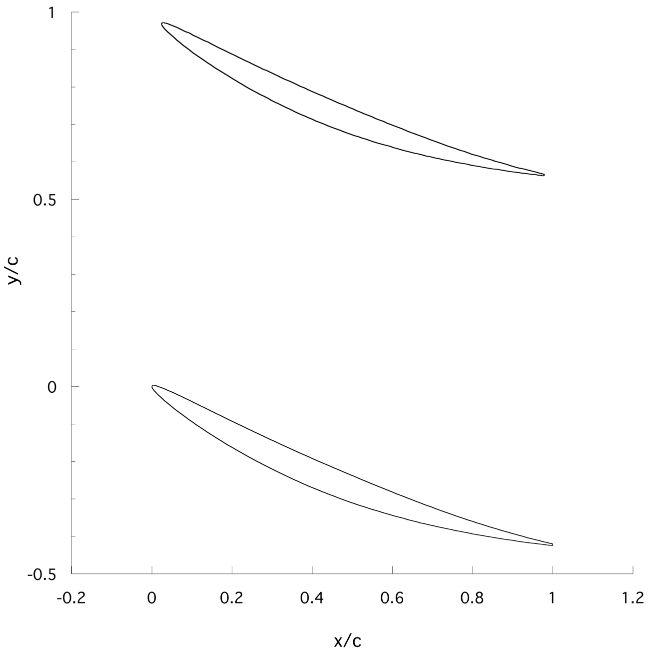

図 1: 翼列の初期形状

5.2　初期翼と設計値

翼の初期形状には NACA65 翼を使用する．

目的関数をエネルギー損失，流出角誤差，流入マッハ数誤差，最大翼厚誤差の和で定義する．

$$F(\mathrm{x}_D) = w_1(P_{ti} - P_{to}) + w_2(\theta_o - \bar{\theta}_o)^2 + w_3(M_{in} - \bar{M}_{in})^2 + w_4(t_{max} - \bar{t}_{max})^2$$

エネルギー損失の重み：$1/w_1 = 10^3 Pa$

流出角誤差の重み： $1/\sqrt{w_2} = 1°$

流入マッハ数誤差の重み：$w_3 = 10^4$

最大翼厚誤差の重み：$w_4 = 10^2$

制約条件は 40 個の設計変数の各上限，下限とする．

5.3　数値実験

翼形状最適化に $S\ell_1$QP 法を応用したときの実験結果を示す．また，単調直線探索法を使った SQP 法 [?] で最適化された場合と比較する．なお，探索は 70 回で打ち切る．

表 5: SQP 法，$S\ell_1$QP 法の流れの計算，勾配の計算，目的関数の値

数値解法	勾配の計算	流れの計算	目的関数
SQP 法	70	72	0.9299
$S\ell_1$QP 法	70	70	0.9296

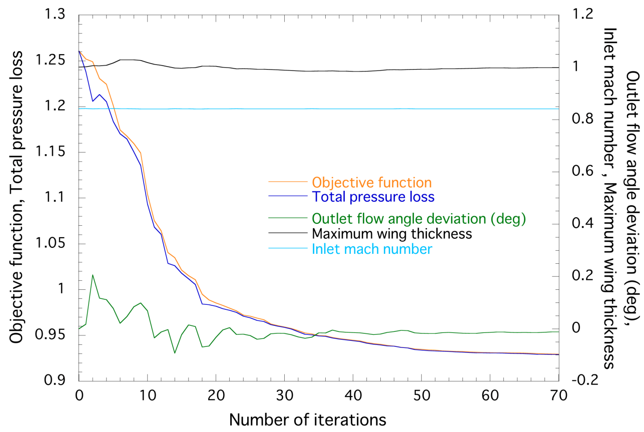

図 2: $S\ell_1$QP 法 (μ_0=30) による収束履歴

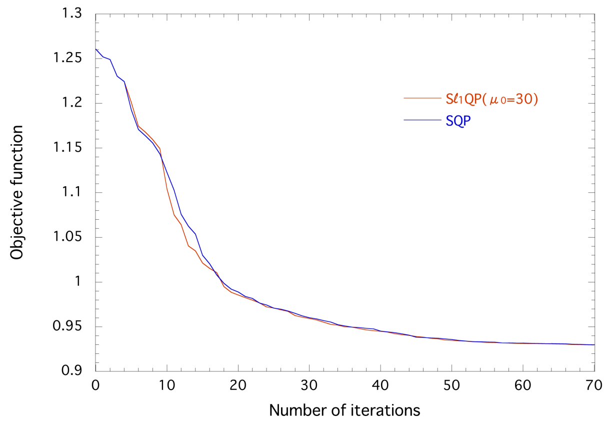

図 3: $S\ell_1$QP 法 ($\mu_0 = 30$) と SQP 法による目的関数の収束履歴の比較

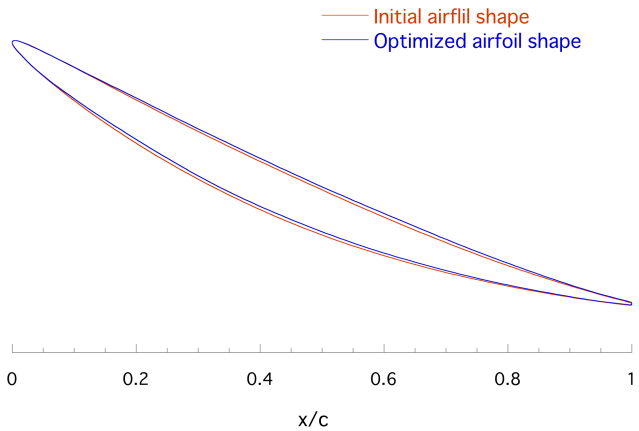

図 4: $S\ell_1 QP$ 法による最適化された翼形状

6 おわりに

数値実験の結果から, 計算時間のかかる 2 次計画問題を解く回数が, 初期点が最適点から近いときは同程度であるが, 離れるほど SPQ 法，NLPQLP 法に比べ, Sℓ_1QP 法のほうがより少ない回数で収束したことから良い結果が得られたといえる．また，翼形状最適化へ応用した結果では，全圧損失は約 26% 低減した．目的関数値が Sℓ_1QP 法のほうが SQP 法よりも僅かながらに良い結果が得られている．これは初期点が最適点から近いため，遠くなればより Sℓ_1QP 法に良い結果が得られることが期待できる．今後の課題として適切な Sℓ_1QP 法の初期パラメータの選択があげられる．

参考文献

[1] R.Fletcher: Practical Methods of Optimization, Second Edition, John Wiley and Sons, 1988

[2] 茨木俊秀.: FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店, 東京, 1989

[3] Prof. K. Schittkowski: NLPQLP: A Fortran Implementation of a Sequential Quadratic Programming Algorithm with Distributed an Non-Monotone Line Search -User's Guide、Version 3.1-、Department of Computer Science、Department of Computer Science、University of Bayreuth、2010

[4] 堀端康義：陰関数定理を利用した翼形状の最適化，日本応用数理学会論文誌，Vol.10,No.1,2000,pp.71-86