デジタルスパイクマップの動作の基本的な分類について

堀本, 成俊 / HORIMOTO, Narutoshi

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編
(巻 / Volume)
55
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
5
(発行年 / Year)
2014-03-24
(URL)
https://doi.org/10.15002/00010424

デジタルスパイクマップの動作の基本的な分類について

BASIC CLASSIFICATION OF DYNAMICS FROM DIGITAL SPIKE MAPS

堀本　成俊
Narutoshi HORIMOTO

指導教員 斎藤利通

法政大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程

This paper studies various transient- and steady-state spike-trains generated by the digital spike map: a simple digital dynamical system from a set of one-dimensional lattice points to itself. In order to consider the spike-train, three feature quantities are presented: the number of periodic spike-trains that can characterize richness of the steady states, the concentricity of spike-position transition that can characterize transition of map, and the concentricity of direct transition to the periodic spike-trains that can characterize local stability of the steady state. Based on these quantities, we give basic classification of dynamics of the map.
Key Words : *Spiking neuron, concentricity*

1. はじめに

デジタルスパイクマップ (DSM [1]-[5]) は、格子点集合上で定義される簡素なデジタル力学系である。DSM の定義域は周期スパイク列 (PST) であり、パラメータと初期値に依存して、DSM は様々な PST と、それに落ち込む様々な過渡現象を呈する。このような系を考察する動機としては、以下のようなことが考えられる。まず、デジタル力学系には、セルラーオートマトン (CA) や、バイナリーニューラルネット (BNN) など、様々なものがあるが [6]-[9]、DSM はデジタル力学系解析のための簡素な典型的な例になりうると思われる。これは、Logistic Map に代表される 1 次元マップがアナログ力学系 [10]-[17] の代表例であることに対応している。次に、DSM の呈するスパイク列の解析は、スパイク信号の用いる様々な応用の基礎となす。その応用としては、信号処理 [18]-[20], UWB 通信 [21]-[22], ニューロンのモデリングと学習モデル [23]-[25], ニューラル補綴 [26] 等が考えられる。さらに、デジタル力学系は、回路実装や解析において、アナログ力学系より有利であると思われる [27]-[29]。

本論文では、DSM の呈する定常状態と過渡現象を考察する。特に、過渡現象は、安定性や応答速度の観点から重要であるが、その解析は不十分である ([30] とその引用文献)。スパイク列を解析するために、3 つの特徴量を導入する。第 1 の特徴量は、定常状態の周期スパイク列の数であり、マップの呈する現象の豊富さを特徴づける。第 2 の特徴量は、スパイク遷移の集中度であり、マップの形状を基本動作を特徴づける。これは、ランダムニューラルネットワークに対して定義された状態遷移の集中度 [31] に基づいている。第 3 の特徴量は、周期スパイク列への直接遷移の集中度であり、過渡現象の局所吸引域を特徴づける。これらの特徴量を、分岐ニューロン (BN [11]-[17]) に関連する例題から導出する。BN は、積分発火ニューロンモデルを参考としたスイッチ力学系であり、その動作はアナログスパイクマップ (ASM) に帰着することができ、様々なアナログスパイク列を呈する。この ASM を離散化すると、DSM の例題が得られる。この例題に関する結果を参考として、DSM の動作の基本的な分類を試みる。この結果は、DSM の動作解析と応用の基礎になると思われる。

2. デジタルスパイクマップ

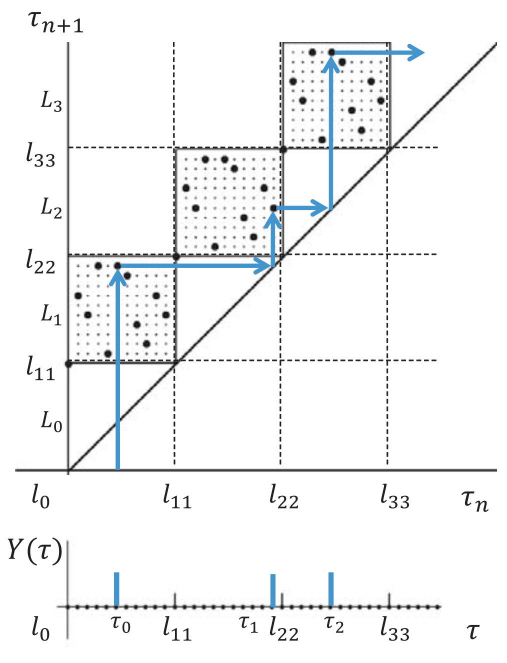

図 1 DSM

本論文では以下ように記述されるスパイク列を対象とする。

$$Y(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{for } \tau = \tau_n \\ 0 & \text{for } \tau \neq \tau_n \end{cases} \tag{1}$$
$$\tau_n \in L \equiv \{l_0, l_1, \cdots\},\ l_i \equiv i/N,\ i = 0, 1, 2, \cdots$$

