ローンポートフォリオにおける評価と管理

藤原, 佑太 / FUJIWARA, Yuta

(出版者 / Publisher)
法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)
55

(開始ページ / Start Page)
1

(終了ページ / End Page)
4

(発行年 / Year)
2014-03-24

(URL)
https://doi.org/10.15002/00010362

ローンポートフォリオにおける評価と管理

ASSESSMENT AND MANAGEMENT IN LOAN PORTFOLIO

藤原 佑太
Yuta FUJIWARA
指導教員 浦谷規

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

We consider the famous Vasicek model for loan portfolio distribution, which is widely used in financial industry for computing loss distribution. The portfolio value is the sum of equal valued assets which follow the individual risk factor and one common factor of economy, which are assumed to be mutually independent and normally distributed. The assumption gives the foundation theory of Gaussian copulas model for default risk.

Key Words: portfolio loss distribution, Vasicek model

1. はじめに

2007 年から 2008 年にかけて発生した金融危機の原因の 1 つに, 証券化商品の存在が挙げられる．CDO とは, 社債やローン等から構成される債権ポートフォリオを原資産に持つ証券化商品の一種である．

2. 研究目的

CDO の価格付けでは複数の原資産からなるポートフォリオの信用リスクの評価がポイントとなり, 適切なポートフォリオ損失のリスク管理が必要とされている．金融業界の実務で広く用いられている Vasicek[1], Pykhtin and Dev[2] の理論を用いて, ローンポートフォリオに対する信用リスクの近似解析表現を与える手法の研究を行う．

3. 損失モデル

(1) 均一ポートフォリオにおける損失モデル

損失過程は $i = 1, ..., n$ のローンが存在するポートフォリオにおいて, ローン元本が全て等しい場合を仮定する．債権者 i の損失率 (LGD) を L_i と表し, $L_i = 1$ ならば債権者 i にデフォルト発生 (回収率が 0), それ以外は $L_i = 0$ とする．

$$L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i \qquad (1)$$

(2) ウェイトを用いた損失モデル

極限損失分布は厳密には不均等なウェイトにより成り立っている．ポートフォリオのウェイトを $w_1, w_2, ..., w_n$ とし, ウェイトの合計を $\Sigma w_i = 1$ とする．ウェイトは次のように定義する．

$$w_i = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

A_i は債権者 i のローン金額である．ウェイトによるポートフォリオ損失は以下の式となる．

$$L = \sum_{i=1}^{n} w_i L_i \qquad (2)$$

4. 資産価値

第 i 番目のローンの資産価値は次のように表される．

$$A_i(T) = A_i \exp\left(\mu_i T + \sigma_i X_i \sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma_i^2 T\right)$$

$Y, Z_1, Z_2, ..., Z_n$ は独立な正規分布とする．さらに X_i は, Y との相関関数 ρ の標準正規であり, Z_i との相関係数を $1-\rho$ とする．Y は経済指標のようなポートフォリオ内共通の条件であり, $Y\sqrt{\rho}$ を全企業共通のリスク要因とし, $Z_i\sqrt{1-\rho}$ を各企業の個別リスク要因とする．

$$X_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}$$

5. 極限損失分布

(1) デフォルトの定義

借用者が支払うべき契約値を B_i とする．デフォルトの定義は債券価格が支払価格を下回った場合, つまり $A_i(T)$ が B_i 以下になる時と仮定．i 番目のローンが時刻 T でデフォルトする確率 p_i は次のように表される．

$$p_i = \mathrm{P}[A_i(T) < B_i]$$

また, 条件 Y の下で任意の L_i がデフォルトを起こす場合の条件付き確率は次のように表される.

$$\begin{aligned} p(Y) &= \mathrm{P}[L_i = 1|Y] \\ &= N\left(\frac{N^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

(2) 損失分布

2.1 累積分布関数

ポートフォリオ損失分布は累積分布で次のように表される.

$$F(x;p,\rho) = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4}$$

この分布は $0 \leq x \leq 1$ の間で連続である.

2.2 密度関数

累積分布関数である (4) 式に対して微分を行うと, 下式の密度関数が求められる.

$$\begin{aligned} f(x;p,\rho) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} exp\Bigg(&- \frac{1}{2\rho}\Big(\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) \\ &- N^{-1}(p)\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(N^{-1}(x)\right)^2\Bigg) \end{aligned} \tag{5}$$

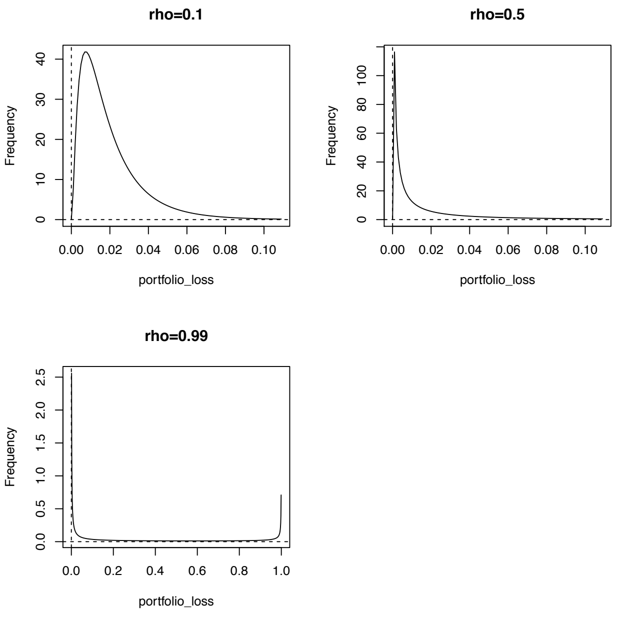

図１　ポートフォリオ損失確率密度関数 (デフォルト確率:2%)

損失分布の最頻値はポートフォリオ極限損失分布の密度関数 (5) 式に対して微分を行い, 変曲点 $df/dx = 0$ である点である.

$$L_{mode} = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho}N^{-1}(p)\right)$$

損失分布の α 分位点

$$L_\alpha = F(\alpha; 1-p, 1-\rho)$$

2.3 分散

ポートフォリオ損失分布の平均は $\mathrm{E}[L] = p$ であり,

$$\begin{aligned} s^2 = \mathrm{Var}L &= \mathrm{E}\left[L^2\right] - \mathrm{E}\left[L\right]^2 \\ &= N_2\left(N^{-1}(p), N^{-1}(p), \rho\right) - p^2 \end{aligned}$$

6. リスクに対する資本

Pykhtin and Dev[2],　安藤 [3]　は, 極限損失分布を利用して, 証券化商品の経済的資本を求めた. リスクに対して自己資本をどれほど用意すべきかを解析的に算出する.

補完水準 S, 厚さ T のトランシェにおいて $X_i < N^{-1}(p)$ のときにデフォルトすると考える. 損失 L の密度関数を $f(l)$, 損失率が l より大きくなる確率を $G(l)$ とする.

ポートフォリオの経済的資本 K_{IRB} は以下の式で表される.

$$K_{IRB} = \mu N\left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho}N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

(1) トランシェの期待損失率

損失率 $U(S,T)$ は次のように場合分けできる.

$$U(S,T) = \begin{cases} 0 & (L \leq S) \\ (L-S)/T & (S < L \leq S+T) \\ 1 & (L > S+T) \end{cases}$$

よって, トランシェの期待損失率は以下の式となる.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U(S,T)] &= \int_S^{S+T} \frac{l-S}{T} f(l)dl + \int_{S+T}^1 f(l)dl \\ &= \frac{1}{T}\int_S^{S+T} G(l)dl \end{aligned}$$

(2) トランシェの経済的資本

ここで, 十分に細分化されたポートフォリオを持つ投資家が別のポートフォリオに投資していると仮定. 投資しているポートフォリオの損失は, 標準正規に従うリスク要因 Z に依存すると仮定する. リスク要因 Y と Z の相関を $\sqrt{\rho_Y}$ とし, ϵ は標準正規に従う独立な確率変数とする.

$$Y = Z\sqrt{\rho_Y} + \epsilon\sqrt{1-\rho_Y}$$

$Z = N^{-1}(1-\alpha)$ の下で

$$K(S,T) = \frac{1}{T}\int_S^{S+T} G(l\ |Z)dl$$

と表すことができる. そして $G\left(l\ |Z = N^{-1}(1-\alpha)\right)$ を限界経済資本とする.

$$G(l\ |Z) = N\left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho\rho_Y}N^{-1}(\alpha) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho(1-\rho_Y)}}\right)$$

$$H(l) = \begin{cases} \mu N_2 \left(N^{-1}(l/\mu),\ A,\ \sqrt{\frac{1-\rho}{1-\rho\rho_Y}} \right) & (l < \mu) \\ \mu N(A) & (l \geq \mu) \end{cases}$$

$$A = \frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho\rho_Y} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho\rho_Y}}$$