ただし、τ_n は n 番目のスパイク位置である。スパイク位置

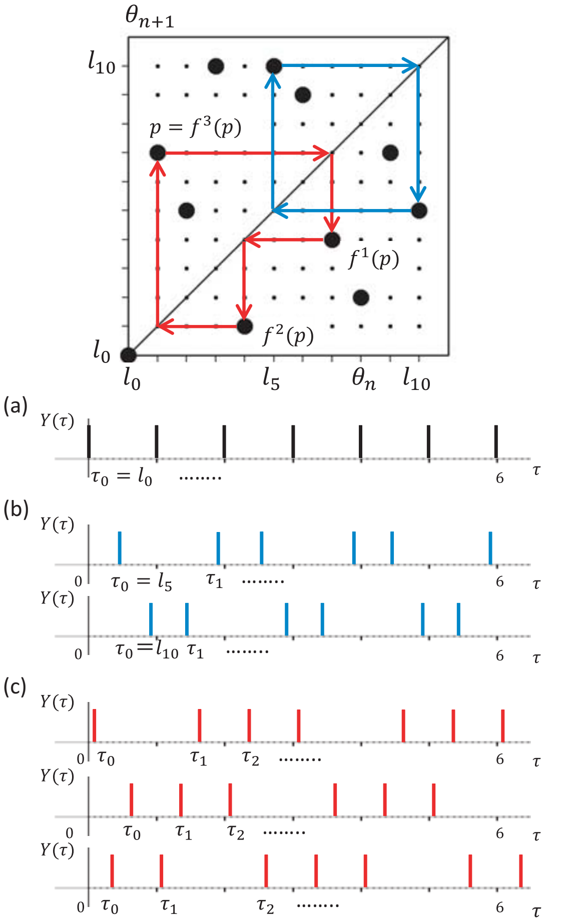

図 2 デジタル位相マップ (DPM) とスパイク列 (PST). (a) 不動点 l_0 に対応する PST. (b) 周期 2 の PEO に対応する 2 つの PST. (c) 周期 3 の PEO に対応する 3 つの PST.

は、直線上に配置された格子点の集合 L の中の離散的な値をとる。$l_i = i/N$ は i 番目の格子点であり (i は非負整数)、N は単位区間 $[0,1)$ あたりの格子点数である。あるスパイク列 $Y(\tau)$ は、スパイク位置 τ_n の系列で記述されるものとする。デジタルスパイクマップ (DSM) は、L からそれ自身へのマップであり、スパイク列の動作を支配する:

$$\tau_{n+1} = F(\tau_n),\ F : L \to L. \tag{2}$$

ただし、因果律を満たすために $F(\tau_n) > \tau_n$ とする。図 1 に DSM とそのスパイク列の例を示す。τ_n は τ_{n+1} を一意に決めるので、ある初期スパイク位置 τ_0 が与えられると、DSM は一つのスパイク列 $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots\}$ を生成する。ここで、簡単のため、以下を仮定する:

$$F(\tau + 1) = F(\tau) + 1,\ F(\tau) \in L_{n+1} \text{ for } \tau \in L_n \tag{3}$$

ここで L_n は n 番目の格子点とする。

$$L_n \equiv \{n + l_0, \cdots, n + l_{N-1}\},\ L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n,$$

初期スパイク位置は以下で与えられる。

$$\tau_0 \in L_0 \equiv \{l_0, \cdots, l_{N-1}\}$$

n 番目のスパイク位置は以下を満たす。

$$\tau_n \in L_n \equiv \{n + l_0, \cdots, n + l_{N-1}\}$$

条件 (3) に基づき、位相変数 $\theta_n \equiv \tau_n \bmod 1$ を定義する。これを用いて、デジタルスパイク位相マップ (DPM) を定義する。

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \equiv F(\theta_n) \bmod 1,\ \theta_n \in L_0 \tag{4}$$

図 2 に DPM とスパイク列を示す。DPM は有限個の格子点集合 L_0 上の写像なので、定常状態は周期現象であり、アナログマップのように非周期現象を起こすことはない。定常状態に関する基本的な定義を与える。

定義 1: L_0 上の点 p は、$p = f^k(p)$ であり, $f(p)$ から $f^k(p)$ が全て異なるとき、周期 k の周期点 (PEP) という。ただし、f^k は f の k 回合成写像である。特に、周期 1 の PEP を不動点と呼ぶ。PEP の系列 $\{p, f(p), \cdots, f^{k-1}(p)\}$ を (周期 k の) 周期軌道 (PEO) という。

ここで、図 2 に示したように、周期 k の PEP は一つの周期 k の PST ($\tau_k = \tau_0 + k$) に対応することに注意する。すなわち、周期 k の PEO は、k 個の PST と対応する。例えば、図 2 の DPM は、6 個の PST を持ち、初期値に依存してそのいづれかを呈する。次に、過渡現象に関する定義を与える。

定義 2: L_0 上の点 q は、PEP ではないが、k ステップである周期点 p に落ち込むとき ($f^k(q) = p$)、ステップ k の E 周期点 (EPP) という。特に、1 スッテプである PEP に落ち込む EPP を、その PEP の直接 E 周期点 (DEPP) とよぶ。

ある EPP は、一つの PST に落ち込む一つの過渡スパイク列を与える。EPP は過渡現象を考えるための基本であり、PST への吸引圏を構成する。

3. 基本特徴量

スパイク列の動作を考察するために、3 つの特徴量を導入する。第 1 の特徴量は、PST の数である。これは定常状態の豊富さを特徴づける。

$$\#\text{PST} = \#\{\text{PEPs of } f\}$$

他の特徴量を導入するために、基本的な定義をする。DPM の定義域 L_0 の点 $\theta \in L_0$ が、$f(\theta) = l_i$ を満たすとき、θ を格子点 l_i の親状態とよぶ。親状態は、スパイク位置と対応する格子点の逆像である。N_i を格子点 l_i の親状態の数とする。

$$N_i = \#\{\theta \mid f(\theta) = l_i\},\ \sum_{i=0}^{N-1} N_i = N,$$

ただし、$l_i = i/N,\ i = 0 \sim N-1$ である。第 2 の特徴量は、スパイク遷移の集中度であり、次式で定義される。

$$C_l = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} N_i^2$$

もし、親状態が少数の格子点に集中するとき、C_l は大きくなる。DPM が 1:1 の写像であるとき、最少値 $C_l = 1$ をとる。この特徴量は、ランダムネットワークに対して導入された状態遷移集中度 [31] に基づいており、DPM の「形状」を特徴づける。DPM は様々な「形状」をとることができ、

アナログマップのように多項式などで記述することは困難である。

第 3 の特徴量は、周期スパイク列への直接遷移の集中度 C_e である。その定義の基礎として、DEPP は PEP の親状態であることに注意する。いま、ある DPM が M 個の PEP, $p_1, \cdots, p_M$ を持つとする。これは M 個の PST に対応する。q を p_k への DEPP $(f(q) = p_k)$ とし、M_k をその数とする。

$$M_k = \#\{q \mid f(q) = p_k\}$$

この分布の 2 次モーメントが特徴量である。

$$C_e = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} M_k^2,$$

DEPP が少数の PEP に集中すると、C_e は大きくなる。L_0 の全ての点が PEP であり、DEPP が存在しないとき、C_e は最小値 0 となる。C_e は PEP の局所吸引域を特徴づける。

4. 分岐ニューロンに基づく DPM の基本分類

特徴量を用いて DPM の動作を分類していくための第一歩として、分岐ニューロン (BN [11]-[14]) に基づく DPM を考察する。BN は、スパイキングニューロンの簡素なモデルともみなせるスイッチ力学系である。

周期的なベース信号 $b(\tau)$ と一定のしきい値の間の積分発火動作を繰り返すことにより、BN は様々なアナログスパイク列を生成できる。その動作は、次のアナログスパイク位相写像 (APM) に支配される。