と置くと，トランシェの経済的資本は以下の式で求めることができる．

$$K(S,T) = \frac{H(S+T) - H(S)}{T}$$

7. リスク中立確率

CDO の構成時においてトランシェによる予想損失金額と損失確率を計算する際に使用される分布は，無裁定条件を満たすリスク中立確率分布を使用する必要がある．リスク中立確率は，デフォルト確率が危険中立比率 P^* の下で評価されること以外は，デフォルト確率の時同様に計算することが出来る．

$$p^* = \mathrm{P}^*[A(T) < B] = N\left(\frac{\log B - \log A - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ = N(N^{-1}(p) + \sigma\rho_M\sqrt{T})$$

ρ_M：株価と市場の相関性，$\lambda = (\mu_M - r)/\sigma_M$：リスクの市場価値．リスク中立時のポートフォリオ損失は以下の式となる．

$$\mathrm{P}^*[L \leq x] = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p^*)}{\sqrt{\rho}} \right)$$

(1) トランシェの価格付け

時刻 T でのポートフォリオ損失の合計 $C(L)$ は次の式で価格付けされる．

$$V = e^{-rt}\mathrm{E}^*[C(L)]$$

L_0 を超える損失の価格付けは以下の式で表される．

$$V = e^{-rt}\mathrm{E}^*[(L-L_0)_+] \\ = e^{-rt}\left(p^* - N_2\left(N^{-1}(p^*), N^{-1}(L_0), \sqrt{1-\rho} \right) \right)$$

同様に，L_0 から L_1 の間の損失に対するデリバティブ証券の価格付けは次のように表される．

$$V = e^{-rT}\Bigg(N_2\left(N^{-1}(p^*), N^{-1}(L_1), \sqrt{1-\rho} \right) \\ -N_2\left(N^{-1}(p^*), N^{-1}(L_0), \sqrt{1-\rho} \right) \Bigg)$$

8. ポートフォリオの市場価値

満期 T, 現在時刻 H でのポートフォリオ価値について考察する．

$D(H)$ を H 時点でのローンの価値とし，L_i を (3) 式で表すと，ポートフォリオ損失分布は条件 Y のみによって決定するので，H 時点でのローンの損失を L_i と再定義し，安全資産価値と H 時点の市場価値の差によって次のように表す

$$L_i = e^{-r(T-H)} - D(H) \\ = aN\left(b\sqrt{\frac{T}{T-H}} - X_i\sqrt{\frac{H}{T-H}} \right)$$

$$a = Ge^{-r(T-H)},\ b = N^{-1}(p) + \lambda\rho_M\frac{T-H}{\sqrt{T}}$$

L を H 時点でのローンポートフォリオの市場価値による損失とし，ウェイトを w_i とする．L_i の条件付き平均値は次のように表される．

$$\mu(Y) = \mathrm{E}[L_i|Y] = aN\left(b\sqrt{\frac{T}{T-\rho H}} - Y\sqrt{\frac{\rho H}{T-\rho H}} \right)$$

損失分布における条件 Y は独立であり，ポートフォリオが十分に細分化されていると，$\mathrm{E}[L|Y] = \mu(Y)$，ウェイト項が $\Sigma w^2 \to 0$ となり，条件 Y によるポートフォリオ損失 L は平均値に収束する．

極限損失分布 L は下式となる．

$$\mathrm{P}[L \leq x] = \mathrm{P}[\mu(Y) \leq x] \\ = F\left(\frac{x}{a}; N(b), \frac{\rho H}{T} \right)$$

9. シミュレーション

(1) ポートフォリオ損失の再現

$\rho = 0.1$, デフォルト確率 2%, LGD(デフォルト時損失率) を 100%, 企業数 $n = 1000$ 社, 1000 回のモンテカルロシミュレーションを行った．貸付金額は全企業等しいとする．シミュレーション結果を図 2 に示した．赤線はシミュレーション結果であり，黒線は (5) 式である．