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 1 - b(\tau_n) \bmod 1 \equiv f_a(\theta_n) \quad (5)$$

ただし、$\theta_n \in [0, 1)$ はアナログスパイク位相である。ベース信号として様々な形状を考えることができるが、ここでは正弦波の場合を考える。

$$b(\tau) = -k \sin 2\pi\tau,\ 0 < k < 0.73$$

簡単のため、$0 < k < 0.73$ とする。このとき、対応する DPM は条件 (3) を満たす。k が変化すると、BN は様々な分岐現象を呈する [11]-[16]。この APM を次のように離散化すると、DPM を得る。

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{N}\mathrm{INT}(N f_a(\theta_n) + 0.5) \equiv f_d(\theta_n) \quad (6)$$

ただし、$\theta_n \in L_0$ であり、$\mathrm{INT}(X)$ は X の整数部である。ここで、この DPM は APM の近似ではないことに注意する。APM を離散化すれば DPM となるが、DPM を補間すれば APM となり、両者の間には主従関係はない。

ここで、C_l、C_e、#PST の 3 つの特徴量を用いて DPM の分類を試みる。一般的な議論は困難であるので、図 4 に示した DPM の例を用いる。これは、図 3 の APM を $N = 128$ で離散化したものである。

パターン 1: C_l も C_e も非常に大きい。親状態が少数の格子点に集中し、DEPP も少数と PEP に集中している。図 4 (a) に典型例を示す。$k = 0.159 \equiv k_a$ では、ほとんどすべての親状態と DEPP が一つの不動点 p に集中している。対応する APM(図 3 (a)) の不動点 0.5 は超安定 $(\frac{d}{d\theta}f_a(0.5) = 0)$ である。

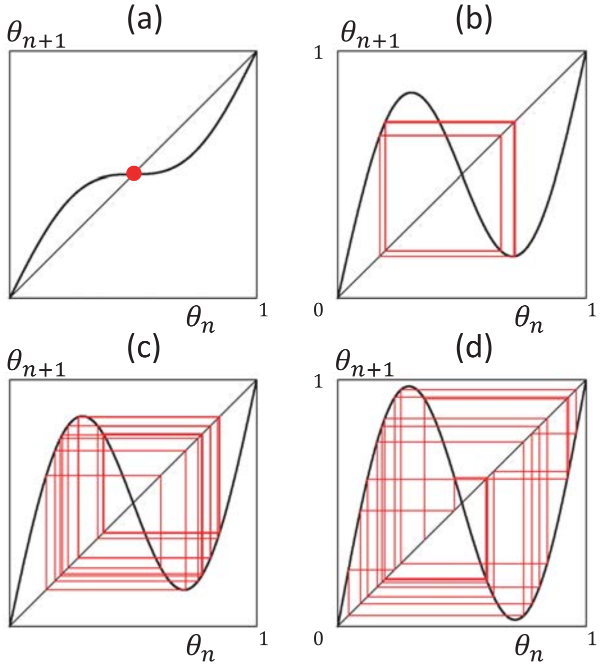

図 3 アナログスパイク位相マップ (APM) の例. (a) $k = 0.159 \equiv k_a$ (b) $k = 0.559 \equiv k_b$ (c) $k = 0.581 \equiv k_c$ (d) $k = 0.706 \equiv k_d$.

パターン 2: $C_l \doteq 2$, C_e は非常に大きい。k が増加すると C_l が 2 に近づくことが解っている (図 5)。そして、このパターンでは多くの DEPP をもつ PEP が存在する。図 4 (b) に典型例を示す。この DPM は 8 つの周期 4 の PEPs と 2 つの不動点をもつ。いくつかの周期点は、APM の極値の近くに対応するところに存在する。このような周期点はたくさんの DEPP を持つことができる。

パターン 3. $C_l \doteq 2$, C_e は非常にい小さい。DEPP は P 各 PEP で分散している。図 4 (c) に典型例を示す。この DPM は 4 つの周期 2 の PEP と 2 つの不動点をもち、対応する APM(図 3 (c)) はカオスを呈する。PEP の数は少なく、局所吸引域は狭い。

パターン 4. $C_l \doteq 2$ で C_e は小さい。PST の数は非常に大きく、DEPP は各 PST に分散している。図 3 (d) に典型例を示す。この DPM は 18 個の PST をもち、対応する APM(図 3 (d)) はカオスを呈する。C_e が小さいと、PST への過渡現象は長くなる傾向がある。

図 5 にパラメータ k に対する 3 つの特徴量の変化を示す。DPM は、$k = k_a$ 付近でパターン 1 となる。k を増加させると、C_l は 2 に近づくが、C_e と#PST は複雑に変化し、パターン 2, 3, 4 の現れ方は複雑である。

5. 結び

DSM の呈するスパイク列の定常状態と過渡現象を解析するために、3 つの特徴量を導入した。BN に基づく DSM の例題から特徴量を算出し、DSM の動作を基本的な 4 つのパターンに分類した。今後の課題は、様々なクラスの DSM からの特徴量の導出、現象の詳細な分類、学習系の構築、スパイク信号に基づく工学的応用、等である。

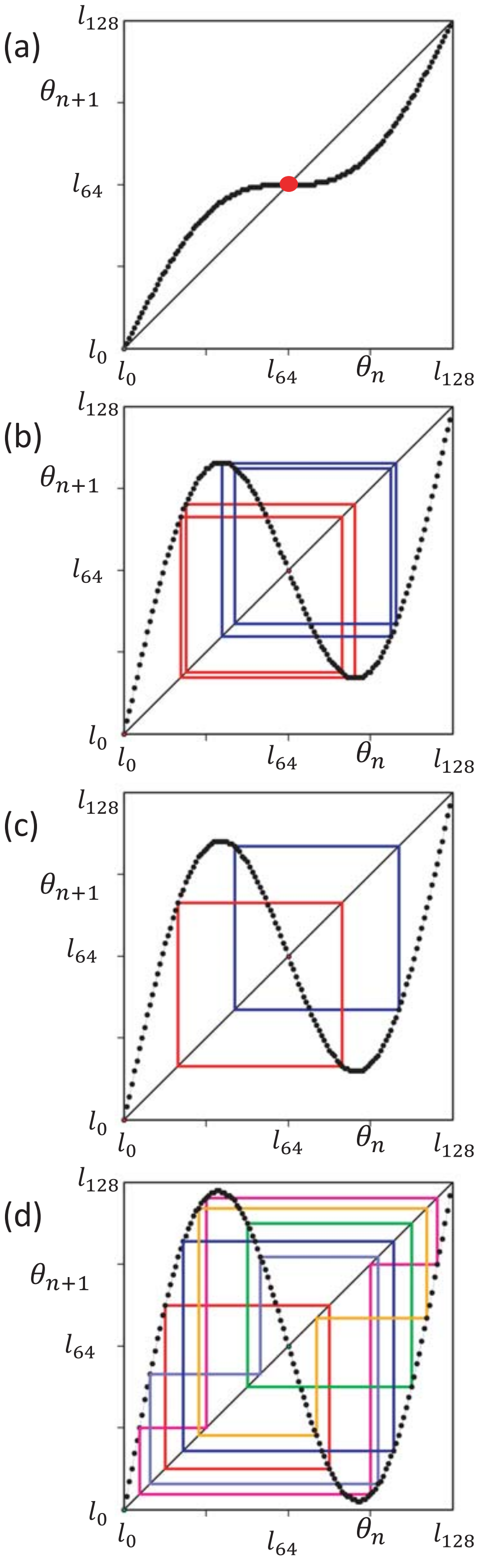

図 4 DPM の例 (N = 128). (a) $k = 0.159 = k_a$, $C_l = 4.81$, $C_e = 200$, #PST = #PEP = 2. (b) $k = 0.559 = k_b$, $C_l = 2.56$, $C_e = 10.8$, #PST = 10 (#PEO=4). (c) $k = 0.581 = k_c$, $C_l = 2.38$, $C_e = 0.33$, #PST = 6 (#PEO=4). (d) $k = 0.706 = k_d$, $C_l = 2$, $C_e = 1$, #PST = 18 (#PEO=8. PEO はカラーで分類).