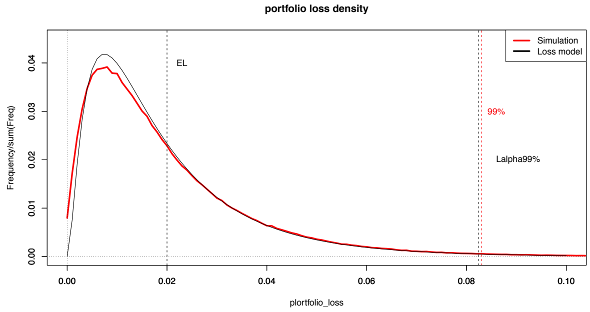

図 2　ポートフォリオ損失確率密度関数

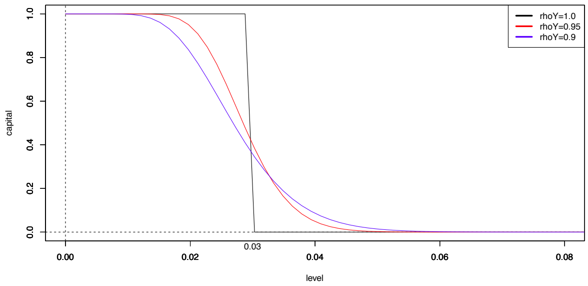

図 3　限界経済的資本

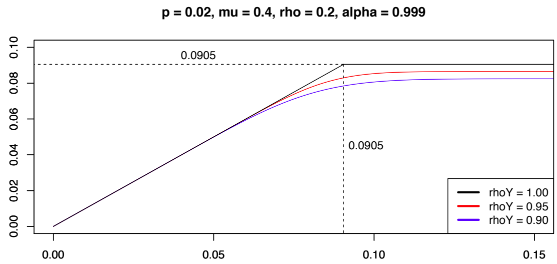

図 4　累積経済的資本

表 1　ポートフォリオ損失に対して標準化を行った α 分位点

p	ρ	$\alpha=0.9$	$\alpha=0.99$	$\alpha=0.999$	$\alpha=0.9999$
0.001	0.1	0.98	4.09	8.83	15.37
	0.4	0.12	3.25	13.18	31.75
	0.9	-0.05	0.08	14.64	43.68
0.01	0.1	1.19	3.82	7.01	10.67
	0.4	0.55	4.51	11.04	18.19
	0.9	-0.13	4.70	13.19	13.57
0.1	0.1	1.35	3.16	4.75	6.16
	0.4	1.33	3.85	5.48	6.33
	0.9	1.31	3.70	3.71	3.71
標準正規		1.28	2.33	3.09	3.72

(2) 分布の特徴と考察

ポートフォリオ損失を評価するために標準化を行う．各損失 L_α から平均 μ を引き，標準偏差 σ で割ることで標準化が行われる．

$$\frac{L_\alpha - p}{s} = \frac{L_\alpha - \mathrm{E}[L]}{\sqrt{\mathrm{Var}L}}$$

2.1 **考察**

表 1 から α の値が大きいほうが標準化損失は大きくなっていることがわかる．相関の強いものは標準化損失の変化幅が大きくなり，相関の弱いものは変化幅が小さくなっている．つまり，相関の大きさが標準化損失の変動に大きな影響を与えている．また，デフォルト確率が高く相関が強い時には損失は標準正規分布の値に近くなる．

以上より，Vasicek モデルでは正規分布でのモデルより標準化損失の変動が大きくなっている．つまり，正規分布ではすべての企業の価値が高くなる時など損失を正しく評価できないが，Vasicek モデルでは，損失価値の変動が大きいため損失を正しく評価することが出来る．

(3) 経済的資本

図 3 に $p=0.01, \mu=0.4, \rho=0.2, \alpha=0.99$ の限界期待損失率 $G(l)$ を示した．$\rho_Y=1.0$ のグラフは $S>K_{IRB}$ のとき経済的資本を必要としないので，$K_{IRB}=3\%$ を境に限界経済的資本を与える．トランシェの補完水準 S が K_{IRB} より低い時は両者の差額と同額の資本を追加し，トランシェの補完水準が K_{IRB} より高い時は資本の追加は不要だと考えられる．$\rho_Y=0.95$, 0.9 のときは補完水準の大きさによって限界経済的資本の大きさが逆転している．

図 4 に $K(S=0, T=1)$ を示した．ρ_Y が増加関数となっていることがわかる．これは投資ポートフォリオに組み込まれることによるリスク分散効果が高いためである．

10. 結び

極限損失分布では原資産ポートフォリオは均一かつ十分に細分化されていると仮定した．機関投資家の投資ポートフォリオは大きく分散されていると考えられるため，条件を満たしたポートフォリオにおいては良い近似となっていると考えられる．

参考文献

[1] VASICEK, Oldrich. The distribution of loan portfolio value. Risk, 2002, 15.12: 160-162.

[2] PYKHTIN, Michael; DEV, Ashish. Credit risk in asset securitizations: Analytical model. Risk, 2002, 15.5: 16-20.

[3] 安藤美孝. 与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法: 極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に. 日本銀行金融研究所, 2005.