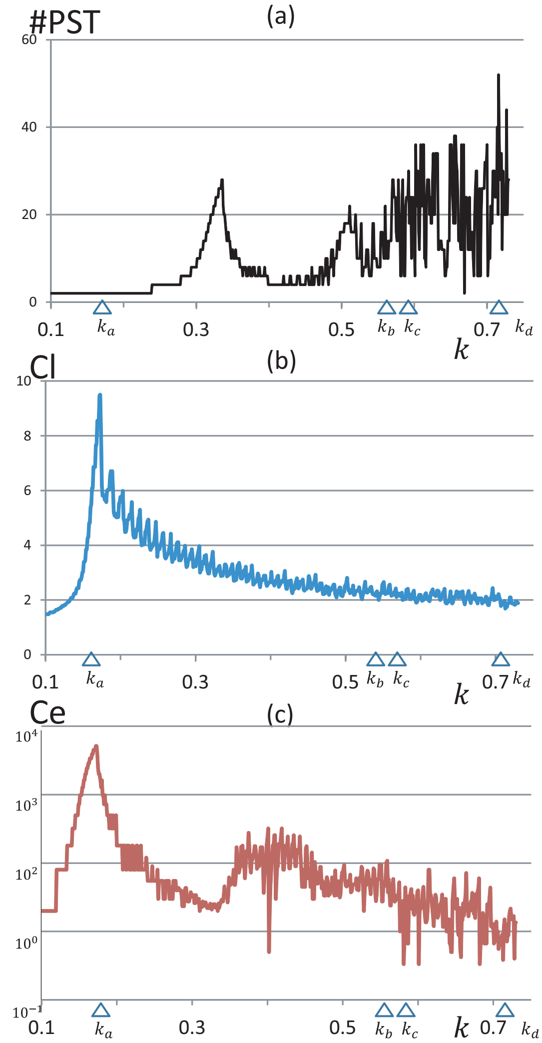

図 5 パラメータ k に対する基本特徴量 ($N = 128$). 図 4 (a)-(d) は点 k_a-k_d で得られる. (a) #PST (スパイク列数), (b) C_l (スパイク位置遷移の集中度), (c) C_e (PST への直接遷移の集中度).

謝辞：本研究は著者が法政大学大学院工学研究科電気工学専攻に在学中に行ったものである。この研究は同大学理工学部電気電子工学科斎藤利通教授の指導下で行ったもので、全ての研究活動を遂行するにあたり同教授から大変御参考になる御指導・御鞭撻を沢山賜りました。ここに心から深謝いたします。

また、研究活動中に貴重な御助言・御討論を賜りました京都産業大学コンピュータ理工学部コンピュータサイエンス学科准教授鳥飼博之准教授には感謝の意を表明いたします。

最後に法政大学理工学部電気電子工学科斎藤利通研究室の皆様にはいろいろな有益な御討論・ご助言を戴きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

1) T. Ogawa and T. Saito, Digital Spike Maps and Learning of Spike Signals, Proc. of IEEE-INNS/IJCNN, pp. 1587-1592, 2010.
2) T. Ogawa and T. Saito, Self-organizing digital spike maps for learning of スパイク列 s, IEICE Trans. Fun-

damentals, E94-A, 12, pp. 2845-2852, 2011.
3) N. Horimoto and T. Saito, Analysis of Digital Spike Maps based on Bifurcating Neurons, NOLTA, IEICE, 3, 4, pp. 596-605, 2012.
4) N. Horimoto, T. Ogawa and T. Saito, Basic Analysis of Digital Spike Maps, (A.E.P. Villa et al. (Eds.): ICANN 2012, Part I), LNCS 7552, pp. 161-168. Springer, 2012.
5) N. Horimoto and T. Saito, Analysis of Various Transient Phenomena and Co-existing Periodic Spike-trains in Simple Digital Spike Maps, Proc. IEEE-INNS/IJCNN, pp. 1751-1758, 2013.
6) L. O. Chua, A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science, I, II. World Scientific, 2005.
7) P. L. Rosin, Training Cellular Automata for Image Processing, IEEE Trans. Image Process., 15, 7, pp. 2076-2087, 2006.
8) W. Wada, J. Kuroiwa and S. Nara, Completely reproducible description of digital sound data with cellular automata, Physics Letters A 306, pp. 110-115, 2002.
9) R. Ito, Y. Nakayama and T. Saito, Analysis and Learning of Periodic Orbits in Dynamic Binary Neural Networks, Proc. IEEE-INNS/IJCNN, pp. 502-508, 2012.
10) E. Ott, Chaos in dynamical systems, Cambridge, 1993.
11) R. Perez and L. Glass, Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator, Phys. Lett., 90A, 9, pp. 441-443, 1982.
12) H. Torikai, T. Saito and W. Schwarz, Synchronization via multiplex pulse-train, IEEE Trans. Circuits Syst. I, 46, 9, 1072-1085, 1999.
13) H. Torikai and T. Saito, Resonance phenomena of interspike intervals from a spiking oscillator with two periodic inputs, IEEE Trans. Circuits Syst. I, 48, 10, pp. 1198-1204, 2001.
14) G. Lee and N. H. Farhat, The bifurcating neuron network 1, Neural networks, 14, pp. 115-131, 2001.
15) E. D. M. Hernandez, G. Lee and N. H. Farhat, Analog realization of arbitrary one-dimensional maps, IEEE Trans. Circuits Syst. I, 50, 12, pp. 1538-1547, 2003.
16) H. Hamanaka, H. Torikai and T. Saito, Analysis of composite dynamics of two bifurcating neurons, IEICE Trans. Fundamentals, E88-A, 2, pp. 561-567, 2005.
17) Y. Kon'no, T. Saito and H. Torikai, Rich dynamics of pulse-coupled spiking neurons with a triangular base signal, Neural Networks, 18, pp. 523-531, 2005.
18) S. R. Campbell, D. Wang and C. Jayaprakash, Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators, Neural computation, 11, pp. 1595-1619, 1999.
19) H. Hamanaka, H. Torikai and T. Saito, Quantized spiking neuron with A/D conversion functions, IEEE Trans. Circuits Syst. II, 53, 10, pp. 1049-1053, 2006.
20) A. Mohemmed, G. Lu and N. Kasabov, Evaluating SPAN incremental learning for handwritten digit recognition, (T. Huang et al. (Eds.): ICONIP 2012, Part III), LNCS 7665, pp. 670-677, Springer, 2012.
21) N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring and A. R. Volkovskii, Digital communication using chaotic-pulse-position modulation, IEEE Trans. CAS-I, 48, 12, pp. 1436-1444, 2001.
22) T. Iguchi, A. Hirata and H. Torikai, Theoretical and heuristic synthesis of digital spiking neurons for spike-pattern-division multiplexing, IEICE Trans. Fundamentals, E93-A, 8, pp.1486-1496, 2010.
23) S. V. Notley and A. Gruening Improved spike-timed mappings using a tri-phasic spike timing-dependent plasticity rule, Proc. of IEEE-INNS/IJCNN, pp. 2937-2942, 2012.
24) E. M. Izhikevich, Simple model of spiking neurons, IEEE Trans. Neural Networks, 14, 6, pp. 1569-1572, 2003.
25) N. Ning, H. Kejie and S. Luping, Artificial neuron with somatic and axonal computation units: mathematical and neuromorphic models of persistent firing neurons, Proc. of IEEE-INNS/IJCNN, pp. 473-479, 2012.
26) H. Torikai and T. Nishigami, An artificial chaotic spiking neuron inspired by spiral ganglion cell: parallel spike encoding, theoretical analysis, and electronic circuit implementation, Neural Networks, 22, pp. 664-673, 2009.
27) H. Torikai, A. Funew and T. Saito, Digital spiking neuron and its learning for approximation of various spike-trains, Neural Networks, 21, pp. 140-149, 2008.
28) S. Hashimoto and H. Torikai, A novel hybrid spiking neuron: Bifurcations, Responses, and On-chip learning, IEEE Trans. Circuits Systs, I, 57, 8, pp.2168-2181, 2010.
29) T. Matsubara, H. Torikai and T. Hishiki, A Generalized Rotate-and-Fire Digital Spiking Neuron Model and its On-FPGA Learning, IEEE Trans. Circuits Systs, II, 58, 10, pp. 677-681, 2011.
30) T. Hishiki and H. Torikai, A Novel Rotate-and-Fire Digital Spiking Neuron and its Neuron-like Bifurcations and Responses, IEEE Trans. Neural Netw, 22, 5, pp. 752-767, 2011.
31) S. Amari, A Method of Statistical Neurodynamics, Kybernetik 14, pp. 201–215, 1974.